"Hütte," des Ingeniers Taschenbuch

Akademischer Verein Hütte, Hütte

DES

INGENIEURS TASCHENBUCH.

Akademischer verein Hütte

DES

INGENIEURS TASCHENBUCH.

HERAUSGEGEBEN VOM AKADEMISCHEN VEREIN

„HÜTTE."

FÜNFZEHNTE,

VÖLLIG UMGEARBEITETE AUFLAGE.

MIT ÜBER 1000 IN DEN SATZ EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN
UND 1 TAFEL.

ABTEILUNG I.

BERLIN 1892.

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.

VORM. ERNST & KORN.

INHALTSVERZEICHNIS

der ersten Abteilung.

ERSTER ABSCHNITT.

Mathematik.

I. Tafeln.

II. Arithmetik.

III. Goniometrie und Trigonometrie.

IV. Hyperbelfunktionen

V. Differential- und Integralrechnung.

VI. Analytische Geometrie.

DRITTER ABSCHNITT.

Wärme.

VIERTER ABSCHNITT.

Festigkeitslehre.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Maschinenteile.

III. Lastseile, Riemen, Gurte und Ketten nebst Trommeln und Rollen.

IV. Sperr- und Bremswerke.

V. Maschinenteile zur Aufnahme und zur Fortleitung von Flüssigkeiten.

VI. Kolben, Kolbenstangen und Stopfbüchsen.

VII. Kurbeltrieb.

VIII. Regelnde Maschinenteile

SECHSTER ABSCHNITT.

Arbeitsmaschinen.

I. Werkzeugmaschinen.

II. Lasthebemaschinen.

III. Wasserdruckhebemaschinen.

IV. Fördermaschinen.

V. Hebewerke für flüssige Körper.

VI. Gebläse und Kompressoren.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Kraftmaschinen.

II. Wassermotoren.

III. Dampfmaschinen.

IV. Dampfkessel.

Berichtigungen zu Abteilung I.

S. 28 Sp. 10, Z. 8 v. u., für Centriwinkel 90° setze: 0,28540 statt 0,28854.
S. 30 Sp. 2, Z. 17 v. o. setze: 0,0981748 statt 0,9817477.
S. 32 Z. 8 v. u. schalte ein: (für gebrochene und negative Werte nur dann, wenn $a > b$).
S. 40 Fufsnote setze: 1892 statt 9. 1891.
S. 80 Z. 1 v. u. setze: $B_7 = \frac{1}{2.3.5} = \frac{1}{30}$ statt $B_7 = \frac{1}{2.3.9} = \frac{1}{54}$.
S. 83 Z. 12, 16, 19, 23, 24 setze überall: setze statt setzte, eliminiere statt eliminierte, versuche statt versuchte.
S. 128 Z. 17 v. o. Sp. 4 setze: 7,6449 statt 7,6876.
S. 128 Z. 18 v. o. Sp. 2 setze: 325,6875 statt 325,6923.
S. 128 Z. 22 v. o. Sp. 2 setze: d statt R.
S. 128 Abbild. 32 ergänze das fehlende Mafs r.
S. 176 Z. 18 v. u. setze: 1 mkg = 6,3724 preufs. Fufspfd. = 7,2330 engl. Fufspfd. = 5,6488 österreich. Fufspfd.
S. 230 Z. 10 v. u. setze: G den wagerechten Querschnitt der Kammer.
S. 232 Z. 8 v. o. setze: $\frac{\lambda}{4} \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda}{4} \frac{1}{R} \frac{v^2}{2g}$ statt $\frac{\lambda}{4} \frac{u}{F} l \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda}{4} R \frac{v^2}{2g}$.
S. 232 Z. 9 v. o. setze: $\frac{F}{u}$ statt $\frac{u}{F}$.
S. 233 Z. 11 v. u. setze: $0{,}3018 \sqrt[5]{Q^2 : J}$ statt $0{,}3018 \sqrt[5]{J Q^2}$.
S. 238 Z. 1 v. o. setze: F_1 statt F_2.
S. 238 Z. 8 v. o. setze: 1,000 statt 1,080.
S. 238 Fufsnote streiche: „Ueber neuere Versuche u. s. w.“.
S. 273 Z. 9 und 12 v. o. setze: c. statt b.
S. 273 Z. 23 v. o. setze: in der Formel G_s^2 statt G_s.
S. 275 Z. 1 v. o. setze: 10^{10}. 4000 statt 4000.
S. 275 Z. 3 v. o. setze: 10^{10}. 3766 statt 3766.
S. 307 Sp. 4 füge hinzu für: Blei weich $K_z = 125$, hart 300 (statt 130).
S. 310 Z. 13 und 14 v. o. Sp. 1 streiche: und Tannen.
S. 324 Nr. 27 setze: $J = \frac{1}{12} [b (h^3 - h_1^3) + b_1 (h_1^3 - h_2^3) + b_2 (h_2^3 - h_3^3) + \delta h_3^3]$.
S. 328 Tafel Sp. 3 für $h = 2$, $b = 1$ setze: $J_{\min} = 0{,}1667$ statt 0,1778.
S. 346 Z. 8 v. o. Sp. 6 setze: 1,1346 statt 1,1327.
S. 358 Z. 14 v. o. setze: W und W_1 sind die Widerstandsmomente des Querschnittes für die . . . .
S. 366 Z. 15 v. o. in der Grashofschen Formel vertausche r und r_0.
S. 401 Z. 7 v. o. setze: $k = 4$ für $n = 256$ (statt $k = 6$).
S. 401 Z. 8 v. o. setze: $b \gtreqless \frac{42}{k} t$ statt $b \geq \frac{42}{k} t$.
S. 414 Z. 10 v. o. setze: $\frac{(r_1 + r_2) e \pi + (r_1 - r_2)^2}{(\varphi - 1)^2}$ statt $(r_1 + r_2) e \pi + (r_1 - r_2)^2$.
S. 465 Abbild. 318. Winkel γ ist der spitze Winkel der beiden vom Berührungspunkt des Klemmdaumens gezogenen Halbmesser.
S. 472 Z. 6 v. u. Die Formel $L = D + 100$ gilt auch für Abbild. 336.
S. 582 Abbild. 483 setze: von dem Steuerkasten statt: vor dem Steuerkasten.

ERSTER ABSCHNITT.

MATHEMATIK.

I. TAFELN.

(Die Anmerkungen hierzu auf S. 31 sind zu beachten.)

A. Tafel der Potenzen, Wurzeln, Briggischen Logarithmen, reciproken Werte, Kreisumfänge und Kreisinhalte.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398	10
11	121	1331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332	11
12	144	1728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097	12
13	169	2197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732	13
14	196	2744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938	14
15	225	3375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715	15
16	256	4096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062	16
17	289	4913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980	17
18	324	5832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,469	18
19	361	6859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,529	19
20	400	8000	4,4721	2,7144	1,30103	50,0000	62,832	314,159	20
21	441	9261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361	21
22	484	10648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133	22
23	529	12167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476	23
24	576	13824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389	24
25	625	15625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874	25
26	676	17576	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,681	530,929	26
27	729	19683	5,1962	3,0000	1,43136	37,0370	84,823	572,555	27
28	784	21952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752	28
29	841	24389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,106	660,520	29
30	900	27000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858	30
31	961	29791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768	31
32	1024	32768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248	32
33	1089	35937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299	33
34	1156	39304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920	34
35	1225	42875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113	35
36	1296	46656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88	36
37	1369	50653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21	37
38	1444	54872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11	38
39	1521	59319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59	39
40	1600	64000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64	40
41	1681	68921	6,4031	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25	41
42	1764	74088	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44	42
43	1849	79507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20	43
44	1936	85184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53	44
45	2025	91125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43	45
46	2116	97336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90	46
47	2209	103823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94	47
48	2304	110592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,56	48
49	2401	117649	7,0000	3,6593	1,69020	20,4082	153,94	1885,74	49
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50
51	2601	132651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	2042,82
52	2704	140608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	2123,72
53	2809	148877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	2206,18
54	2916	157464	7,3485	3,7798	1,73239	18,5185	169,65	2290,22
55	3025	166375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	2375,83
56	3136	175616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	2463,01
57	3249	185193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	2551,76
58	3364	195112	7,6158	3,8709	1,76343	17,2414	182,21	2642,08
59	3481	205379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	2733,97
60	3600	216000	7,7460	3,9149	1,77815	16,6667	188,50	2827,43
61	3721	226981	7,8102	3,9365	1,78533	16,3934	191,64	2922,47
62	3844	238328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	3019,07
63	3969	250047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	3117,25
64	4096	262144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	3216,99
65	4225	274625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	3318,31
66	4356	287496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	3421,19
67	4489	300763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	3525,65
68	4624	314432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	3631,68
69	4761	328509	8,3066	4,1016	1,83885	14,4928	216,77	3739,28
70	4900	343000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	3848,45
71	5041	357911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	3959,19
72	5184	373248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	4071,50
73	5329	389017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	4185,39
74	5476	405224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	4300,84
75	5625	421875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	4417,86
76	5776	438976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	4536,46
77	5929	456533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	4656,63
78	6084	474552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	4778,36
79	6241	493039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	4901,67
80	6400	512000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	5026,55
81	6561	531441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	5153,00
82	6724	551368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	5281,02
83	6889	571787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	5410,61
84	7056	592704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	5541,77
85	7225	614125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	5674,50
86	7396	636056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	5808,80
87	7569	658503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	5944,68
88	7744	681472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3636	276,46	6082,12
89	7921	704969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	6221,14
90	8100	729000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	6361,73
91	8281	753571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	6503,88
92	8464	778688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	6647,61
93	8649	804357	9,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	6792,91
94	8836	830584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6383	295,31	6939,78
95	9025	857375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	7088,22
96	9216	884736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	7238,23
97	9409	912673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	7389,81
98	9604	941192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	7542,96
99	9801	970299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	7697,69
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	100
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	2,00432	9,90099	317,30	8011,85	101
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	2,00860	9,80392	320,44	8171,28	102
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	2,01284	9,70874	323,58	8332,29	103
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	2,01703	9,61538	326,73	8494,87	104
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	2,02119	9,52381	329,87	8659,01	105
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	2,02531	9,43396	333,01	8824,73	106
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	2,02938	9,34579	336,15	8992,02	107
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	2,03342	9,25926	339,29	9160,88	108
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	2,03743	9,17431	342,43	9331,32	109
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	2,04139	9,09091	345,58	9503,32	110
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	2,04532	9,00901	348,72	9676,89	111
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	2,04922	8,92857	351,86	9852,03	112
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	2,05308	8,84956	355,00	10028,7	113
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	2,05690	8,77193	358,14	10207,0	114
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	2,06070	8,69565	361,28	10386,9	115
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	2,06446	8,62069	364,42	10568,3	116
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	2,06819	8,54701	367,57	10751,3	117
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	2,07188	8,47458	370,71	10935,9	118
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	2,07555	8,40336	373,85	11122,0	119
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	2,07918	8,33333	376,99	11309,7	120
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	2,08279	8,26446	380,13	11499,0	121
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	2,08636	8,19672	383,27	11689,9	122
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	2,08991	8,13008	386,42	11882,3	123
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	2,09342	8,06452	389,56	12076,3	124
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	2,09691	8,00000	392,70	12271,8	125
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	2,10037	7,93651	395,84	12469,0	126
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	2,10380	7,87402	398,98	12667,7	127
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	2,10721	7,81250	402,12	12868,0	128
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	2,11059	7,75194	405,27	13069,8	129
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	2,11394	7,69231	408,41	13273,2	130
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	2,11727	7,63359	411,55	13478,2	131
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	2,12057	7,57576	414,69	13684,8	132
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	2,12385	7,51880	417,83	13892,9	133
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	2,12710	7,46269	420,97	14102,6	134
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	2,13033	7,40741	424,12	14313,9	135
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	2,13354	7,35294	427,26	14526,7	136
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	2,13672	7,29927	430,40	14741,1	137
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	2,13988	7,24638	433,54	14957,1	138
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	2,14301	7,19424	436,68	15174,7	139
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	2,14613	7,14286	439,82	15393,8	140
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	2,14922	7,09220	442,96	15614,5	141
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	2,15229	7,04225	446,11	15836,8	142
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	2,15534	6,99301	449,25	16060,6	143
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	2,15836	6,94444	452,39	16286,0	144
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	2,16137	6,89655	455,53	16513,0	145
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	2,16435	6,84932	458,67	16741,5	146
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	2,16732	6,80272	461,81	16971,7	147
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	2,17026	6,75676	464,96	17203,4	148
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	2,17319	6,71141	468,10	17436,6	149
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5	150

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5	150
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	2,17898	6,62252	474,38	17907,9	151
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	2,18184	6,57895	477,52	18145,8	152
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	2,18469	6,53595	480,66	18385,4	153
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	2,18752	6,49351	483,81	18626,5	154
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	2,19033	6,45161	486,95	18869,2	155
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	2,19312	6,41026	490,09	19113,4	156
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	2,19590	6,36943	493,23	19359,3	157
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	2,19866	6,32911	496,37	19606,7	158
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	2,20140	6,28931	499,51	19855,7	159
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	2,20412	6,25000	502,65	20106,2	160
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	2,20683	6,21118	505,80	20358,3	161
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	2,20952	6,17284	508,94	20612,0	162
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	2,21219	6,13497	512,08	20867,2	163
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	2,21484	6,09756	515,22	21124,1	164
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	2,21748	6,06061	518,36	21382,5	165
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	2,22011	6,02410	521,50	21642,4	166
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	2,22272	5,98802	524,65	21904,0	167
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	2,22531	5,95238	527,79	22167,1	168
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	2,22789	5,91716	530,93	22431,8	169
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	2,23045	5,88235	534,07	22698,0	170
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	2,23300	5,84795	537,21	22965,8	171
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	2,23553	5,81395	540,35	23235,2	172
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	2,23805	5,78035	543,50	23506,2	173
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	2,24055	5,74713	546,64	23778,7	174
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	2,24304	5,71429	549,78	24052,8	175
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	2,24551	5,68182	552,92	24328,5	176
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	2,24797	5,64972	556,06	24605,7	177
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	2,25042	5,61798	559,20	24884,6	178
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	2,25285	5,58659	562,35	25164,9	179
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	2,25527	5,55556	565,49	25446,9	180
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	2,25768	5,52486	568,63	25730,4	181
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	2,26007	5,49451	571,77	26015,5	182
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	2,26245	5,46448	574,91	26302,2	183
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	2,26482	5,43478	578,05	26590,4	184
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	2,26717	5,40541	581,19	26880,3	185
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	2,26951	5,37634	584,34	27171,6	186
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	2,27184	5,34759	587,48	27464,6	187
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	2,27416	5,31915	590,62	27759,1	188
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	2,27646	5,29101	593,76	28055,2	189
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	2,27875	5,26316	596,90	28352,9	190
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	2,28103	5,23560	600,04	28652,1	191
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	2,28330	5,20833	603,19	28952,9	192
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	2,28556	5,18135	606,33	29255,3	193
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	2,28780	5,15464	609,47	29559,2	194
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	2,29003	5,12821	612,61	29864,8	195
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	2,29226	5,10204	615,75	30171,9	196
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	2,29447	5,07614	618,89	30480,5	197
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	2,29667	5,05051	622,04	30790,7	198
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	2,29885	5,02513	625,18	31102,6	199
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9	200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9	200
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	2,30320	4,97512	631,46	31730,9	201
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	2,30535	4,95050	634,60	32047,4	202
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	2,30750	4,92611	637,74	32365,5	203
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	2,30963	4,90196	640,89	32685,1	204
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	2,31175	4,87805	644,03	33006,4	205
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	2,31387	4,85437	647,17	33329,2	206
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	2,31597	4,83092	650,31	33653,5	207
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	2,31806	4,80769	653,45	33979,5	208
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	2,32015	4,78469	656,59	34307,0	209
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	2,32222	4,76190	659,73	34636,1	210
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	2,32428	4,73934	662,88	34966,7	211
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	2,32634	4,71698	666,02	35298,9	212
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	2,32838	4,69484	669,16	35632,7	213
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	2,33041	4,67290	672,30	35968,1	214
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	2,33244	4,65116	675,44	36305,0	215
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	2,33445	4,62963	678,58	36643,5	216
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	2,33646	4,60829	681,73	36983,6	217
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	2,33846	4,58716	684,87	37325,3	218
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	2,34044	4,56621	688,01	37668,5	219
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	2,34242	4,54545	691,15	38013,3	220
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	2,34439	4,52489	694,29	38359,6	221
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	2,34635	4,50450	697,43	38707,6	222
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	2,34830	4,48431	700,58	39057,1	223
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	2,35025	4,46429	703,72	39408,1	224
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	2,35218	4,44444	706,86	39760,8	225
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	2,35411	4,42478	710,00	40115,0	226
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	2,35603	4,40529	713,14	40470,8	227
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	2,35793	4,38596	716,28	40828,1	228
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	2,35984	4,36681	719,42	41187,1	229
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	2,36173	4,34783	722,57	41547,6	230
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	2,36361	4,32900	725,71	41909,6	231
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	2,36549	4,31034	728,85	42273,3	232
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	2,36736	4,29185	731,99	42638,5	233
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	2,36922	4,27350	735,13	43005,3	234
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	2,37107	4,25532	738,27	43373,6	235
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	2,37291	4,23729	741,42	43743,5	236
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	2,37475	4,21941	744,56	44115,0	237
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	2,37658	4,20168	747,70	44488,1	238
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	2,37840	4,18410	750,84	44862,7	239
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	2,38021	4,16667	753,98	45238,9	240
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	2,38202	4,14938	757,12	45616,7	241
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	2,38382	4,13223	760,27	45996,1	242
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	2,38561	4,11523	763,41	46377,0	243
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	2,38739	4,09836	766,55	46759,5	244
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	2,38917	4,08163	769,69	47143,5	245
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	2,39094	4,06504	772,83	47529,2	246
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	2,39270	4,04858	775,97	47916,4	247
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	2,39445	4,03226	779,12	48305,1	248
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	2,39620	4,01606	782,26	48695,5	249
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49087,4	250

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49087,4	250
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	2,39967	3,98406	788,54	49480,9	251
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	2,40140	3,96825	791,68	49875,9	252
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	2,40312	3,95257	794,82	50272,6	253
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	2,40483	3,93701	797,96	50670,7	254
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	2,40654	3,92157	801,11	51070,5	255
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	2,40824	3,90625	804,25	51471,9	256
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	2,40993	3,89105	807,39	51874,8	257
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	2,41162	3,87597	810,53	52279,2	258
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	2,41330	3,86100	813,67	52685,3	259
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	2,41497	3,84615	816,81	53092,9	260
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	2,41664	3,83142	819,96	53502,1	261
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	2,41830	3,81679	823,10	53912,9	262
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	2,41996	3,80228	826,24	54325,2	263
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	2,42160	3,78788	829,38	54739,1	264
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	2,42325	3,77358	832,52	55154,6	265
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	2,42488	3,75940	835,66	55571,6	266
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	2,42651	3,74532	838,81	55990,3	267
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	2,42813	3,73134	841,95	56410,4	268
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	2,42975	3,71747	845,09	56832,2	269
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	2,43136	3,70370	848,23	57255,5	270
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	2,43297	3,69004	851,37	57680,4	271
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	2,43457	3,67647	854,51	58106,9	272
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	2,43616	3,66300	857,66	58534,9	273
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	2,43775	3,64964	860,80	58964,6	274
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	2,43933	3,63636	863,94	59395,7	275
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	2,44091	3,62319	867,08	59828,5	276
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	2,44248	3,61011	870,22	60262,8	277
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	2,44404	3,59712	873,36	60698,7	278
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	2,44560	3,58423	876,50	61136,2	279
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	2,44716	3,57143	879,65	61575,2	280
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	2,44871	3,55872	882,79	62015,8	281
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	2,45025	3,54610	885,93	62458,0	282
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	2,45179	3,53357	889,07	62901,8	283
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	2,45332	3,52113	892,21	63347,1	284
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	2,45484	3,50877	895,35	63794,0	285
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	2,45637	3,49650	898,50	64242,4	286
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	2,45788	3,48432	901,64	64692,5	287
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	2,45939	3,47222	904,78	65144,1	288
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	2,46090	3,46021	907,92	65597,2	289
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	2,46240	3,44828	911,06	66052,0	290
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	2,46389	3,43643	914,20	66508,3	291
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	2,46538	3,42466	917,35	66966,2	292
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	2,46687	3,41297	920,49	67425,6	293
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	2,46835	3,40136	923,63	67886,7	294
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	2,46982	3,38983	926,77	68349,3	295
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	2,47129	3,37838	929,91	68813,5	296
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	2,47276	3,36700	933,05	69279,2	297
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	2,47422	3,35570	936,19	69746,5	298
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	2,47567	3,34448	939,34	70215,4	299
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8	300

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8	300
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	2,47857	3,32226	945,62	71157,9	301
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	2,48001	3,31126	948,76	71631,5	302
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	2,48144	3,30033	951,90	72106,6	303
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	2,48287	3,28947	955,04	72583,4	304
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	2,48430	3,27869	958,19	73061,7	305
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	2,48572	3,26797	961,33	73541,5	306
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	2,48714	3,25733	964,47	74023,0	307
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	2,48855	3,24675	967,61	74506,0	308
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	2,48996	3,23625	970,75	74990,6	309
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	2,49136	3,22581	973,89	75476,8	310
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	2,49276	3,21543	977,04	75964,5	311
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	2,49415	3,20513	980,18	76453,8	312
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	2,49554	3,19489	983,32	76944,7	313
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	2,49693	3,18471	986,46	77437,1	314
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	2,49831	3,17460	989,60	77931,1	315
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	2,49969	3,16456	992,74	78426,7	316
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	2,50106	3,15457	995,88	78923,9	317
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	2,50243	3,14465	999,03	79422,6	318
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	2,50379	3,13480	1002,2	79922,9	319
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	2,50515	3,12500	1005,3	80424,8	320
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	2,50651	3,11527	1008,5	80928,2	321
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	2,50786	3,10559	1011,6	81433,2	322
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	2,50920	3,09598	1014,7	81939,8	323
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	2,51055	3,08642	1017,9	82448,0	324
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	2,51188	3,07692	1021,0	82957,7	325
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	2,51322	3,06749	1024,2	83469,0	326
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	2,51455	3,05810	1027,3	83981,8	327
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	2,51587	3,04878	1030,4	84496,3	328
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	2,51720	3,03951	1033,6	85012,3	329
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	2,51851	3,03030	1036,7	85529,9	330
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	2,51983	3,02115	1039,9	86049,0	331
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	2,52114	3,01205	1043,0	86569,7	332
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	2,52244	3,00300	1046,2	87092,0	333
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	2,52375	2,99401	1049,3	87615,9	334
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	2,52504	2,98507	1052,4	88141,3	335
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	2,52634	2,97619	1055,6	88668,3	336
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	2,52763	2,96736	1058,7	89196,9	337
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	2,52892	2,95858	1061,9	89727,0	338
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	2,53020	2,94985	1065,0	90258,7	339
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	2,53148	2,94118	1068,1	90792,0	340
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	2,53275	2,93255	1071,3	91326,9	341
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	2,53403	2,92398	1074,4	91863,3	342
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	2,53529	2,91545	1077,6	92401,3	343
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	2,53656	2,90698	1080,7	92940,9	344
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	2,53782	2,89855	1083,8	93482,0	345
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	2,53908	2,89017	1087,0	94024,7	346
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	2,54033	2,88184	1090,1	94569,0	347
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	2,54158	2,87356	1093,3	95114,9	348
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	2,54283	2,86533	1096,4	95662,3	349
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3	350

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3	350
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	2,54531	2,84900	1102,7	96761,8	351
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	2,54654	2,84091	1105,8	97314,0	352
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	2,54777	2,83286	1109,0	97867,7	353
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	2,54900	2,82486	1112,1	98423,0	354
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	2,55023	2,81690	1115,3	98979,8	355
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	2,55145	2,80899	1118,4	99538,2	356
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	2,55267	2,80112	1121,5	100098	357
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	2,55388	2,79330	1124,7	100660	358
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	2,55509	2,78552	1127,8	101223	359
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	2,55630	2,77778	1131,0	101788	360
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	2,55751	2,77008	1134,1	102354	361
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	2,55871	2,76243	1137,3	102922	362
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	2,55991	2,75482	1140,4	103491	363
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	2,56110	2,74725	1143,5	104062	364
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	2,56229	2,73973	1146,7	104635	365
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	2,56348	2,73224	1149,8	105209	366
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	2,56467	2,72480	1153,0	105785	367
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	2,56585	2,71739	1156,1	106362	368
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	2,56703	2,71003	1159,2	106941	369
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	2,56820	2,70270	1162,4	107521	370
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	2,56937	2,69542	1165,5	108103	371
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	2,57054	2,68817	1168,7	108687	372
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	2,57171	2,68097	1171,8	109272	373
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	2,57287	2,67380	1175,0	109858	374
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	2,57403	2,66667	1178,1	110447	375
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	2,57519	2,65957	1181,2	111036	376
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	2,57634	2,65252	1184,4	111628	377
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	2,57749	2,64550	1187,5	112221	378
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	2,57864	2,63852	1190,7	112815	379
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	2,57978	2,63158	1193,8	113411	380
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	2,58093	2,62467	1196,9	114009	381
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	2,58206	2,61780	1200,1	114608	382
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	2,58320	2,61097	1203,2	115209	383
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	2,58433	2,60417	1206,4	115812	384
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	2,58546	2,59740	1209,5	116416	385
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	2,58659	2,59067	1212,7	117021	386
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	2,58771	2,58398	1215,8	117628	387
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	2,58883	2,57732	1218,9	118237	388
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	2,58995	2,57069	1222,1	118847	389
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	2,59106	2,56410	1225,2	119459	390
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	2,59218	2,55755	1228,4	120072	391
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	2,59329	2,55102	1231,5	120687	392
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	2,59439	2,54453	1234,6	121304	393
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	2,59550	2,53807	1237,8	121922	394
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	2,59660	2,53165	1240,9	122542	395
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	2,59770	2,52525	1244,1	123163	396
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	2,59879	2,51889	1247,2	123786	397
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	2,59988	2,51256	1250,4	124410	398
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	2,60097	2,50627	1253,5	125036	399
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664	400

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664	**400**
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	2,60314	2,49377	1259,8	126293	401
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	2,60423	2,48756	1262,9	126923	402
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	2,60531	2,48139	1266,1	127556	403
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	2,60638	2,47525	1269,2	128190	404
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	2,60746	2,46914	1272,3	128825	405
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	2,60853	2,46305	1275,5	129462	406
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	2,60959	2,45700	1278,6	130100	407
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	2,61066	2,45098	1281,8	130741	408
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	2,61172	2,44499	1284,9	131382	409
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	2,61278	2,43902	1288,1	132025	**410**
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	2,61384	2,43309	1291,2	132670	411
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	2,61490	2,42718	1294,3	133317	412
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	2,61595	2,42131	1297,5	133965	413
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	2,61700	2,41546	1300,6	134614	414
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	2,61805	2,40964	1303,8	135265	415
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	2,61909	2,40385	1306,9	135918	416
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	2,62014	2,39808	1310,0	136572	417
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	2,62118	2,39234	1313,2	137228	418
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	2,62221	2,38664	1316,3	137885	419
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	2,62325	2,38095	1319,5	138544	**420**
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	2,62428	2,37530	1322,6	139205	421
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	2,62531	2,36967	1325,8	139867	422
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	2,62634	2,36407	1328,9	140531	423
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	2,62737	2,35849	1332,0	141196	424
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	2,62839	2,35294	1335,2	141863	425
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	2,62941	2,34742	1338,3	142531	426
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	2,63043	2,34192	1341,5	143201	427
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	2,63144	2,33645	1344,6	143872	428
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	2,63246	2,33100	1347,7	144545	429
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	2,63347	2,32558	1350,9	145220	**430**
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	2,63448	2,32019	1354,0	145896	431
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	2,63548	2,31482	1357,2	146574	432
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	2,63649	2,30947	1360,3	147254	433
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	2,63749	2,30415	1363,5	147934	434
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	2,63849	2,29885	1366,6	148617	435
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	2,63949	2,29358	1369,7	149301	436
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	2,64048	2,28833	1372,9	149987	437
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	2,64147	2,28311	1376,0	150674	438
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	2,64246	2,27790	1379,2	151363	439
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	2,64345	2,27273	1382,3	152053	**440**
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	2,64444	2,26757	1385,4	152745	441
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	2,64542	2,26244	1388,6	153439	442
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	2,64640	2,25734	1391,7	154134	443
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	2,64738	2,25225	1394,9	154830	444
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	2,64836	2,24719	1398,0	155528	445
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	2,64933	2,24215	1401,2	156228	446
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	2,65031	2,23714	1404,3	156930	447
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	2,65128	2,23214	1407,4	157633	448
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	2,65225	2,22717	1410,6	158337	449
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043	**450**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043	**450**
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	2,65418	2,21730	1416,9	159751	451
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	2,65514	2,21239	1420,0	160460	452
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	2,65610	2,20751	1423,1	161171	453
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	2,65706	2,20264	1426,3	161883	454
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	2,65801	2,19780	1429,4	162597	455
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	2,65896	2,19298	1432,6	163313	456
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	2,65992	2,18818	1435,7	164030	457
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	2,66087	2,18341	1438,9	164748	458
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	2,66181	2,17865	1442,0	165468	459
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	2,66276	2,17391	1445,1	166190	**460**
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	2,66370	2,16920	1448,3	166914	461
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	2,66464	2,16450	1451,4	167639	462
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	2,66558	2,15983	1454,6	168365	463
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	2,66652	2,15517	1457,7	169093	464
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	2,66745	2,15054	1460,8	169823	465
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	2,66839	2,14592	1464,0	170554	466
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	2,66932	2,14133	1467,1	171287	467
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	2,67025	2,13675	1470,3	172021	468
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	2,67117	2,13220	1473,4	172757	469
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	2,67210	2,12766	1476,5	173494	**470**
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	2,67302	2,12314	1479,7	174234	471
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	2,67394	2,11864	1482,8	174974	472
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	2,67486	2,11417	1486,0	175716	473
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	2,67578	2,10971	1489,1	176460	474
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	2,67669	2,10526	1492,3	177205	475
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	2,67761	2,10084	1495,4	177952	476
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	2,67852	2,09644	1498,5	178701	477
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	2,67943	2,09205	1501,7	179451	478
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	2,68034	2,08768	1504,8	180203	479
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	2,68124	2,08333	1508,0	180956	**480**
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	2,68215	2,07900	1511,1	181711	481
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	2,68305	2,07469	1514,3	182467	482
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	2,68395	2,07039	1517,4	183225	483
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	2,68485	2,06612	1520,5	183984	484
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	2,68574	2,06186	1523,7	184745	485
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	2,68664	2,05761	1526,8	185508	486
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	2,68753	2,05339	1530,0	186272	487
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	2,68842	2,04918	1533,1	187038	488
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	2,68931	2,04499	1536,2	187805	489
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	2,69020	2,04082	1539,4	188574	**490**
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	2,69108	2,03666	1542,5	189345	491
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	2,69197	2,03252	1545,7	190117	492
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	2,69285	2,02840	1548,8	190890	493
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	2,69373	2,02429	1551,9	191665	494
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	2,69461	2,02020	1555,1	192442	495
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	2,69548	2,01613	1558,2	193221	496
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	2,69636	2,01207	1561,4	194000	497
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	2,69723	2,00803	1564,5	194782	498
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	2,69810	2,00401	1567,7	195565	499
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350	**500**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350	500
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	2,69984	1,99601	1573,9	197136	501
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	2,70070	1,99203	1577,1	197923	502
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	2,70157	1,98807	1580,2	198713	503
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	2,70243	1,98413	1583,4	199504	504
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	2,70329	1,98020	1586,5	200296	505
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	2,70415	1,97629	1589,7	201090	506
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	2,70501	1,97239	1592,8	201886	507
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	2,70586	1,96850	1595,9	202683	508
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	2,70672	1,96464	1599,1	203482	509
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	2,70757	1,96078	1602,2	204282	510
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	2,70842	1,95695	1605,4	205084	511
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	2,70927	1,95312	1608,5	205887	512
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	2,71012	1,94932	1611,6	206692	513
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	2,71096	1,94553	1614,8	207499	514
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	2,71181	1,94175	1617,9	208307	515
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	2,71265	1,93798	1621,1	209117	516
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	2,71349	1,93424	1624,2	209928	517
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	2,71433	1,93050	1627,3	210741	518
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	2,71517	1,92678	1630,5	211556	519
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	2,71600	1,92308	1633,6	212372	520
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	2,71684	1,91939	1636,8	213189	521
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	2,71767	1,91571	1639,9	214008	522
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	2,71850	1,91205	1643,1	214829	523
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	2,71933	1,90840	1646,2	215651	524
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	2,72016	1,90476	1649,3	216475	525
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	2,72099	1,90114	1652,5	217301	526
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	2,72181	1,89753	1655,6	218128	527
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	2,72263	1,89394	1658,8	218956	528
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	2,72346	1,89036	1661,9	219787	529
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	2,72428	1,88679	1665,0	220618	530
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	2,72509	1,88324	1668,2	221452	531
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	2,72591	1,87970	1671,3	222287	532
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	2,72673	1,87617	1674,5	223123	533
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	2,72754	1,87266	1677,6	223961	534
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	2,72835	1,86916	1680,8	224801	535
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	2,72916	1,86567	1683,9	225642	536
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	2,72997	1,86220	1687,0	226484	537
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	2,73078	1,85874	1690,2	227329	538
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	2,73159	1,85529	1693,3	228175	539
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	2,73239	1,85185	1696,5	229022	540
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	2,73320	1,84843	1699,6	229871	541
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	2,73400	1,84502	1702,7	230722	542
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	2,73480	1,84162	1705,9	231574	543
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	2,73560	1,83824	1709,0	232428	544
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	2,73640	1,83486	1712,2	233283	545
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	2,73719	1,83150	1715,3	234140	546
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	2,73799	1,82815	1718,5	234998	547
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	2,73878	1,82482	1721,6	235858	548
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	2,73957	1,82149	1724,7	236720	549
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583	550

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583	550
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	2,74115	1,81488	1731,0	238448	551
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	2,74194	1,81159	1734,2	239314	552
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	2,74273	1,80832	1737,3	240182	553
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	2,74351	1,80505	1740,4	241051	554
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	2,74429	1,80180	1743,6	241922	555
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	2,74507	1,79856	1746,7	242795	556
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	2,74586	1,79533	1749,9	243669	557
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	2,74663	1,79211	1753,0	244545	558
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	2,74741	1,78891	1756,2	245422	559
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	2,74819	1,78571	1759,3	246301	560
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	2,74896	1,78253	1762,4	247181	561
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	2,74974	1,77936	1765,6	248063	562
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	2,75051	1,77620	1768,7	248947	563
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	2,75128	1,77305	1771,9	249832	564
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	2,75205	1,76991	1775,0	250719	565
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	2,75282	1,76678	1778,1	251607	566
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	2,75358	1,76367	1781,3	252497	567
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	2,75435	1,76056	1784,4	253388	568
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	2,75511	1,75747	1787,6	254281	569
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	2,75587	1,75439	1790,7	255176	570
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	2,75664	1,75131	1793,9	256072	571
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	2,75740	1,74825	1797,0	256970	572
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	2,75815	1,74520	1800,1	257869	573
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	2,75891	1,74216	1803,3	258770	574
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	2,75967	1,73913	1806,4	259672	575
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	2,76042	1,73611	1809,6	260576	576
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	2,76118	1,73310	1812,7	261482	577
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	2,76193	1,73010	1815,8	262389	578
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	2,76268	1,72712	1819,0	263298	579
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	2,76343	1,72414	1822,1	264208	580
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	2,76418	1,72117	1825,3	265120	581
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	2,76492	1,71821	1828,4	266033	582
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	2,76567	1,71527	1831,6	266948	583
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	2,76641	1,71233	1834,7	267865	584
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	2,76716	1,70940	1837,8	268783	585
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	2,76790	1,70649	1841,0	269701	586
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	2,76864	1,70358	1844,1	270624	587
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	2,76938	1,70068	1847,3	271547	588
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	2,77012	1,69779	1850,4	272471	589
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	2,77085	1,69492	1853,5	273397	590
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	2,77159	1,69205	1856,7	274325	591
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	2,77232	1,68919	1859,8	275254	592
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	2,77305	1,68634	1863,0	276184	593
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	2,77379	1,68350	1866,1	277117	594
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	2,77452	1,68067	1869,3	278051	595
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	2,77525	1,67785	1872,4	278986	596
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	2,77597	1,67504	1875,5	279923	597
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	2,77670	1,67224	1878,7	280862	598
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	2,77743	1,66945	1881,8	281802	599
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282743	600

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282743	600
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	2,77887	1,66389	1888,1	283687	601
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	2,77960	1,66113	1891,2	284631	602
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	2,78032	1,65837	1894,4	285578	603
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	2,78104	1,65563	1897,5	286526	604
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	2,78176	1,65289	1900,7	287475	605
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	2,78247	1,65017	1903,8	288426	606
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	2,78319	1,64745	1907,0	289379	607
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	2,78390	1,64474	1910,1	290333	608
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	2,78462	1,64204	1913,2	291289	609
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	2,78533	1,63934	1916,4	292247	610
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	2,78604	1,63666	1919,5	293206	611
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	2,78675	1,63399	1922,7	294166	612
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	2,78746	1,63132	1925,8	295128	613
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	2,78817	1,62866	1928,9	296092	614
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	2,78888	1,62602	1932,1	297057	615
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	2,78958	1,62338	1935,2	298024	616
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	2,79029	1,62075	1938,4	298992	617
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	2,79099	1,61812	1941,5	299962	618
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	2,79169	1,61551	1944,7	300934	619
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	2,79239	1,61290	1947,8	301907	620
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	2,79309	1,61031	1950,9	302882	621
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	2,79379	1,60772	1954,1	303858	622
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	2,79449	1,60514	1957,2	304836	623
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	2,79518	1,60256	1960,4	305815	624
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	2,79588	1,60000	1963,5	306796	625
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	2,79657	1,59744	1966,6	307779	626
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	2,79727	1,59490	1969,8	308763	627
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	2,79796	1,59236	1972,9	309748	628
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	2,79865	1,58983	1976,1	310736	629
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	2,79934	1,58730	1979,2	311725	630
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	2,80003	1,58479	1982,4	312715	631
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	2,80072	1,58228	1985,5	313707	632
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	2,80140	1,57978	1988,6	314700	633
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	2,80209	1,57729	1991,8	315696	634
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	2,80277	1,57480	1994,9	316692	635
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	2,80346	1,57233	1998,1	317690	636
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	2,80414	1,56986	2001,2	318690	637
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	2,80482	1,56740	2004,3	319692	638
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	2,80550	1,56495	2007,5	320695	639
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	2,80618	1,56250	2010,6	321699	640
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	2,80686	1,56006	2013,8	322705	641
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	2,80754	1,55763	2016,9	323713	642
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	2,80821	1,55521	2020,0	324722	643
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	2,80889	1,55280	2023,2	325733	644
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	2,80956	1,55039	2026,3	326745	645
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	2,81023	1,54799	2029,5	327759	646
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	2,81090	1,54560	2032,6	328775	647
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	2,81158	1,54321	2035,8	329792	648
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	2,81224	1,54083	2038,9	330810	649
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831	650

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831	**650**
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	2,81358	1,53610	2045,2	332853	651
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	2,81425	1,53374	2048,3	333876	652
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	2,81491	1,53139	2051,5	334901	653
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	2,81558	1,52905	2054,6	335927	654
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	2,81624	1,52672	2057,7	336955	655
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	2,81690	1,52439	2060,9	337985	656
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	2,81757	1,52207	2064,0	339016	657
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	2,81823	1,51976	2067,2	340049	658
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	2,81889	1,51745	2070,3	341084	659
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	2,81954	1,51515	2073,5	342119	**660**
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	2,82020	1,51286	2076,6	343157	661
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	2,82086	1,51057	2079,7	344196	662
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	2,82151	1,50830	2082,9	345237	663
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	2,82217	1,50602	2086,0	346279	664
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	2,82282	1,50376	2089,2	347323	665
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	2,82347	1,50150	2092,3	348368	666
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	2,82413	1,49925	2095,4	349415	667
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	2,82478	1,49701	2098,6	350464	668
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	2,82543	1,49477	2101,7	351514	669
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	2,82607	1,49254	2104,9	352565	**670**
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	2,82672	1,49031	2108,0	353618	671
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	2,82737	1,48810	2111,2	354673	672
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	2,82802	1,48588	2114,3	355730	673
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	2,82866	1,48368	2117,4	356788	674
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	2,82930	1,48148	2120,6	357847	675
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	2,82995	1,47929	2123,7	358908	676
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	2,83059	1,47711	2126,9	359971	677
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	2,83123	1,47493	2130,0	361035	678
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	2,83187	1,47275	2133,1	362101	679
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	2,83251	1,47059	2136,3	363168	**680**
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	2,83315	1,46843	2139,4	364237	681
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	2,83378	1,46628	2142,6	365308	682
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	2,83442	1,46413	2145,7	366380	683
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	2,83506	1,46199	2148,9	367453	684
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	2,83569	1,45985	2152,0	368528	685
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	2,83632	1,45773	2155,1	369605	686
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	2,83696	1,45560	2158,3	370684	687
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	2,83759	1,45349	2161,4	371764	688
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	2,83822	1,45138	2164,6	372845	689
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	2,83885	1,44928	2167,7	373928	**690**
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	2,83948	1,44718	2170,8	375013	691
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	2,84011	1,44509	2174,0	376099	692
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	2,84073	1,44300	2177,1	377187	693
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	2,84136	1,44092	2180,3	378276	694
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	2,84198	1,43885	2183,4	379367	695
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	2,84261	1,43678	2186,6	380459	696
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	2,84323	1,43472	2189,7	381554	697
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	2,84386	1,43267	2192,8	382649	698
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	2,84448	1,43062	2196,0	383746	699
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384845	**700**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn^2	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384845	**700**
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	2,84572	1,42653	2202,3	385945	701
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	2,84634	1,42450	2205,4	387047	702
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	2,84696	1,42248	2208,5	388151	703
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	2,84757	1,42046	2211,7	389256	704
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	2,84819	1,41844	2214,8	390363	705
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	2,84880	1,41643	2218,0	391471	706
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	2,84942	1,41443	2221,1	392580	707
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	2,85003	1,41243	2224,3	393692	708
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	2,85065	1,41044	2227,4	394805	709
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	2,85126	1,40845	2230,5	395919	**710**
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	2,85187	1,40647	2233,7	397035	711
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	2,85248	1,40449	2236,8	398153	712
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	2,85309	1,40253	2240,0	399272	713
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	2,85370	1,40056	2243,1	400393	714
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	2,85431	1,39860	2246,2	401515	715
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	2,85491	1,39665	2249,4	402639	716
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	2,85552	1,39470	2252,5	403765	717
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	2,85612	1,39276	2255,7	404892	718
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	2,85673	1,39082	2258,8	406020	719
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	2,85733	1,38889	2261,9	407150	**720**
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	2,85794	1,38696	2265,1	408282	721
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	2,85854	1,38504	2268,2	409416	722
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	2,85914	1,38313	2271,4	410550	723
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	2,85974	1,38122	2274,5	411687	724
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	2,86034	1,37931	2277,7	412825	725
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	2,86094	1,37741	2280,8	413965	726
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	2,86153	1,37552	2283,9	415106	727
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	2,86213	1,37363	2287,1	416248	728
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	2,86273	1,37174	2290,2	417393	729
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	2,86332	1,36986	2293,4	418539	**730**
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	2,86392	1,36799	2296,5	419686	731
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	2,86451	1,36612	2299,7	420835	732
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	2,86510	1,36426	2302,8	421986	733
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	2,86570	1,36240	2305,9	423138	734
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	2,86629	1,36054	2309,1	424293	735
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	2,86688	1,35870	2312,2	425448	736
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	2,86747	1,35685	2315,4	426604	737
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	2,86806	1,35501	2318,5	427762	738
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	2,86864	1,35318	2321,6	428922	739
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	2,86923	1,35135	2324,8	430084	**740**
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	2,86982	1,34953	2327,9	431247	741
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	2,87040	1,34771	2331,1	432412	742
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	2,87099	1,34590	2334,2	433578	743
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	2,87157	1,34409	2337,3	434746	744
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	2,87216	1,34228	2340,5	435916	745
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	2,87274	1,34048	2343,6	437087	746
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	2,87332	1,33869	2346,8	438259	747
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	2,87390	1,33690	2349,9	439433	748
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	2,87448	1,33511	2353,1	440609	749
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786	**750**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$n\pi$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786	**750**
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	2,87564	1,33156	2359,3	442965	751
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	2,87622	1,32979	2362,5	444146	752
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	2,87679	1,32802	2365,6	445328	753
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	2,87737	1,32626	2368,8	446511	754
755	570025	430368875	27,4773	9.1057	2,87795	1,32450	2371,9	447697	755
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	2,87852	1,32275	2375,0	448883	756
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	2,87910	1,32100	2378,2	450072	757
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	2,87967	1,31926	2381,3	451262	758
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	2,88024	1,31752	2384,5	452453	759
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	2,88081	1,31579	2387,6	453646	**760**
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	2,88138	1,31406	2390,8	454841	761
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	2,88195	1,31234	2393,9	456037	762
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	2,88252	1,31062	2397,0	457234	763
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	2,88309	1,30890	2400,2	458434	764
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	2,88366	1,30719	2403,3	459635	765
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	2,88423	1,30548	2406,5	460837	766
767	588289	451217663	27.6948	9,1537	2,88480	1,30378	2409,6	462041	767
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	2,88536	1,30208	2412,7	463247	768
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	2,88593	1,30039	2415,9	464454	769
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	2,88649	1,29870	2419,0	465663	**770**
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	2,88705	1,29702	2422,2	466873	771
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	2,88762	1,29534	2425,3	468085	772
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	2,88818	1,29366	2428,5	469298	773
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	2,88874	1,29199	2431,6	470513	774
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	2,88930	1,29032	2434,7	471730	775
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	2,88986	1,28866	2437,9	472948	776
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	2,89042	1,28700	2441,0	474168	777
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	2,89098	1,28535	2444,2	475389	778
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	2,89154	1,28370	2447,3	476612	779
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	2,89209	1,28205	2450,4	477836	**780**
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	2,89265	1,28041	2453,6	479062	781
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	2,89321	1,27877	2456,7	480290	782
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	2,89376	1,27714	2459,9	481519	783
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	2,89432	1,27551	2463,0	482750	784
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	2,89487	1,27389	2466,2	483982	785
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	2,89542	1,27226	2469,3	485216	786
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	2,89597	1,27065	2472,4	486451	787
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	2,89653	1,26904	2475,6	487688	788
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	2,89708	1,26743	2478,7	488927	789
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	2,89763	1,26582	2481,9	490167	**790**
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	2,89818	1,26422	2485,0	491409	791
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	2,89873	1,26263	2488,1	492652	792
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	2,89927	1,26103	2491,3	493897	793
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	2,89982	1,25945	2494,4	495143	794
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	2,90037	1,25786	2497,6	496391	795
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	2,90091	1,25628	2500,7	497641	796
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	2,90146	1,25471	2503,8	498892	797
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	2,90200	1,25313	2507,0	500145	798
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	2,90255	1,25156	2510,1	501399	799
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	9,90309	1,25000	2513,3	502655	**800**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502655	**800**
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	2,90363	1,24844	2516,4	503912	801
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	2,90417	1,24688	2519,6	505171	802
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	2,90472	1,24533	2522,7	506432	803
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	2,90526	1,24378	2525,8	507694	804
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	2,90580	1,24224	2529,0	508958	805
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	2,90634	1,24069	2532,1	510223	806
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	2,90687	1,23916	2535,3	511490	807
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	2,90741	1,23762	2538,4	512758	808
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	2,90795	1,23609	2541,5	514028	809
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	2,90849	1,23457	2544,7	515300	**810**
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	2,90902	1,23305	2547,8	516573	811
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	2,90956	1,23153	2551,0	517848	812
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	2,91009	1,23001	2554,1	519124	813
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	2,91062	1,22850	2557,3	520402	814
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	2,91116	1,22699	2560,4	521681	815
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	2,91169	1,22549	2563,5	522962	816
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	2,91222	1,22399	2566,7	524245	817
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	2,91275	1,22249	2569,8	525529	818
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	2,91328	1,22100	2573,0	526814	819
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	2,91381	1,21951	2576,1	528102	**820**
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	2,91434	1,21803	2579,2	529391	821
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	2,91487	1,21655	2582,4	530681	822
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	2,91540	1,21507	2585,5	531973	823
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	2,91593	1,21359	2588,7	533267	824
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	2,91645	1,21212	2591,8	534562	825
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	2,91698	1,21065	2595,0	535858	826
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	2,91751	1,20919	2598,1	537157	827
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	2,91803	1,20773	2601,2	538456	828
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	2,91855	1,20627	2604,4	539758	829
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	2,91908	1,20482	2607,5	541061	**830**
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	2,91960	1,20337	2610,7	542365	831
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	2,92012	1,20192	2613,8	543671	832
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	2,92065	1,20048	2616,9	544979	833
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	2,92117	1,19904	2620,1	546288	834
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	2,92169	1,19760	2623,2	547599	835
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	2,92221	1,19617	2626,4	548912	836
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	2,92273	1,19474	2629,5	550226	837
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	2,92324	1,19332	2632,7	551541	838
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	2,92376	1,19189	2635,8	552858	839
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	2,92428	1,19048	2638,9	554177	**840**
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	2,92480	1,18906	2642,1	555497	841
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	2,92531	1,18765	2645,2	556819	842
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	2,92583	1,18624	2648,4	558142	843
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	2,92634	1,18483	2651,5	559467	844
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	2,92686	1,18343	2654,6	560794	845
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	2,92737	1,18203	2657,8	562122	846
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	2,92788	1,18064	2660,9	563452	847
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	2,92840	1,17925	2664,1	564783	848
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	2,92891	1,17786	2667,2	566116	849
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450	**850**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450	850
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	2,92993	1,17509	2673,5	568786	851
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	2,93044	1,17371	2676,6	570124	852
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	2,93095	1,17233	2679,8	571463	853
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	2,93146	1,17096	2682,9	572803	854
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	2,93197	1,16959	2686,1	574146	855
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	2,93247	1,16822	2689,2	575490	856
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	2,93298	1,16686	2692,3	576835	857
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	2,93349	1,16550	2695,5	578182	858
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	2,93399	1,16414	2698,6	579530	859
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	2,93450	1,16279	2701,8	580880	860
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	2,93500	1,16144	2704,9	582232	861
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	2,93551	1,16009	2708,1	583585	862
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	2,93601	1,15875	2711,2	584940	863
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	2,93651	1,15741	2714,3	586297	864
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	2,93702	1,15607	2717,5	587655	865
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	2,93752	1,15473	2720,6	589014	866
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	2,93802	1,15340	2723,8	590375	867
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	2,93852	1,15207	2726,9	591738	868
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	2,93902	1,15075	2730,0	593102	869
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	2,93952	1,14943	2733,2	594468	870
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	2,94002	1,14811	2736,3	595835	871
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	2,94052	1,14679	2739,5	597204	872
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	2,94101	1,14548	2742,6	598575	873
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	2,94151	1,14416	2745,8	599947	874
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	2,94201	1,14286	2748,9	601320	875
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	2,94250	1,14155	2752,0	602696	876
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	2,94300	1,14025	2755,2	604073	877
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	2,94349	1,13895	2758,3	605451	878
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	2,94399	1,13766	2761,5	606831	879
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	2,94448	1,13636	2764,6	608212	880
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	2,94498	1,13507	2767,7	609595	881
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	2,94547	1,13379	2770,9	610980	882
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	2,94596	1,13250	2774,0	612366	883
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	2,94645	1,13122	2777,2	613754	884
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	2,94694	1,12994	2780,3	615143	885
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	2,94743	1,12867	2783,5	616534	886
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	2,94792	1,12740	2786,6	617927	887
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	2,94841	1,12613	2789,7	619321	888
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	2,94890	1,12486	2792,9	620717	889
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	2,94939	1,12360	2796,0	622114	890
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	2,94988	1,12233	2799,2	623513	891
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	2,95036	1,12108	2802,3	624913	892
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	2,95085	1,11982	2805,4	626315	893
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	2,95134	1,11857	2808,6	627718	894
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	2,95182	1,11732	2811,7	629124	895
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	2,95231	1,11607	2814,9	630530	896
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	2,95279	1,11483	2818,0	631938	897
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	2,95328	1,11359	2821,2	633348	898
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	2,95376	1,11235	2824,3	634760	899
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636173	900

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 . \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636173	**900**
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	2,95472	1,10988	2830,6	637587	901
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	2,95521	1,10865	2833,7	639003	902
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	2,95569	1,10742	2836,9	640421	903
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	2,95617	1,10619	2840,0	641840	904
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	2,95665	1,10497	2843,1	643261	905
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	2,95713	1,10375	2846,3	644683	906
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	2,95761	1,10254	2849,4	646107	907
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	2,95809	1,10132	2852,6	647533	908
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	2,95856	1,10011	2855,7	648960	909
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	2,95904	1,09890	2858,8	650388	**910**
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	2,95952	1,09769	2862,0	651818	911
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	2,95999	1,09649	2865,1	653250	912
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	2,96047	1,09529	2868,3	654684	913
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	2,96095	1,09409	2871,4	656118	914
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	2,96142	1,09290	2874,6	657555	915
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	2,96190	1,09170	2877,7	658993	916
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	2,96237	1,09051	2880,8	660433	917
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	2,96284	1,08932	2884,0	661874	918
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	2,96332	1,08814	2887,1	663317	919
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	2,96379	1,08696	2890,3	664761	**920**
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	2,96426	1,08578	2893,4	666207	921
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	2,96473	1,08460	2896,5	667654	922
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	2,96520	1,08342	2899,7	669103	923
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	2,96567	1,08225	2902,8	670554	924
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	2,96614	1,08108	2906,0	672006	925
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	2,96661	1,07991	2909,1	673460	926
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	2,96708	1,07875	2912,3	674915	927
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	2,96755	1,07759	2915,4	676372	928
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	2,96802	1,07643	2918,5	677831	929
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	2,96848	1,07527	2921,7	679291	**930**
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	2,96895	1,07411	2924,8	680752	931
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	2,96942	1,07296	2928,0	682216	932
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	2,96988	1,07181	2931,1	683680	933
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	2,97035	1,07066	2934,2	685147	934
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	2,97081	1,06952	2937,4	686615	935
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	2,97128	1,06838	2940,5	688084	936
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	2,97174	1,06724	2943,7	689555	937
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	2,97220	1,06610	2946,8	691028	938
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	2,97267	1,06496	2950,0	692502	939
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	2,97313	1,06383	2953,1	693978	**940**
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	2,97359	1,06270	2956,2	695455	941
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	2,97405	1,06157	2959,4	696934	942
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	2,97451	1,06045	2962,5	698415	943
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	2,97497	1,05932	2965,7	699897	944
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	2,97543	1,05820	2968,8	701380	945
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	2,97589	1,05708	2971,9	702865	946
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	2,97635	1,05597	2975,1	704352	947
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	2,97681	1,05485	2978,2	705840	948
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	2,97727	1,05374	2981,4	707330	949
[illegible]	[illegible]	[illegible]	…221	9,8305	2,9…	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708822	**950**
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	2,97818	1,05152	2987,7	710315	951
952	906304	862801408	30,8545	9 8374	2,97864	1,05042	2990,8	711809	952
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	2,97909	1,04932	2993,9	713306	953
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	2,97955	1,04822	2997,1	714803	954
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	2,98000	1,04712	3000,2	716303	955
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	2,98046	1,04603	3003,4	717804	956
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	2,98091	1,04493	3006,5	719306	957
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	2,98137	1,04384	3009,6	720810	958
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	2,98182	1,04275	3012,8	722316	959
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	2,98227	1,04167	3015,9	723823	**960**
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	2,98272	1,04058	3019,1	725332	961
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	2,98318	1,03950	3022,2	726842	962
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	2,98363	1,03842	3025,4	728354	963
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	2,98408	1,03734	3028,5	729867	964
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	2,98453	1,03627	3031,6	731382	965
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	2,98498	1,03520	3034,8	732899	966
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	2,98543	1,03413	3037,9	734417	967
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	2,98588	1,03306	3041,1	735937	968
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	2,98632	1,03199	3044,2	737458	969
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	2,98677	1,03093	3047,3	738981	**970**
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	2,98722	1,02987	3050,5	740506	971
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	2,98767	1,02881	3053,6	742032	972
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	2,98811	1,02775	3056,8	743559	973
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	2,98856	1,02669	3059,9	745088	974
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	2,98900	1,02564	3063,1	746619	975
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	2,98945	1,02459	3066,2	748151	976
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	2,98989	1,02354	3069,3	749685	977
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	2,99034	1,02249	3072,5	751221	978
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	2,99078	1,02145	3075,6	752758	979
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	2,99123	1,02041	3078,8	754296	**980**
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	2,99167	1,01937	3081,9	755837	981
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	2,99211	1,01833	3085,0	757378	982
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	2,99255	1,01729	3088,2	758922	983
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	2,99300	1,01626	3091,3	760466	984
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	2,99344	1,01523	3094,5	762013	985
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	2,99388	1,01420	3097,6	763561	986
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	2,99432	1,01317	3100,8	765111	987
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	2,99476	1,01215	3103,9	766662	988
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	2,99520	1,01112	3107,0	768214	989
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	2,99564	1,01010	3110,2	769769	**990**
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	2,99607	1,00908	3113,3	771325	991
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	2,99651	1,00806	3116,5	772882	992
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	2,99695	1,00705	3119,6	774441	993
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	2,99739	1,00604	3122,7	776002	994
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	2,99782	1,00503	3125,9	777564	995
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	2,99826	1,00402	3129,0	779128	996
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	2,99870	1,00301	3132,2	780693	997
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	2,99913	1,00200	3135,3	782260	998
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	2,99957	1,00100	3138,5	783828	999

1—500 B. Natürliche Logarithmen.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	— ∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
10	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
20	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
30	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
40	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
50	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
60	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
70	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
80	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
90	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
100	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
110	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7022	4,7707	4,7791
120	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
130	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
140	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
150	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
160	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
170	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
180	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
190	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
200	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
210	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
220	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
230	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
240	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175
250	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
260	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
270	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
280	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6030	5,6664
290	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004
300	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5,7333
310	5,7366	5,7398	5,7430	5,7462	5,7494	5,7526	5,7557	5,7589	5,7621	5,7652
320	5,7683	5,7714	5,7746	5,7777	5,7807	5,7838	5,7869	5,7900	5,7930	5,7961
330	5,7991	5,8021	5,8051	5,8081	5,8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260
340	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5,8493	5,8522	5,8551
350	5,8579	5,8608	5,8636	5,8665	5,8693	5,8721	5,8749	5,8777	5,8805	5,8833
360	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9011
370	5,9135	5,9162	5,9189	5,9216	5,9243	5,9269	5,9296	5,9322	5,9349	5,9375
380	5,9402	5,9428	5,9454	5,9480	5,9506	5,9532	5,9558	5,9584	5,9610	5,9636
390	5,9661	5,9687	5,9713	5,9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5,9865	5,9890
400	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
410	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379
420	6,0403	6,0426	6,0450	6,0474	6,0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615
430	6,0638	6,0661	6,0684	6,0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845
440	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070
450	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6,1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291
460	6,1312	6,1334	6,1356	6,1377	6,1399	6,1420	6,1442	6,1463	6,1485	6,1506
470	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717
480	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6.1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924
490	6.1944	6,1964	6,1985	6,2005	6,2025	6,2046	6,2066	6,2086	6,2106	6,2126
500	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
510	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519
520	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710
530	6,2729	6,2748	6,2766	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897
540	6,2916	6,2934	6,2953	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081
550	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261
560	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439
570	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613
580	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6,3784
590	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953
600	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6,4118
610	6,4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281
620	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441
630	6,4457	6,4473	6,4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599
640	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754
650	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907
660	6,4922	6,4938	6,4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058
670	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6,5177	6,5191	6,5206
680	6,5221	6,5236	6,5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352
690	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497
700	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639
710	6,5653	6,5667	6,5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6,5751	6,5765	6,5779
720	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917
730	6,5930	6,5944	6,5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6020	6,6039	6,6053
740	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187
750	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320
760	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451
770	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6542	6,6554	6,6567	6,6580
780	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708
790	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6,6771	6,6783	6,6796	6,6809	6,6821	6,6834
800	6,6846	6,6859	6,6871	6,6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958
810	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081
820	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202
830	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322
840	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7382	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441
850	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558
860	6,7569	6,7581	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673
870	6,7685	6,7696	6,7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788
880	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6,7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901
890	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013
900	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123
910	6,8134	6,8145	6,8156	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233
920	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341
930	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6,8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448
940	6,8459	6,8469	6,8480	6,8491	6,8501	6,8512	6,8522	6,8533	6,8544	6,8554
950	6,8565	6,8575	6,8586	6,8596	6,8607	6,8617	6,8628	6,8638	6,8648	6,8659
960	6,8669	6,8680	6,8690	6,8701	6,8711	6,8721	6,8732	6,8742	6,8752	6,8763
970	6,8773	6,8783	6,8794	6,8804	6,8814	6,8824	6,8835	6,8845	6,8855	6,8865
980	6,8876	6,8886	6,8896	6,8906	6,8916	6,8926	6,8937	6,8947	6,8957	6,8967
990	6,8977	6,8987	6,8997	6,9007	6,9017	6,9027	6,9037	6,9047	6,9057	6,9068
1000	6,9078									

Grad	Sinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cosinus							

Grad	Cosinus							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Sinus							

Grad	Tangens 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0.28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0.38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0.84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cotangens							

Grad	Cotangens							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Tangens							

D. Bogenlängen, Bogenhöhen, Sehnenlängen

Centriwinkel in Grad.	Bogenlänge.	Bogenhöhe.	Sehnenlänge.	Inhalt des Kreisabschn.	Centriwinkel in Grad.	Bogenlänge.	Bogenhöhe.	Sehnenlänge.	Inhalt des Kreisabschn.
1	0,0175	0,0000	0,0175	0,00000	47	0,8203	0,0829	0,7975	0,04448
2	0,0349	0,0002	0,0349	0,00000	48	0,8378	0,0865	0,8135	0,04731
3	0,0524	0,0003	0,0524	0,00001	49	0,8552	0,0900	0,8294	0,05025
4	0,0698	0,0006	0,0698	0,00003	50	0,8727	0,0937	0,8452	0,05331
5	0,0873	0,0010	0,0872	0,00006	51	0,8901	0,0974	0,8610	0,05649
6	0,1047	0,0014	0,1047	0,00010	52	0,9076	0,1012	0,8767	0,05978
7	0,1222	0,0019	0,1221	0,00015	53	0,9250	0,1051	0,8924	0,06319
8	0,1396	0,0024	0,1395	0,00023	54	0,9425	0,1090	0,9080	0,06673
9	0,1571	0,0031	0,1569	0,00032	55	0,9599	0,1130	0,9235	0,07039
10	0,1745	0,0038	0,1743	0,00044	56	0,9774	0,1171	0,9389	0,07417
11	0,1920	0,0046	0,1917	0,00059	57	0,9948	0,1212	0,9543	0,07808
12	0,2094	0,0055	0,2091	0,00076	58	1,0123	0,1254	0,9696	0,08212
13	0,2269	0,0064	0,2264	0,00097	59	1,0297	0,1296	0,9848	0,08629
14	0,2443	0,0075	0,2437	0,00121	60	1,0472	0,1340	1,0000	0,09059
15	0,2618	0,0086	0,2611	0,00149	61	1,0647	0,1384	1,0151	0,09502
16	0,2793	0,0097	0,2783	0,00181	62	1,0821	0,1428	1,0301	0,09958
17	0,2967	0,0110	0,2956	0,00217	63	1,0996	0,1474	1,0450	0,10428
18	0,3142	0,0123	0,3129	0,00257	64	1,1170	0,1520	1,0598	0,10911
19	0,3316	0,0137	0,3301	0,00302	65	1,1345	0,1566	1,0746	0,11408
20	0,3491	0,0152	0,3473	0,00352	66	1,1519	0,1613	1,0893	0,11919
21	0,3665	0,0167	0,3645	0,00408	67	1,1694	0,1661	1,1039	0,12443
22	0,3840	0,0184	0,3816	0,00468	68	1,1868	0,1710	1,1184	0,12982
23	0,4014	0,0201	0,3987	0,00535	69	1,2043	0,1759	1,1328	0,13535
24	0,4189	0,0219	0,4158	0,00607	70	1,2217	0,1808	1,1472	0,14102
25	0,4363	0,0237	0,4329	0,00686	71	1,2392	0,1859	1,1614	0,14683
26	0,4538	0,0256	0,4499	0,00771	72	1,2566	0,1910	1,1756	0,15279
27	0,4712	0,0276	0,4669	0,00862	73	1,2741	0,1961	1,1896	0,15889
28	0,4887	0,0297	0,4838	0,00961	74	1,2915	0,2014	1,2036	0,16514
29	0,5061	0,0319	0,5008	0,01067	75	1,3090	0,2066	1,2175	0,17154
30	0,5236	0,0341	0,5176	0,01180	76	1,3265	0,2120	1,2313	0,17808
31	0,5411	0,0364	0,5345	0,01301	77	1,3439	0,2174	1,2450	0,18477
32	0,5585	0,0387	0,5512	0,01429	78	1,3614	0,2229	1,2586	0,19160
33	0,5760	0,0412	0,5680	0,01566	79	1,3788	0,2284	1,2722	0,19859
34	0,5934	0,0437	0,5847	0,01711	80	1,3963	0,2340	1,2856	0,20573
35	0,6109	0,0463	0,6014	0,01864	81	1,4137	0,2396	1,2989	0,21301
36	0,6283	0,0489	0,6180	0,02027	82	1,4312	0,2453	1,3121	0,22045
37	0,6458	0,0517	0,6346	0,02198	83	1,4486	0,2510	1,3252	0,22804
38	0,6632	0,0545	0,6511	0,02378	84	1,4661	0,2569	1,3383	0,23578
39	0,6807	0,0574	0,6676	0,02568	85	1,4835	0,2627	1,3512	0,24367
40	0,6981	0,0603	0,6840	0,02767	86	1,5010	0,2686	1,3640	0,25171
41	0,7156	0,0633	0,7004	0,02976	87	1,5184	0,2746	1,3767	0,25990
42	0,7330	0,0664	0,7167	0,03195	88	1,5359	0,2807	1,3893	0,26825
43	0,7505	0,0696	0,7330	0,03425	89	1,5533	0,2867	1,4018	0,27675
44	0,7679	0,0728	0,7492	0,03664	90	1,5708	0,2929	1,4142	0,28854
45	0,7854	0,0761	0,7654	0,03915					
46	0,8029	0,0795	0,7815	0,04176					

Ist r der Kreishalbmesser und φ der Centriwinkel in Grad, so ergiebt sich:

1) die Sehnenlänge: $s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$;

2) die Bogenhöhe: $h = r\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$;

3) die Bogenlänge: $l = \pi r \frac{\varphi}{180} = 0{,}017453\, r\varphi = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$ (angenähert).

und Kreisabschnitte für den Halbmesser = 1.

Centriwinkel in Grad.	Bogenlänge.	Bogenhöhe.	Sehnenlänge.	Inhalt des Kreisabschn.	Centriwinkel in Grad.	Bogenlänge.	Bogenhöhe.	Sehnenlänge.	Inhalt des Kreisabschn.
91	1,5882	0,2991	1,4265	0,29420	137	2,3911	0,6335	1,8608	0,83455
92	1,6057	0,3053	1,4387	0,30316	138	2,4086	0,6416	1,8672	0,86971
93	1,6232	0,3116	1,4507	0,31226	139	2,4260	0,6498	1,8733	0,88497
94	1,6406	0,3180	1,4627	0,32152	140	2,4435	0,6580	1,8794	0,90034
95	1,6580	0,3244	1,4746	0,33093	141	2,4609	0,6662	1,8853	0,91580
96	1,6755	0,3309	1,4863	0,34050	142	2,4784	0,6744	1,8910	0,93135
97	1,6930	0,3374	1,4979	0,35021	143	2,4958	0,6827	1,8966	0,94700
98	1,7104	0,3439	1,5094	0,36008	144	2,5133	0,6910	1,9021	0,96274
99	1,7279	0,3506	1,5208	0,37009	145	2,5307	0,6993	1,9074	0,97858
100	1,7453	0,3572	1,5321	0,38026	146	2,5482	0,7076	1,9126	0,99449
101	1,7628	0,3639	1,5432	0,39058	147	2,5656	0,7160	1,9176	1,01050
102	1,7802	0,3707	1,5543	0,40104	148	2,5831	0,7244	1,9225	1,02658
103	1,7977	0,3775	1,5652	0,41166	149	2,6005	0,7328	1,9273	1,04275
104	1,8151	0,3843	1,5760	0,42242	150	2,6180	0,7412	1,9319	1,05900
105	1,8326	0,3912	1,5867	0,43333	151	2,6354	0,7496	1,9363	1,07532
106	1,8500	0,3982	1,5973	0.44439	152	2,6529	0,7581	1,9406	1,09171
107	1,8675	0,4052	1,6077	0,45560	153	2,6704	0,7666	1,9447	1,10818
108	1,8850	0,4122	1,6180	0,46695	154	2,6878	0,7750	1,9487	1,12472
109	1,9024	0,4193	1,6282	0,47844	155	2,7053	0,7836	1,9526	1,14132
110	1,9199	0,4264	1,6383	0,49008	156	2,7227	0,7921	1,9563	1,15799
111	1,9373	0,4336	1,6483	0,50187	157	2,7402	0,8006	1,9598	1,17472
112	1,9548	0,4408	1,6581	0,51379	158	2,7576	0,8092	1,9633	1,19151
113	1,9722	0,4481	1,6678	0,52586	159	2,7751	0,8178	1,9665	1,20835
114	1,9897	0,4554	1,6773	0,53807	160	2,7925	0,8264	1,9696	1,22525
115	2,0071	0,4627	1,6868	0,55041	161	2,8100	0,8350	1,9726	1,24221
116	2,0246	0,4701	1,6961	0,56289	162	2,8274	0,8436	1,9754	1,25921
117	2,0420	0,4775	1,7053	0,57551	163	2,8449	0,8522	1,9780	1,27626
118	2,0595	0,4850	1,7143	0,58827	164	2,8623	0,8608	1,9805	1,29335
119	2,0769	0,4925	1,7233	0,60116	165	2,8798	0,8695	1,9829	1,31049
120	2,0944	0,5000	1,7321	0 61418	166	2,8972	0,8781	1,9851	1,32766
121	2,1118	0,5076	1,7407	0,62734	167	2,9147	0,8868	1,9871	1,34487
122	2,1293	0,5152	1,7492	0,64063	168	2,9322	0 8955	1,9890	1,36212
123	2,1468	0,5228	1,7576	0,65404	169	2,9496	0,9042	1,9908	1,37940
124	2,1642	0,5305	1,7659	0,66759	170	2,9671	0,9128	1,9924	1,39671
125	2,1817	0,5383	1,7740	0,68125	171	2,9845	0,9215	1,9938	1,41404
126	2,1991	0,5460	1,7820	0,69505	172	3,0020	0,9302	1,9951	1,43140
127	2,2166	0,5538	1,7899	0,70897	173	3,0194	0,9390	1,9963	1,44878
128	2,2340	0,5616	1,7976	0,72301	174	3,0369	0,9477	1,9973	1,46617
129	2,2515	0,5695	1,8052	0,73716	175	3,0543	0,9564	1,9981	1,48359
130	2,2689	0,5774	1,8126	0,75144	176	3,0718	0,9651	1,9988	1,50101
131	2,2864	0,5853	1,8199	0,76584	177	3,0892	0,9738	1,9993	1,51845
132	2,3038	0,5933	1,8271	0,78034	178	3,1067	0,9825	1,9997	1,53589
133	2,3213	0,6013	1,8341	0,79497	179	3,1241	0,9913	1,9999	1,55334
134	2.3387	0.6093	1,8410	0,80970	180	3,1416	1,0000	2,0000	1,57080
135	2,3562	0,6173	1,8478	0,82454					
136	2,3736	0,6254	1 8544	0,83949					

4) der Inhalt des Kreisabschnitts $= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{180}\varphi - \sin\varphi\right)$;

5) „ „ „ Kreisausschnitts $= \frac{\varphi}{360}\pi r^2 = 0{,}00872665\,\varphi r^2$.

6) $l = r$ entspricht $\varphi = 57^0\,17'\,44{,}806'' = 57{,}2957795^0 = 206264{,}806''$;

7) arc $1^0 = \pi : 180 = 0{,}017453293$;

8) arc $1' = \pi : 10800 = 0{,}000290888$;

9) arc $1'' = \pi : 648000 = 0{,}0000048481$.

E. Einige besondere Zahlenwerte.

Es bezeichnet:
π die Ludolphsche Zahl = 3,1415926 ......,
g die Beschleunigung durch die Schwere, angenommen = 9,81 m,
e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen = 2,718281828 . . .

Gröfse:	Zahlenwert:	Logarithmus:
π	3,1415926	0,4971499
$\pi : 2$	1,5707963	0,1961199
$\pi : 3$	1,0471976	0,0200286
$\pi : 4$	0,7853982	0,8950899−1
$\pi : 5$	0,6283185	0,7981799−1
$\pi : 6$	0,5235988	0,7189986−1
$\pi : 7$	0,4487990	0,6520519−1
$\pi : 8$	0,3926991	0,5940599−1
$\pi : 9$	0,3490659	0,5429074−1
$\pi : 12$	0,2617911	0,3360573−1
$\pi : 32$	0,9817477	0,9919999−2
$\pi : 180$	0,0174533	0,2418776−2
$1 : \pi$	0,3183099	0,5028501−1
$16 : \pi$	5,0929583	0,7069701
$180 : \pi$	57,2957795	1,7581226
π^2	9,8696044	0,9942996
$4\pi^2$	39,478418	1,5963597
$\pi^2 : 4$	2,467401	0,3922397
$1 : \pi^2$	0,1013212	0,0057006−1
π^3	31,0062767	1,4914496
$1 : \pi^3$	0,0322515	0,5085504−2
π^4	97,4091	1,9885995
$1 : \pi^4$	0,0102660	0,0114005−2
π^5	306,0197	2,4857494
$1 : \pi^5$	0,0032678	0,5142506−3
π^6	961,389	2,9828992
$1 : \pi^6$	0,0010402	0,0171008−3
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,2485749
$1 : \sqrt{\pi}$	0,5641896	0,7514251−1
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,3990899
$\sqrt{\pi : 2}$	1,253314	0,0980599
$\pi\sqrt{\pi}$	5,568328	0,7457248
$1 : \pi\sqrt{\pi}$	0,1795871	0,2542752−1

Gröfse:	Zahlenwert:	Logarithmus:
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,1657166
$1 : \sqrt[3]{\pi}$	0,6827841	0,8342834−1
$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845261	0,2660577
$\sqrt[3]{\pi : 2}$	1,162447	0,0653733
$\sqrt[3]{\pi : 4}$	0,9226353	0,9650300−1
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,60115	0,6628665
$1 : \pi\sqrt[3]{\pi}$	0,2173352	0,3371335−1
$\sqrt[6]{\pi}$	1,210203	0,0828583
$1 : \sqrt[6]{\pi}$	0,8263075	0,9171417−1
g	9,81	0,9916690
$1 : g$	0,101937	0,0083310−1
$1 : 2g$	0,050968	0,7073010−2
g^2	96,2361	1,9833381
$1 : g^2$	0,010391	0,0166573−2
$\sqrt{g}$	3,132092	0,4958345
$\sqrt{2g}$	4,429447	0,6463495
$1 : \sqrt{g}$	0,319275	0,5041655−1
$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,9929844
$\pi : \sqrt{g}$	1,003033	0,0013154
$\pi : \sqrt{2g}$	0,709252	0,8508004−1
$\pi^2 : g$	1,006076	0,0026304
e	2,7182818	0,434294482
$1 : e$	0,3678794	0,5657055−1
e^2	7,389056	0,8685890
e^3	20,085537	1,3028834
$\sqrt{e}$	1,6487211	0,2171472
$\sqrt[3]{e}$	1,395611	0,1447648

Anmerkungen zu den Tafeln A bis D.

Anmerkung zu Taf. A. 1) Es sei z. B. der Logarithmus von 0,032252 zu suchen.

a) Es ist: log 322 = 50786 (S. 8).
b) Differenz der Logarithmen: 50920 — 50786 = 134.
c) Multiplikation dieser Differenz mit 0,52 = 134 . 0,52 = 69,68.
d) Addition der Werte unter a und c: 50786 + 69,68 = 50856.
e) Folglich: log 32252 = 50856 und log 0,032252 = 0,50856 — 2.

2) Es sei der Numerus zu suchen, dessen Logarithmus gleich 1,49145 ist.

a) Nach Seite 8 ist: Numerus zu log 49136 = 310 ...
b) Dividiere Differenz zwischen dem gegebenen und dem nächst niederen Logarithmus: 49145 — 49136 = 9 durch die Differenz des nächst höheren und nächst niederen Logarithmus: 49276 — 49136 = 140, also: 9 : 140 = 0,06 ...
c) Addition der Werte unter a und b: 310 + 0,06 .. = 31006 ....
d) Folglich: Num. log. 1,49145 = 31,006 ....

3) Für das Aufsuchen der Quadrat- bezw. Kubikwurzel gegebener Zahlen wende man das in den Formeln b. 10, S. 34 enthaltene Näherungsverfahren an.

Beispiel: Gesucht $\sqrt{404527}$. Nach S. 14 ist das zunächst liegende $a^2 = 404496$, also $a = 636$ und $k = 404527 - 404496 = 31$; $2a = 1272$;
$k : 2a = 31 : 1272 = 0{,}02437$. Mithin:

$$\sqrt{404527} = a + \frac{k}{2a} = 636 + 0{,}02437 = 636{,}02437.$$

Anmerkung zu Taf. B. Beispiele: ln 30 = 3,4012; ln 799 = 6,6834.

Anmerkung zu Taf. C. Es sei nach der goniometrischen Tafel z. B.:
1) der Wert der Tangente zu ermitteln, der einem Winkel von 58° 47′ 22″,5 entspricht.
Es ist: 58° 47′ 22″,5 = 58° 47′,375.

a) Laut Tafel ist tg 58° 40′ = 1,64256, ferner:
b) „ „ „ tg 58° 50′ = 1,65337
die Differenz 0,01081 entspricht 10′, daher 1′ der 10. Teil und 7′,375 das 7,375fache, also:
c) $\frac{0{,}01081 \,.\, 7{,}375}{10} = 0{,}00797.$
d) Werte unter a und c addiert, giebt: tg 58° 47′ 22″,5 = 1,65053

2) Der Winkel sei zu ermitteln, dessen Sinus gleich 0,63662 ist.

a) Laut Tafel ist arc sin 0,63608 = 39° 30′.
b) Multipliziere Differenz zwischen gegebenem und nächst niederem Sinus: 0,63662 — 0,63608 = 0,00054 mit 10 = 0,0054.
c) Dividiere letztes Produkt (0,0054) durch die Differenz der sin: 0,63832 — 0,63608 = 0,00224, also: 0,0054 : 0,00224 = 2,4107.
d) Addiere Werte unter a und c, sodafs arc sin 0,63662 = 39° 32′,4107 = 39° 32′ 24″,64 ist.

Anmerkung zu Taf. D. Es sei nach dieser Tafel z. B.:
1) Die Bogenlänge zu ermitteln, die dem Centriwinkel von 75° 33′ 16″,2 entspricht.
Es ist: 75° 33′ 16″,2 = 75° 33′,27.
Nach der Tafel ist: Bogen von 75° = 1,3090
„ „ 76° = 1,3265
Differenz der Bögen = 0,0175; dieser Unterschied entspricht 60′, daher 1′ der 60. Teil und 33′,27 das 33,27fache, also: $\frac{0{,}0175 \,.\, 33{,}27}{60} = 0{,}0097.$
Mithin Bogen von 75° 33′,27 = 1,3090 + 0,0097 = 1,3187.

2) Der Centriwinkel sei zu ermitteln, dessen Bogenlänge gleich 2,2254 ist.

a) Laut Tafel ist 2,2166 die Bogenlänge von 127°.
b) Multipliziere Differenz zwischen gegebenem und nächst niederem Bogen 2,2254 — 2,2166 = 0,0088 mit 60; 0,0088 . 60 = 0,528.
c) Dividiere letztes Produkt (0,528) durch die Differenz der Bögen: 2,2340 — 2,2166 = 0,0174, also 0,528 : 0,0174 = 30,3448.
d) Addiere Werte unter a und c, sodafs Bogen 2,2254 einem Winkel vo 127° 30′,3448 = 127° 30′ 20″,688 entspricht.

II. ARITHMETIK.

A. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

a. Potenzen.

(Tafel der zweiten und dritten Potenzen ganzer Zahlen s. S. 1 bis 21.)

1. $(+a)^n = +a^n$
2. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$
3. $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
4. $a^m a^n = a^{m+n}$
5. $a^m : a^n = a^{m-n} = 1 : a^{n-m}$
6. $a^m b^m = (ab)^m$
7. $a^m : b^m = (a:b)^m$
8. $1 : a^m = (1:a)^m = a^{-m}$
9. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m = (a^{-m})^{-n}$
10. $a^0 = 1$; $0^a = 0$; $0^0 =$ unbestimmt*); $1^m = 1$; $a^1 = a$
11. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
12. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
13. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Binomischer Satz.

Für alle Werte von n ist:

14. $$(a \pm b)^n = a^n \pm n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \ldots.$$

Hierin heifsen die Koefficienten der Potenzen **Binomialkoefficienten.** Man bezeichnet:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{1.2.3\ldots p} = (n)_p$$

und nennt n die Grundzahl, p den Zeiger des Ausdrucks $(n)_p$. Der Nenner $1.2.3\ldots.p$ heifst „p Fakultät" $= p!$.

*) Vergl. S. 69.

Regeln über Binomialkoefficienten.

Wenn n eine ganze positive Zahl, so ist:

15. $(n)_p = (n)_{n-p}$.

16. $(n+1)_{p+1} = (n)_{p+1} + (n)_p$.

17. $(n+1)_{p+1} = (n)_p + (n-1)_p + (n-2)_p + \ldots + (p)_p$.

Tafel der Binomialkoefficienten.

Grundzahl	Zeiger 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Anwendungen des Binomischen Satzes.

Für beliebige n ist, wenn $x < 1$:

18. $(1 \pm x)^n = 1 \pm (n)_1\, x + (n)_2\, x^2 \pm (n)_3\, x^3 + (n)_4\, x^4 \pm \ldots.$

19. $\dfrac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots.$

20. $\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \dfrac{1}{2}\, x - \dfrac{1}{2^2 \,.\, 2!}\, x^2 \pm \dfrac{1\,.\,3}{2^3 \,.\, 3!}\, x^3$
$- \dfrac{1\,.\,3\,.\,5}{2^4 \,.\, 4!}\, x^4 \pm \ldots\ldots$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \dfrac{1}{2}\, x + \dfrac{1\,.\,3}{2^2 \,.\, 2!}\, x^2 \pm \dfrac{1.3.5}{2^3 \,.\, 3!}\, x^3 + \ldots$

---

22. $\dfrac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}\, b + a^{n-3}\, b^2 + \ldots + b^{n-1}.$

23. $\dfrac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b} = a^{2n} - a^{2n-1}\, b + a^{2n-2}\, b^2 - \ldots. + b^{2n}.$

24. $\dfrac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b} = a^{2n-1} - a^{2n-2}\, b + a^{2n-3}\, b^2 - \ldots\ldots - b^{2n-1}.$

b. Wurzeln.

(Tafel der Quadrat- und Kubikwurzeln ganzer Zahlen sieh S. 1 bis 21.)

1. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$

2. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}.$

3. $\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}.$

4. $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}.$

5. $a^n = (a^p)^{n:p} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^{np}.$

6. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:q]{a^{n:q}} = \sqrt[m:q]{\sqrt[q]{a^n}}.$

7. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m:n]{a}.$

8. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$

9. $\sqrt{a^2} = \pm a. \quad \sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}. \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -a^{\frac{1}{2n+1}}.$

10. $\sqrt{a^2 \pm k} = a \pm \frac{k}{2a},$ $\sqrt[3]{a^3 \pm k} = a \pm \frac{k}{3a^2},$ wenn k gegen a sehr klein ist.

11. Ist $a > b$, so ist $\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}960\,a + 0{,}368\,b$. Der Fehler ist kleiner, als 4% des wirklichen Wertes.

Genauer ist (nach Schlömilch):

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0{,}9938\,a + 0{,}0703\,b + 0{,}3567\,\frac{b^2}{a}.$$

12. Ist $a > b > c$, so ist $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 0{,}939\,a + 0{,}389\,b + 0{,}297\,c$. Der Fehler ist kleiner als 6% des wirklichen Wertes.

Imaginäre Größen.

13. $i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$

$$i^{4n+k} = i^k, \quad \frac{1}{i} = -i.$$

14. Jede Funktion imaginärer Gröfsen läfst sich auf die Form $a \pm bi$ bringen, wo a und b reelle Werte sind.

15. $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$.

16. $\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.

17. Wenn $a + bi = 0$, so ist $a = 0$, $b = 0$.
Wenn $a + bi = \alpha + \beta i$, so ist $a = \alpha$, $b = \beta$.

18. Jede komplexe Gröfse $a \pm bi$ läfst sich auf die Form bringen:

$$a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi);$$

dabei ist:
$$r = \sqrt{a^2+b^2}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a};$$
$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

19. **Wurzeln der Einheit.**

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[n]{1} &= \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sqrt[n]{-1} &= \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} \end{aligned}\right\}$$

Hierin ist k eine ganze positive Zahl von 0 bis $\frac{n}{2}$.

20. $$\left.\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= e^{ix}, \\ \cos x - i \sin x &= e^{-ix}, \end{aligned}\right\}$$ wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

21. $(\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x+y) \pm i \sin(x+y)$.

22. $(\cos x \pm i \sin x):(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x-y) \pm i \sin(x-y)$.

23. $1:(\cos x + i \sin x) = \cos x - i \sin x$.

24. **Moivre'scher Satz.** (Gültig für beliebige Werte von m.)

$$(\cos x \pm i \sin x)^m = \cos mx \pm i \sin mx.$$

c. Logarithmen.

(Tafel der Briggischen Logarithmen sieh S. 1—21, der natürlichen S. 22 und 23.)

1. Ist $\overset{b}{\log}\, a = c$, so ist $b^c = a$.

2. $\log(ab) = \log a + \log b$.

3. $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$.

4. $\log(a^n) = n \log a$.

5. $\log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a$.

6. $\overset{a}{\log}\, x = \overset{a}{\log}\, b\; \overset{b}{\log}\, x = \frac{1}{\overset{b}{\log}\, a}\; \overset{b}{\log}\, x$.

7. $\ln x = \ln 10 \log x = 2{,}302585093 \log x$.

8. $\log x = \log e \ln x = 0{,}434294482 \ln x$. ($e = 2{,}718281828459\ldots$)

B. Kettenbrüche.

1. Um den Wert eines in grofsen Zahlen ausgedrückten Verhältnisses näherungsweise in möglichst kleinen Zahlen, jedoch möglichst genau, zu erhalten, dividiert man die eine Zahl durch die andere und durch den jedesmaligen Rest den letzten Divisor; so kann, wenn die Quotienten der Reihe nach mit $q_0, q_1, q_2 \ldots$ bezeichnet werden, jedes Verhältnis $M:N$ in Form eines **Kettenbruches** ausgedrückt werden:

$$\frac{M}{N} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$$

Bricht man der Reihe nach beim ersten, zweiten, dritten .... Quotienten ab, so entstehen die sogen. **Näherungsbrüche**:

$$\frac{m_0}{n_0} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{m_1}{n_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1},$$

$$\frac{m_2}{n_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = \frac{(q_0 q_1 + 1) q_2 + q_0}{q_1 q_2 + 1}, \ldots\ldots$$

Die Näherungsbrüche sind abwechselnd kleiner und gröfser als der Wert $\frac{M}{N}$, welchem sie sich unaufhörlich nähern.

2. $$\frac{m_k}{n_k} = \frac{m_{k-1} q_k + m_{k-2}}{n_{k-1} q_k + n_{k-2}}.$$

3. $$\frac{m_k}{n_k} - \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{n_k n_{k+1}}.$$

4. $$m_k n_{k+1} - m_{k+1} n_k = (-1)^{k+1}.$$

5. $$\frac{M}{N} - \frac{m_k}{n_k} < \frac{(-1)^k}{n_k n_{k+1}} < \frac{(-1)^k}{n_k^{\,2}}.$$

C. Kombinationslehre.

1. Die Anzahl der möglichen **Permutationen** von n ungleichen Elementen beträgt $n!$

Befinden sich unter den n Elementen p gleiche einer Art, q gleiche einer anderen Art, r gleiche einer dritten Art u. s. w., so ist die Anzahl der möglichen Permutationen $= \frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots.}$.

2. Die Anzahl der möglichen **Kombinationen** von n Elementen zur $r$ten Klasse (d. h. zu je r Elementen) beträgt:

a) ohne Wiederholung, d. h. wenn jede Komplexion dasselbe Element nur einmal enthalten darf: $(n)_r$;

b) mit Wiederholung, d. h. wenn jede Komplexion dasselbe Element r-mal enthalten darf: $(n+r-1)_r$.

3. Die Anzahl der möglichen **Variationen** von n Elementen zur $r$ten Klasse beträgt:

a) ohne Wiederholung (entsprechend wie unter 2): $(n)_r\, r!$;

b) mit Wiederholung: n^r.

Man erhält die Variationen aus den Kombinationen, indem man die einzelnen Komplexionen der letzteren permutiert.

D. Determinanten.

1. Eine Determinante von n Zeilen und n Kolonnen (n^2 Elementen) ist vom n^{ten} Grade.

2. Die allgemeine Form der Determinante n^{ten} Grades ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 c_2 \dots p_2 \\ a_3 b_3 c_3 \dots p_3 \\ \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots \quad\quad \vdots \\ a_n b_n c_n \dots p_n \end{vmatrix} = \Sigma\,(\pm\, a_1 b_2 c_3 \dots p_n),$$

wenn $a, b, c \,..\, p$ n Elemente bedeuten. Die Determinante wird aufgelöst, indem man als erstes Glied der Auflösung die vom ersten Element der ersten bis zum letzten Element der letzten Zeile gehende Diagonalreihe bildet und die übrigen Glieder durch Permutation (s. S. 36) der Zeiger ableitet.

Die so entstehenden $n!$ Glieder sind zur Hälfte positiv und zur Hälfte negativ, je nachdem die Zahl der Umkehrungen (Inversionen) in der betreffenden Komplexion gerade oder ungerade ist.

Eine Umkehrung bildet jedes Elementenpaar des Gliedes, in welchem ein dem zu permutierenden Zeiger nach höheres Element einem niederen vorangeht.

3. Die Berechnung einer Determinante vom n^{ten} Grade kann auch erfolgen, indem man sie in n Unterdeterminanten vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade zerlegt:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}.$$

Die Unterdeterminante zum Element a_p wird erhalten durch Streichung der Kolonne a und der p^{ten} Reihe in der ursprünglichen Determinante. Sie ist positiv oder negativ, je nachdem der Zeiger ungerade oder gerade ist.

4. In einer Determinante kann man die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen oder zwei Kolonnen mit einander, so ist die neue Determinante gleich der ersten mit entgegengesetztem Vorzeichen.

6 Sind die Elemente zweier Zeilen oder zweier Kolonnen einer Determinante entsprechend gleich oder proportional, so ist dieselbe gleich Null.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{vmatrix} a_1 a_1 b_1 \\ a_2 a_2 b_2 \\ a_3 a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{vmatrix} a_1 na_1 b_1 \\ a_2 na_2 b_2 \\ a_3 na_3 b_3 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} a_1 a_1 b_1 \\ a_2 a_2 b_2 \\ a_3 a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Eine Determinante wird mit einer Zahl multiplizirt oder dividiert, indem man alle Elemente einer Zeile oder Kolonne mit derselben multipliziert oder dividiert.

$$p \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pb_1 & pc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 b_1 c_1 \\ pa_2 b_2 c_2 \\ pa_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

8. $$\begin{vmatrix} a_1 + p_1 + q_1, & b_1 c_1 \\ a_2 + p_2 + q_2, & b_2 c_2 \\ a_3 + p_3 + q_3, & b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 b_1 c_1 \\ p_2 b_2 c_2 \\ p_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 b_1 c_1 \\ q_2 b_2 c_2 \\ q_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + p_1, & b_1 + q_1 \\ a_2 + p_2, & b_2 + q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 b_1 \\ p_2 b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 q_1 \\ a_2 q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \end{vmatrix}.$$

9. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Zeile oder Kolonne die mit einer beliebigen Zahl multiplizierten Elemente einer parallelen Zeile oder Kolonne addiert.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm pb_1, & b_1 c_1 \\ a_2 \pm pb_2, & b_2 c_2 \\ a_3 \pm pb_3, & b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

10. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 - a, & x_2 - a, & x_3 - a \\ y_1 - b, & y_2 - b, & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x_1 - a, & y_1 - b \\ 1, & x_2 - a, & y_2 - b \\ 1, & x_3 - a, & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\ x_1 y_1 \\ 1\ x_2 y_2 \\ 1\ x_3 y_3 \end{vmatrix}.$$

E. Gleichungen.

a. Gleichungen ersten Grades.

1. Gleichungen mit **2 Unbekannten:**

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{array}\right\}; \quad \begin{array}{l} x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \dfrac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}; \\ y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \dfrac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}. \end{array}$$

2. **Homogene Gleichungen:**

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + b\,y + c\,z = 0 \\ a_2x + b_1y + c_1z = 0 \end{array}\right\}; \quad x:y:z = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

3. Gleichungen mit **3 Unbekannten:**

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array}\right\}. \quad \text{Setzt man } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = D, \text{ so ist:}$$

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} : D; \quad y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} : D; \quad z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} : D.$$

Ueber die arithmetische Bedeutung der Determinanten sieh S. 37.

4. Entsprechend ist die Lösung von n Gleichungen mit n **Unbekannten.** Oder:

Man eliminiere aus sämtlichen Gleichungen durch Zusammenfassen je zweier dieselbe Unbekannte; man erhält dann die um eins geringere Anzahl von Gleichungen **ohne** jene Unbekannte; aus diesen eliminire man eine zweite Unbekannte, wodurch wiederum die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten um eins verringert wird. Wiederholt man dieses Verfahren genügend oft, so erhält man zuletzt 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, die gemäfs 1. zu lösen sind.

Beispiel.

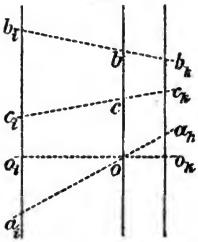
	Faktoren		
$2x - y + 3z + 5u = 29$	3	1	2
$5x + 2y - 2z + 3u = 15$	—5		
$3x - 4y + 7z - u = 12$		5	
$4x + 3y - 5z + 2u = 3$			—5
$-19x - 13y + 19z = 12$	—2	—31	
$17x - 21y + 38z = 89$	1		
$-16x - 17y + 31z = 43$		19	
$55x + 5y = 65$	16	—57	
$285x + 80y = 445$	—1	11	

$$595x = 595; \qquad x = 1.$$
$$595y = 1190; \qquad y = 2.$$
$$19z = 12 + 19x + 13y = 12 + 19 + 26$$
$$= 57; \qquad z = 3.$$
$$u = 3x - 4y + 7z - 12 = 3 - 8 + 21 - 12$$
$$u = 4.$$

5. Zeichnerische Elimination (Verfahren v. Van den Berg-Mehmke).*)

Man ziehe in beliebigen gegenseitigen Abständen so viele zu einander parallele Achsen, als Gleichungen vorhanden sind, wähle auf jeder den Nullpunkt, die Längeneinheit und die positive Richtung beliebig und trage hierauf die Koefficienten einer jeden Gleichung als Strecken (in dem betreffenden Mafsstabe und unter Beachtung des Vorzeichens) auf der zugehörigen Achse von ihrem Anfangspunkte aus ab. Man erhält so für jede Gleichung eine Punktreihe. Will man nun beispielsweise aus der i^{ten} und k^{ten} Gleichung die Unbekannte x (deren (Koefficienten in jenen Gleichungen a_i und a_k seien) eliminieren, so schneide man die Verbindungslinie der Punkte a_i, a_k (s. Abbild. 1) mit der Verbindungslinie der Nullpunkte o_i, o_k und ziehe durch den Schnittpunkt o eine neue Achse parallel zu den übrigen. Dann schneiden die Verbindungslinien der übrigen Paare entsprechender Punkte $b_i\, b_k$, $c_i\, c_k$ .... die neue Achse in einer neuen Punktreihe o, b, c ..., welche der gesuchten Gleichung entspricht.

Abbild. 1.



Dieses Verfahren ist bequem, jedoch bei einer gröfseren Zahl von Gleichungen nicht immer genau genug, und wird zweckmäfsig nur in Verbindung mit dem folgenden Verfahren angewandt.

6. Seidel-Mehmkesches Verfahren.*)

Dasselbe wird angewandt, wenn die Zahl der Gleichungen und Unbekannten sehr grofs ist.

Man bringe zunächst die gegebene Schar von Gleichungen:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_1 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_2 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_3 = 0 \text{ u. s. w.}$$

auf die Form

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \ldots + A_1 = 0$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \ldots + A_2 = 0$$
$$A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + \ldots + A_3 = 0 \text{ u. s. w.}$$

worin

$$A_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + \ldots$$
$$A_{21} = A_{12} = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} + \ldots$$
$$A_{31} = A_{13} = a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} + \ldots \text{ u. s. w.}$$
$$A_1 = a_{11}a_1 + a_{21}a_2 + a_{31}a_3 + \ldots$$
$$A_2 = a_{12}a_1 + a_{22}a_2 + a_{32}a_3 + \ldots \text{ u. s. w.}$$

*) S. Elektrotechnische Zeitschrift, Jahrg. d. 1891.

Man zerlege nunmehr die Schar von Gleichungen, unter thunlichstem Anschlufs an ihre natürliche Beschaffenheit, in Gruppen von 2 oder mehr Gleichungen. Eine solche aus der i^{ten}, k^{ten} und l^{ten} Gleichung gebildete Gruppe sei:

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \ldots + A_{ii}x_i + \ldots + A_{ik}x_k + \ldots + A_{il}x_l + \ldots + A_i = 0$$

$$A_{k1}x_1 + A_{k2}x_2 + \ldots + A_{ki}x_i + \ldots + A_{kk}x_k + \ldots + A_{kl}x_l + \ldots + A_k = 0$$

$$A_{l1}x_1 + A_{l2}x_2 + \ldots + A_{li}x_i + \ldots + A_{lk}x_k + \ldots + A_{ll}x_l + \ldots + A_l = 0.$$

Kennt man bereits angenähert richtige Werte der Unbekannten, so setze man dieselben in die Gleichungen ein, anderenfalls betrachte man Null als ersten Näherungswert einer jeden Unbekannten. Die linken Seiten der Gleichungen mögen hierdurch die als Fehler zu bezeichnenden Werte N_i, N_k, N_l erhalten. Die erforderlichen Verbesserungen der Unbekannten x_i, x_k, x_l, nämlich ξ_i, ξ_k, ξ_l, erhält man dann durch Auflösung der Gleichungen:

$$A_{ii}\xi_i + A_{ik}\xi_k + A_{il}\xi_l + N_i = 0$$

$$A_{ki}\xi_i + A_{kk}\xi_k + A_{kl}\xi_l + N_k = 0$$

$$A_{li}\xi_i + A_{lk}\xi_k + A_{ll}\xi_l + N_l = 0,$$

am besten nach dem unter 5. angegebenen zeichnerischen Verfahren. Nun gehe man zu einer neuen Gruppe über u. s. w. Sind alle Unbekannten verbessert, so wiederhole man, wenn nötig, das Verfahren. Bei der Verbesserung einer Gruppe von Unbekannten läfst sich der Einflufs der übrigen schätzungsweise mehr oder weniger berücksichtigen.

b. Gleichungen zweiten Grades.

1. Algebraische Auflösung.

1. $x^2 + px + q = 0;$ $\qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$

$ax^2 + bx + c = 0;$ $\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

2. $x^{2n} + px^n + q = 0;$ $\qquad x = \sqrt[n]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$

3. Ist $x \pm y = s$ und $xy = p$, so ist:

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 \mp 4p}}{2}; \quad y = \pm\frac{s - \sqrt{s^2 \mp 4p}}{2}.$$

2. Goniometrische Auflösung. (Zur Anwendung ununterbrochener logarithmischer Rechnung bei vielstelligen Zahlen.)

1. Fall. $x^2 \pm px - q = 0$; p und q positiv.

Man bestimme einen Winkel φ zwischen 0° und 90° so, dafs:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{q}}{\frac{1}{2} p},$$

dann sind die Wurzeln:

$$x_1 = \pm \sqrt{q} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi, \quad x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}.$$

2. Fall. $x^2 \pm px + q = 0$; p und q positiv.

Nach Berechnung des im ersten Quadranten liegenden Winkels φ aus:

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{q}}{\frac{1}{2} p}$$

bestimmt man die Wurzeln mittelst der Formeln:

$$x_1 = \mp \sqrt{q} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi, \quad x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}.$$

Findet sich $\sin \varphi > 1$, so sind die Wurzeln imaginär, nämlich:

$$x = \sqrt{q} (\cos \psi \pm i \sin \psi),$$

wo: $$\cos \psi = \mp \frac{\frac{1}{2} p}{\sqrt{q}} \text{ (ψ zwischen 0° und 180°).}$$

c. Gleichungen dritten Grades.

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Man setze $$z = x - \tfrac{1}{3} a,$$

so entsteht eine reduzierte kubische Gleichung von der Form:

$$x^3 + px + q = 0.$$

1. Algebraische Auflösung. Die Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 + px + q = 0$$

sind nach der Cardanischen Formel:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q + \sqrt{(\tfrac{1}{2} q)^2 + (\tfrac{1}{3} p)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q - \sqrt{(\tfrac{1}{2} q)^2 + (\tfrac{1}{3} p)^3}},$$

$$x_2 = w_1 \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q + \sqrt{(\tfrac{1}{2} q)^2 + (\tfrac{1}{3} p)^3}} + w_2 \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q - \sqrt{(\tfrac{1}{2} q)^2 + (\tfrac{1}{3} p)^3}},$$

$$x_3 = w_2 \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q + \sqrt{(\tfrac{1}{2} q)^2 + (\tfrac{1}{3} p)^3}} + w_1 \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q - \sqrt{(\tfrac{1}{2} q)^2 + (\tfrac{1}{3} p)^3}},$$

wo w_1 und w_2 die imaginären Wurzeln $\sqrt[3]{1}$ bezeichnen, nämlich:

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ist $(\frac{1}{2} q)^2 + (\frac{1}{3} p)^3 < 0$, so erscheinen alle drei Wurzeln in imaginärer Form, während sie in Wirklichkeit reell sind. Es ist dann die goniometrische Auflösung anzuwenden (s. folg. S., 3. Fall).

2. Goniometrische Auflösung.*)

1. Fall. $x^3 + px \pm q = 0$; p und q positiv.
Man berechnet den Winkel ψ aus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p}}{\frac{1}{2} q}$$

und hierauf den Winkel ψ aus:

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi};$$

dann ist: $$x_1 = \mp 2 \sqrt{\tfrac{1}{3} p} \operatorname{ctg} 2\psi.$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3} p} \operatorname{ctg} 2\psi + i \frac{\sqrt{p}}{\sin 2\psi}, \quad x_3 = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3} p} \operatorname{ctg} 2\psi - i \frac{\sqrt{p}}{\sin 2\psi}.$$

2. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv, $(\frac{1}{3} p)^3 < (\frac{1}{2} q)^2$.
Man hat die Hülfswinkel φ und ψ zu bestimmen aus:

$$\sin \varphi = \frac{\frac{1}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p}}{\frac{1}{2} q}, \qquad \operatorname{tg} \psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi}.$$

Dann wird: $$x_1 = \mp 2 \frac{\sqrt{\frac{1}{3} p}}{\sin 2\psi},$$

$$x_2 = \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{3} p}}{\sin 2\psi} + i \sqrt{p} \operatorname{ctg} 2\psi, \quad x_3 = \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{3} p}}{\sin 2\psi} - i \sqrt{p} \operatorname{ctg} 2\psi.$$

3. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv, $(\frac{1}{3} p)^3 > (\frac{1}{2} q)^2$.
Man bestimmt den Winkel φ aus:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{2} q}{\frac{1}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p}},$$

dann ist:

$$x_1 = \mp 2 \sqrt{\tfrac{1}{3} p} \cos \tfrac{1}{3} \varphi, \quad x_2 = \mp 2 \sqrt{\tfrac{1}{3} p} \cos (\tfrac{1}{3} \varphi + 120^0),$$
$$x_3 = \mp 2 \sqrt{\tfrac{1}{3} p} \cos (\tfrac{1}{3} \varphi + 240^0).$$

4. Fall. $x^3 - px \pm q = 0$; p und q positiv, $(\frac{1}{3} p)^3 = (\frac{1}{2} q)^2$.

$$x_1 = x_2 = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3} p}, \quad x_3 = \mp 2 \sqrt{\tfrac{1}{3} p}.$$

d. Gleichungen vierten Grades.

Ferrarisches Verfahren. Es sei aufzulösen die Gleichung:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1.}$$

so ist für jeden Wert von z:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} x + z\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + 2z\right) x^2 + (az - c) x + z^2 - d. \tag{2.}$$

---

*) Für den 1. und 2. Fall (1 reelle Wurzel) läfst sich eine einfachere Auflösung mittelst der Hyperbelfunktionen finden. (Hierüber sieh Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen u. s. w. Berlin 1890, Ernst & Korn.)

Bestimmt man z aus der Gleichung dritten Grades:

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + 2z\right)\left(z^2 - d\right) = \frac{(az - c)^2}{4}$$

oder
$$2z^3 - bz^2 + \left(\frac{ac - 4d}{2}\right)z - \left(\frac{a^2}{4} - b\right)d - \frac{c^2}{4} = 0, \quad (3.)$$

so wird auch die rechte Seite der Gleichung (2.) ein vollständiges Quadrat. Nachdem beiderseits die Quadratwurzel ausgezogen, erhält man, mit Berücksichtigung des doppelten Vorzeichens, zwei aufzulösende quadratische Gleichungen, deren Wurzeln die vier Wurzeln der Gleichung vierten Grades sind.

e. Näherungsweise Lösung der Gleichungen.

1. Newtons Verfahren.

Die aufzulösende Gleichung sei $f(x) = 0$; die erste nach x genommene Ableitung (s. S. 66) von $f(x)$ sei $= f'(x)$. Man suche zunächst probeweise einen Näherungswert x_1 einer Wurzel der Gleichung; dann erhält man einen genaueren Wert x_2 der Wurzel, wenn man setzt:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)};$$

ein verbesserter Näherungswert ist:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ u. s. w.}$$

Die Rechnung wird oft vereinfacht, wenn man zur Bestimmung von x_1 sich des **zeichnerischen Verfahrens** bedient, indem man nach einander x einige Werte in ganzen Zahlen beilegt, die berechneten $f(x)$ zu den bezüglichen x als Ordinaten aufträgt, durch deren Endpunkte eine Kurve zeichnet und denjenigen Wert x_1 von x aus der Zeichnung abgreift, für welchen $f(x) = 0$ wird.*)

Wählt man hierbei nur zwei Werte x_o und x_u von x, in deren Nähe die Wurzel liegt, so wird die Kurve zur geraden Linie; der Näherungswert x_1 der Wurzel ergiebt sich dann auch mittelst der **Regula falsi** aus:

$$x_1 = \frac{x_o f(x_u) - x_u f(x_o)}{f(x_u) - f(x_o)}.$$

2. Lagrangesche Interpolationsformel.

1. Ist $y = F(x)$ eine eindeutige Funktion von x, welche mit ihren Ableitungen innerhalb des betrachteten Intervalls endlich und stetig bleibt, und sind die zu den Werten $x_1, x_2 \ldots x_n$ gehörenden Werte

*) Die rechnerische Bestimmung des Wertes x_1 erfolgt genauer mittelst der unter 2. gegebenen Lagrangeschen Formel.

von $F(x) = y_1, y_2 \ldots y_n$ bekannt, so kann man näherungsweise, wenn x in der Umgebung von $x_1, x_2 \ldots x_n$ liegt, setzen:

$$F(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} F(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} F(x_2) + \ldots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} F(x_n).$$

Mit Hülfe dieser Formel*) kann man also zwischen die Gröfsen $y_1, y_2 \ldots y_n$ nach beliebigen Intervallen Werte einschalten, ohne $F(x)$ in entwickelter Form zu erkennen.

2. Ist die Gleichung $f(z) = 0$ aufzulösen, so berechne man zu einigen in der Nähe einer Wurzel liegenden Werten von $z, z_1\ z_2 \ldots$ die zugehörigen Werte von $f(z)$, $f(z_1) = x_1$, $f(z_2) = x_2 \ldots$; alsdann setze man in die Lagrangesche Formel $F(x_1) = z_1$, $F(x_2) = z_2 \ldots$, $x = 0$, und für $x_1, x_2 \ldots$ die soeben berechneten Werte ein, so erhält man in $F(x)$ angenähert die gesuchte Wurzel z.

3. Logarithmisch-zeichnerisches Verfahren.**)

1. Man zerlegt die linke Seite der Gleichung $f(x) = 0$ auf beliebige Weise in eine Differenz $(f_1(x) - f_2(x))$ zweier Funktionen, setzt jede gleich y, wodurch die beiden Gleichungen:

$$y = f_1(x), \qquad y = f_2(x)$$

entstehen, und zeichnet die zu letzteren gehörigen Kurven, wobei jedoch nicht x und y selbst, sondern $\log x$ und $\log y$ zu Koordinaten eines veränderlichen Punktes genommen werden. Die Abscissen der Schnittpunkte jener Kurven sind die Logarithmen der reellen positiven Wurzeln von $f(x) = 0$. Die negativen Wurzeln ergeben sich durch Bestimmung der positiven Wurzeln der Gleichung $f(-x) = 0$.

2. Im Falle einer algebraischen Gleichung der Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

wird die erforderliche Zerlegung am einfachsten durch Trennung der positiven und negativen Glieder bewirkt. Die Division mit einer Potenz von x kann vorteilhaft sein.

3. Die Gleichung $y = ax^n$ stellt logarithmisch (d. h. als $\log y = n \log x + \log a$) eine gerade Linie vor, welche durch den Punkt $\log a$ der Ordinatenachse geht und deren Neigung zur Abscissenachse $n : 1$ beträgt. Hierbei kann n jeden beliebigen Wert annehmen.

---

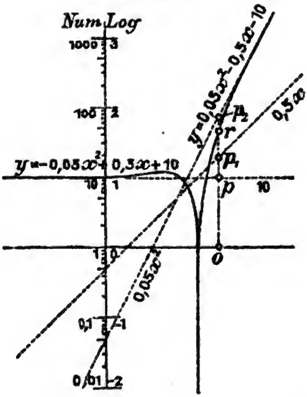
*) In rechtwinkligen Koordinaten stellt dieselbe eine parabolische Linie $n$ten Grades dar. Eine wesentliche Vereinfachung erhält die Formel durch Annahme gleicher Intervalle von x.

**) Mehmke, Civilingenieur, Bd. XXXV, S. 617, 1889.

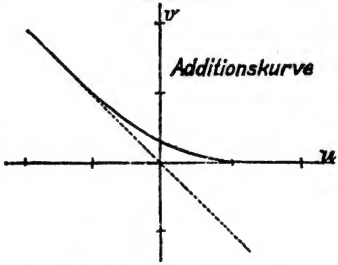
4. Ist $y = ax^n \pm a_1 x^{n_1} \pm \ldots$, so zeichnet man die den einzelnen Gliedern entsprechenden geraden Linien.

Schneidet (s. Abbild. 2) eine beliebige Parallele zur Ordinatenachse die Abscissenachse in o, jene Geraden in $p, p_1 \ldots .$, so mifst man die Ordinaten $op, op_1 \ldots$ mit dem logarithmischen Mafsstabe, bildet die algebraische Summe der gefundenen Zahlenwerte und trägt sie mit demselben Mafsstabe als Ordinate or auf, dann ist r ein Punkt der zur Funktion y gehörigen Kurve. Beispiel s. Abbild. 2.

Abbild. 2.



Abbild. 3.



Abbild. 4.



Abbild. 5.



5. Die logarithmische Addition bezw. Subtraktion zweier Ordinaten op und op_1 läfst sich auch mit Hülfe der **Additionskurve** (Abbild. 3) ausführen, welche erhalten wird, wenn man die zu verschiedenen t gehörigen Werte von $u = \log t$, $v = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ als Abscissen und Ordinaten im bisherigen Mafsstabe aufträgt. Man sucht zu pp_1 (s. Abbild. 4) als Abscisse die zugehörige Ordinate der Additionskurve und macht $p_1 r$ gleich derselben, dann ist:

$$or = \log(\text{num}\, op + \text{num}\, op_1).$$

Oder im Falle der Subtraktion: Man sucht zu pp_1 (s. Abbild. 5) als Ordinate die zugehörige Abscisse der Additionskurve und macht (unter Beachtung des Vorzeichens) pr gleich dem Negativen derselben, dann ist:

$$or = \log(\text{num}\, op_1 - \text{num}\, op).$$

Koordinatentafel zur Additionskurve.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	v = 0,301	0,254	0,212	0,176	0,146	0,119	0,097	0,079	0,064	0,051
1,	0,041	0,033	0,027	0,021	0,017	0,014	0,011	0,009	0,007	0,005
2,	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Für $u_1 = -u$ ist $v_1 = u + v$.

F. Reihen.*)

a. Arithmetische Reihen.

Für die arithmetische Reihe $a, a+d, a+2d, \ldots a+(n-1)d$ ist das n^{te} Glied:

$$u = a + (n-1)\,d,$$

und die Summe der n ersten Glieder:

$$S = \tfrac{1}{2}(a+u)\,n = [a + \tfrac{1}{2}(n-1)\,d]\,n.$$

b. Höhere arithmetische Reihen.

Ist $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ eine höhere arithmetische Reihe,
$\triangle a_1, \triangle a_2, \triangle a_3 \ldots \triangle a_{n-1}$ ihre erste,
$\triangle^2 a_1, \triangle^2 a_2, \ldots \triangle^2 a_{n-2}$ ihre 2^{te} Differenzenreihe u. s. w.,
ist also $\triangle a_1 = a_2 - a_1$, $\triangle a_2 = a_3 - a_2$, $\triangle^2 a_1 = \triangle a_2 - \triangle a_1$ u. s. w., so ist das n^{te} Glied der Hauptreihe:

1. $a_n = a_1 + (n-1)\triangle a_1 + (n-1)_2 \triangle^2 a_1 + (n-1)_3 \triangle^3 a_1 + \ldots\ldots,$

und die Summe der n ersten Glieder:

2. $\Sigma a_n = n a_1 + (n)_2 \triangle a_1 + (n)_3 \triangle^2 a_1 + (n_4) \triangle^3 a_1 + \ldots\ldots$

(Ueber den Binominalkoefficienten (n_p) s. S. 32.)

Die Formel für das n^{te} Glied dient auch für gebrochene Werte von n zum Einschalten von Gliedern zwischen die Glieder einer gegebenen Reihe.

Ist eine höhere arithmetische Reihe von der k^{ten} Ordnung, so schliefst sowohl die Formel für a_n, als auch für Σa_n mit dem Gliede ab, welches $\triangle^k a_1$ enthält.

Eine Reihe von n Gliedern kann höchstens von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sein, in welchem Falle obige Formeln mit dem Gliede $\triangle^{n-1} a_1$ schliefsen.

c. Geometrische Reihen.

Für die geometrische Reihe: $a, aq, aq^2, \ldots aq^{n-1}$ ist das n^{te} Glied:

$$u = aq^{n-1},$$

die Summe der n ersten Glieder:

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{qu - a}{q-1}.$$

In $n = \infty$ und q ein echter Bruch, so hat man:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

---

*) Binomische Reihe s. S. 32 und 33.

d. Einige besondere Reihen.

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + u = \frac{(u+p)(u-p+1)}{2}$.

3. $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + 2n = n(n+1)$.

4. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + (2n-1) = n^2$.

5. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$.

6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

7. $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots\ldots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$.

8. $\left[\frac{1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots\ldots + n^m}{n^{m+1}}\right]_{n=\infty} = \frac{1}{m+1}$.

e. Exponential- und logarithmische Reihen.

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots; -\infty < x < +\infty$.

$e = 2{,}718281828459\ldots$ ist die Grundzahl der natürlichen Logarithmen.

2. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \ldots; -\infty < x < +\infty$.

3. $\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \ldots; x < 1$ (absolut).

4. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right); \quad x < 1$ (absolut).

5. $\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right); \quad x > 1;\ x < -1$.

6. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \ldots\right];$

$$0 < x < \infty.$$

7. $\ln\frac{x+y}{x} = 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \ldots\right];$

$$y^2 < (2x+y)^2.$$

f. Reihen für die goniometrischen Funktionen und deren Umkehrung.

Die Winkel sind hier durch ihre Kreisbögen gemessen, also in Teilen des Halbmessers ausgedrückt zu verstehen.

1. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots; \; -\infty < x < +\infty.$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots; \; -\infty < x < +\infty.$

3. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17 \cdot x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62 \cdot x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots; \; -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}.$

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2\, 5} - \frac{2x^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \ldots; \; -\pi < x < +\pi.$

5. $\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots; \; -1 < x < +1.$

6. $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots; \; -1 < x < +1.$

g. Reihen für die Hyperbelfunktionen und deren Umkehrung.*)

1. $\operatorname{Sin} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots; \; -\infty < x < +\infty.$

2. $\operatorname{Cof} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots; \; -\infty < x < +\infty.$

3. $\operatorname{Tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{3 \cdot 5} - \frac{17 \cdot x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62 \cdot x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \ldots; \; -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}.$

4. $\operatorname{Ctg} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{2x^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \ldots; \; -\pi < x < +\pi.$

5. $\operatorname{Ar\,Sin} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots; \; -1 < x < +1.$

6. $\operatorname{Ar\,Tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots; \; -1 < x < +1.$

G. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Der Wert K_1 eines Kapitals K nach n Jahren beträgt bei einem Zinsfuſs von k Prozent:

---

*) S. S. 58.

a) bei **jährlichen** Zinseszinsen:

$$K_1 = Kp^n,$$

worin $p = 1 + \frac{k}{100}$ den jährlichen Diskontfaktor bezeichnet;

b) bei **halbjährlichen** Zinseszinsen (Staatspapiere):

$$K_1 = Kq^{2n},$$

worin $q = 1 + \frac{k}{200}$ den halbjährlichen Diskontfaktor bezeichnet;

c) bei **stetigen** Zinseszinsen (wobei die Zinsen in jedem Augenblicke zum Kapital geschlagen werden):

$$K_1 = Ke^{\frac{kn}{100}},$$

worin e (= 2,7182818285) die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Für jährliche Zinseszinsen gelten ferner folgende Regeln:

2. Legt man von heute ab am Anfang jedes Jahres eine Summe r zurück, so ist der Wert des Zurückgelegten am Ende des n^{ten} Jahres einschliefslich der alsdann fälligen Zinsen:

$$W = rp\frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

3. Wird das Kapital K am Ende jedes Jahres noch um die gleiche Summe r vermehrt oder vermindert, so beträgt sein Wert nach n Jahren:

$$K_1 = Kp^n \pm \frac{r(p^n - 1)}{p - 1}.$$

4. Das Kapital K wird unter denselben Bedingungen einem anderen Kapital K_1 gleich geworden sein nach

$$n = \frac{\log[(p-1)K_1 \pm r] - \log[(p-1)K \pm r]}{\log p} \text{ Jahren.}$$

5. In dem Falle, wo die jährlich fortgenommene Summe r gröfser ist, als die jährlichen Zinsen des Kapitals, wird das letztere aufgezehrt sein nach

$$n = \frac{\log r - \log[r - (p-1)K]}{\log p} \text{ Jahren.}$$

6. Soll eine Rente r für die folgenden n Jahre gekauft werden, so hat man dafür zu zahlen:

$$K_1 = \frac{r(p^n - 1)}{p^n(p - 1)}.$$

III. GONIOMETRIE UND TRIGONOMETRIE.

A. Goniometrische Formeln.

(Tafeln der goniometrischen Funktionen s. S. 24 bis 27.)

Grad	0	90	180	270	360	30	45	60
sin	0	$+1$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	$+1$	0	-1	0	$+1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	∞	0	∞	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	∞	0	∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

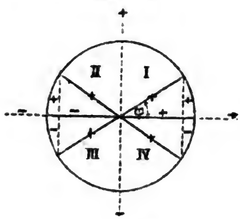
Ist α ein Winkel $< 90^0$, so ist, vorausgesetzt (Abbild. 6):

	φ liegt zwischen				φ ist $=$			
	0^0 u. 90^0	90^0 u. 180^0	180^0 u. 270^0	270^0 u. 360^0	$\pm\alpha$	$90\pm\alpha$	$180\pm\alpha$	$270\pm\alpha$
$\sin\varphi =$	$+$	$+$	$-$	$-$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\varphi =$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi =$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi =$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$

a. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$
2. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1.$
3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$
4. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$
5. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$
6. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$

Abbild. 6.



7. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$

8. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$

9. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$

10. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$

b. Beziehungen der Funktionen zweier Winkel.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta] : [1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta].$
4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1] : [\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha].$

5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$
6. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$
7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$
8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$
9. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$ 10. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

11. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$
12. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$

13. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$
14. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta).$
15. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).$

c. Formeln für die Vielfachen und Teile eines Winkels.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\ \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$
2. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$
3. $\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - (n)_3\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + (n)_5\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots.$
4. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$
5. $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$
6. $\cos n\alpha = \cos^n\alpha - (n)_2\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + (n)_4\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots.$

7. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

8. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

9. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

10. $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

11. $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12. $\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$.

13. $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

14. $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

15. $\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{1\pm\sin 2\alpha}=\sqrt{2}\sin(\alpha\pm\frac{1}{4}\pi)$.

(Ueber den Binomialkoefficienten $(n)_p$ s. S. 32 u. 33.)

d. Potenzen von Sinus und Cosinus.

1. $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$.
2. $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$.
3. $4\sin^3\alpha=-\sin 3\alpha+3\sin\alpha$.
4. $4\cos^3\alpha=\cos 3\alpha+3\cos\alpha$.

5. Wenn n ungerade:

$$\sin^n\alpha=\left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1}[\sin n\alpha-(n)_1\sin(n-2)\alpha+(n)_2\sin(n-4)\alpha$$
$$-(n)_3\sin(n-6)\alpha+\ldots+(n)_{\frac{n-3}{2}}\sin 3\alpha-(n)_{\frac{n-1}{2}}\sin\alpha].$$

Wenn n gerade:

$$\sin^n\alpha=\frac{1}{2^{n-1}i^n}[\cos n\alpha-(n)_1\cos(n-2)\alpha+(n)_2\cos(n-4)\alpha\ldots$$
$$-(n)_{\frac{n-4}{2}}\cos 4\alpha+(n)_{\frac{n-2}{2}}\cos 2\alpha]+(n)_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2^n i^n}\right).$$

6. Wenn n ungerade:

$$\cos^n\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}[\cos n\alpha+(n)_1\cos(n-2)\alpha+(n)_2\cos(n-4)\alpha$$
$$+(n)_3\cos(n-6)\alpha+\ldots+(n)_{\frac{n-3}{2}}\cos 3\alpha+(n)_{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha].$$

Wenn n gerade:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} [\cos n\alpha + (n)_1 \cos(n-2)\alpha + (n)_2 \cos(n-4)\alpha + (n)_3 \cos(n-6)\alpha + \ldots + (n)_{\frac{n-4}{2}} \cos 4\alpha + (n)_{\frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha] + (n)_{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(Ueber den Binomialkoefficienten $(n)_p$ s. S. 32 u. 33, über die Werte der Potenzen von $i = \sqrt{-1}$ s. S. 34.)

e. Beziehungen zwischen den Arcus der verschiedenen Funktionen.

1. $\arcsin u = \arccos \sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{\pi}{2} - \arccos u.$

2. $\arccos u = \arcsin \sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin u.$

3. $\operatorname{arc\,tg} u = \arcsin \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{1}{u}$
$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2u}{1-u^2} = \frac{1}{2} \arcsin \dfrac{2u}{1+u^2} = \frac{1}{2} \arccos \dfrac{1-u^2}{1+u^2}.$

4. $\arcsin u \pm \arcsin v = \arcsin\left(u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2}\right)$
$= \arccos\left(\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} \mp uv\right).$

5. $\arccos u \pm \arccos v = \arcsin\left(v\sqrt{1-u^2} \pm u\sqrt{1-v^2}\right)$
$= \arccos\left(uv \mp \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}\right).$

6. $\operatorname{arc\,tg} u \pm \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{u \pm v}{1 \mp uv}.$

B. Berechnung ebener Dreiecke.

Es seien: a, b, c die Seiten des Dreiecks,
α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel,
ϱ der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises,
r der Halbmesser des umschriebenen Kreises,
F der Flächeninhalt des Dreiecks,
$\frac{1}{2}(a+b+c) = s.$

a. Allgemeine Formeln.

1. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r.$

2. $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$; $b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$; $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

3. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

4. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$.

5. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. 6. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

7. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{\varrho}{s-a}$; $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}$.

8. $(a+b) : c = \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

9. $(a-b) : c = \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

10. $(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

11. $\varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{abc}{4rs} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

12. Die nach c gehende Winkelhalbierende ist

$$w = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

13. Die nach c gehende Mittellinie ist

$$m = \sqrt{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{2a}{b}s(s-a)}.$$

14. $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)} = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$= \varrho^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \varrho s = \frac{abc}{4r}$.

b. Tafel zur Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.

(Inhalt des Dreiecks sieh unter a., sowie unter VII.)

Gegeben:	Gesucht:	Formeln:
a, b, c	α	$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, oder Formel 5. (für kleine Winkel) oder 6. (für Winkel nahe 90°). S. oben.
a, b, α	β	$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$. Für $a > b$ ist $\beta < 90°$, und es gilt nur das obere Zeichen; für $b > a$ giebt es zwei Dreiecke.
	γ	$\gamma = 180° - (\beta + \alpha)$.
	c	$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$.

Gegeben:	Gesucht:	Formeln:
a, α, β	b	$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$.
	c	$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$.
a, b, γ	α	Formel 4. S. 55.
	β	$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. Aus $\frac{\alpha + \beta}{2}$ und $\frac{\alpha - \beta}{2}$ sind α und β zu bestimmen.
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma} = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a - b}{\cos \varphi}$, wenn $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \sqrt{a\,b} \sin \frac{1}{2} \gamma}{a - b}$.

c. Rechtwinkliges Dreieck.

a und b Katheten, c Hypotenuse.

1. $a = c \sin \alpha$.
2. $b = c \cos \alpha$.
3. $a = b \operatorname{tg} \alpha$.
4. $b = a \operatorname{ctg} \alpha$.
5. $F = \frac{1}{2}\,a\,b = \frac{1}{2}\,a^2 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}\,b^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}\,c^2 \sin 2\,\alpha$.

C. Berechnung der Kugeldreiecke.

Es seien: a, b, c die Seiten des Dreiecks,
α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel,
$\frac{1}{2}(a + b + c) = s$,
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \sigma$,
$\alpha + \beta + \gamma - 180^0 = \varepsilon$ (sphärischer Excefs),
F der Inhalt des Dreiecks.

1. $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$.
2. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.
3. $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$.
4. $\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \gamma + \sin c \cos \alpha$.
   $\operatorname{ctg} a \sin b = \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \cos \gamma \cos b$.
5. $\cos \alpha \sin \beta = \sin \gamma \cos a - \sin \alpha \cos c \cos \beta$.
   $\operatorname{ctg} \alpha \sin \beta = \sin c \operatorname{ctg} a - \cos c \cos \beta$.

6. $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$; $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$.

7. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$.

8. $\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \cos\gamma}{\sin\gamma}$.

9. $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$.

10. $F = \frac{\varepsilon}{180}\pi r^2$, wo r der Kugelhalbmesser ist.

Nepersche Analogien.

1. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$.

2. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

Gaufssche Formeln.

1. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

2. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

3. $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

4. $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Für das **rechtwinklige** Kugeldreieck hat man, wenn c die Hypotenuse ist, folgende Formeln:

1. $\cos c = \cos a \cos b = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

2. $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$; 3. $\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$;

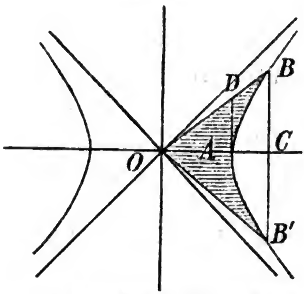
4. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$; 5. $\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$.

IV. HYPERBELFUNKTIONEN.*)

a. Grundformeln.

1. Die Hyperbelfunktionen stehen in ähnlicher Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel, wie die Kreisfunktionen (sin, cos, ...) zum Kreise. Es bezeichne (s. Abbild. 7) O den Mittelpunkt, A einen Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel**), deren reelle Halbachse OA die Länge Eins hat, B einen beliebigen Punkt der Kurve, ferner sei $BB' \perp OA$, C der Schnittpunkt der Sehne BB' mit der reellen Hauptachse, D der Schnittpunkt des Leitstrahles OB mit der Scheiteltangente AD der Hyperbel. Man faſst die Strecken CB, OC, AD als Funktionen der gestrichelten Hyperbelfläche $OBAB'O$ auf und schreibt

Abbild. 7.



$$CB = \mathfrak{Sin}\,\varphi,\quad OC = \mathfrak{Cof}\,\varphi,\quad AD = \mathfrak{Tang}\,\varphi = \mathfrak{Tg}\,\varphi\ ^{***}),$$

wenn Fläche $OBAB'O = 2$. Fläche $OBAO = \varphi$ ist.

Ferner bezeichnet man $\frac{1}{\mathfrak{Tg}\,\varphi}$ mit $\mathfrak{Cotang}\,\varphi$ oder $\mathfrak{Ctg}\,\varphi$.

2. Es ist: $\mathfrak{Sin}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$, $\mathfrak{Cof}\,\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$,

$$\mathfrak{Tg}\,\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{\mathfrak{Cof}\,\varphi} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}},\quad \mathfrak{Ctg}\,\varphi = \frac{\mathfrak{Cof}\,\varphi}{\mathfrak{Sin}\,\varphi} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}},$$

worin e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= 2{,}718281828\ldots$ bedeutet.

---

*) Eine ausführliche Sammlung von Formeln und Tafeln findet sich in: Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen u. s. w., Berlin 1890, Ernst & Korn.

**) Vergl. S. 102.

***) Eine andere Schreibweise ist:
$\sin h\,\varphi$ (= sinus hyperbolicus φ), $\cos h\,\varphi$, $\tan g\, h\,\varphi = \operatorname{tg} h\,\varphi$.

3. Die Hyperbelfunktionen sind, wie die Kreisfunktionen, periodisch, jedoch ist die Periode imaginär und zwar bei den Funktionen $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ gleich $2i\pi$, bei den Funktionen $\mathfrak{Tg}$ und $\mathfrak{Ctg}$ gleich $i\pi$. Für reelle Werte der Veränderlichen φ ist

$$\mathfrak{Cof}\,\varphi \geqq 1, \qquad -1 \leqq \mathfrak{Tg}\,\varphi \leqq +1, \qquad \mathfrak{Ctg}^2\,\varphi \geqq 1,$$

während $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ jeden (positiven oder negativen) Zahlenwert annehmen kann.

4. Es ist: $\mathfrak{Sin}(-\varphi) = -\mathfrak{Sin}\,\varphi$, $\mathfrak{Cof}(-\varphi) = \mathfrak{Cof}\,\varphi$,

$$\mathfrak{Tg}(-\varphi) = -\mathfrak{Tg}\,\varphi, \qquad \mathfrak{Ctg}(-\varphi) = -\mathfrak{Ctg}\,\varphi.$$

5. Ist $\mathfrak{Sin}\,\varphi = u$, so schreibt man

$$\varphi = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u,$$

d. h. $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u$ bedeutet diejenige Hyperbelfläche, deren $\mathfrak{Sin}$ gleich u ist. Entsprechende Bedeutung haben $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,u$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,u$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,u$ *). Man hat

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right).$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right).$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}.$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,u = \frac{1}{2}\ln\frac{u+1}{u-1}.$$

b. Beziehungen zwischen den Kreis- und Hyperbelfunktionen.

1. $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \mathfrak{Cof}\,ix.$

2. $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = -i\,\mathfrak{Sin}\,ix.$

3. $\operatorname{tg} x = -i\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = -i\,\mathfrak{Tg}\,ix.$

4. $\operatorname{ctg} x = i\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = i\,\mathfrak{Ctg}\,ix.$

5. $\cos ix = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \mathfrak{Cof}\,x.$

6. $\sin ix = i\,\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = i\,\mathfrak{Sin}\,x.$

*) Die Bezeichnung kommt von area = Fläche, Flächeninhalt.

7. $\operatorname{tg} ix = i \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = i\,\mathfrak{Tg}\,x.$

8. $\operatorname{ctg} ix = -i \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -i\,\mathfrak{Ctg}\,x$

9. $\operatorname{arc\,cos} x = -i \ln\left[x + i\sqrt{1-x}\,\right] = i\,\mathfrak{Ar\,Cof}\,ix.$

10. $\operatorname{arc\,sin} x = -i \ln\left[\sqrt{1-x^2} + ix\right] = -i\,\mathfrak{Ar\,Sin}\,ix.$

11. $\operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{1+ix}{1-ix} = -i\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,ix.$

12. $\operatorname{arc\,ctg} x = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{ix-1}{ix+1} = i\,\mathfrak{Ar\,Ctg}\,ix.$

13. $\operatorname{arc\,cos} ix = \dfrac{\pi}{2} - i \ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right] = i\,\mathfrak{Ar\,Cof}\,ix.$

14. $\operatorname{arc\,sin} ix = i \ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right] = i\,\mathfrak{Ar\,Sin}\,x.$

15. $\operatorname{arc\,tg} ix = \dfrac{i}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} = i\,\mathfrak{Ar\,Tg}\,x.$

16. $\operatorname{arc\,ctg} ix = -\dfrac{i}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1} = -i\,\mathfrak{Ar\,Ctg}\,x.$

e. Eigenschaften der Hyperbelfunktionen.

Die unter III a bis e (S. 51 u. f.) für die Kreisfunktionen und deren Umkehrung gegebenen Beziehungen gelten in der Form auch für die entsprechenden Hyperbelfunktionen und deren Umkehrungen, jedoch häufig mit Abänderung der Vorzeichen.

Man erhält aus einer Beziehung der Kreisfunktionen die entsprechende Beziehung der Hyperbelfunktionen, indem man in ersterer $\alpha = ix$, $\beta = iy$ setzt, darauf die Gleichungen:

$$\cos ix = \mathfrak{Cof}\,x, \quad \sin ix = i\,\mathfrak{Sin}\,x, \quad \operatorname{tg} ix = i\,\mathfrak{Tg}\,x,$$
$$\operatorname{ctg} ix = -i\,\mathfrak{Ctg}\,x$$

anwendet und, falls erforderlich, beiderseits durch i, i^2 .... dividiert.

Beispiel:

Nach S. 52 b. 11 ist: $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

Für $\alpha = ix$, $\beta = iy$ wird $\sin^2 ix - \sin^2 iy = \sin i(x+y) \sin i(x-y)$.

$$i^2\,\mathfrak{Sin}^2 x - i^2\,\mathfrak{Sin}^2 y = i\,\mathfrak{Sin}(x+y)\; i\,\mathfrak{Sin}(x-y).$$

$$\mathfrak{Sin}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 y = \mathfrak{Sin}(x+y)\,\mathfrak{Sin}(x-y).$$

d. Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Briggischen Logarithmen derselben.

(S. S. 62 bis 66).

Bemerkungen.

1. Die Tafeln auf S. 62 bis 63 geben die Werte von $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ und $\mathfrak{Cof}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 5,09, die Tafeln auf S. 64 bis 65 die um 10 vermehrten Briggischen Logarithmen von $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ und $\mathfrak{Cof}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 5,09, die Tafel auf S. 66 giebt die Werte von $\mathfrak{Tg}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 2.

Z. B.: $\mathfrak{Sin}\,1{,}84 = 1{,}7786$. $\mathfrak{Sin}\,3{,}37 = 14{,}5221$.
$\mathfrak{Cof}\,0{,}65 = 1{,}2188$. $\mathfrak{Cof}\,2{,}26 = 7{,}1831$.
$\log \mathfrak{Sin}\,4{,}52 = 11{,}6619$.

2. Für Werte von $\varphi > 5{,}09$ ist angenähert:

$$\mathfrak{Sin}\,\varphi = \mathfrak{Cof}\,\varphi = \tfrac{1}{2}\,e^{\varphi},$$

und zwar von $\varphi = 5{,}09$ bis 6,1 auf 1 Decimale, von $\varphi = 6{,}1$ bis 8,0 auf 2 Decimalen genau.

3. Für Werte von $\varphi = 2$ aufwärts nähert sich $\mathfrak{Tg}\,\varphi$ mehr und mehr dem Werte 1.

4. Für kleine Werte von φ ist angenähert:

$$\log \mathfrak{Sin}\,\varphi = \log \varphi + \tfrac{1}{3} \log \mathfrak{Cof}\,\varphi.$$

$$\log \mathfrak{Tg}\,\varphi = \log \varphi - \tfrac{2}{3} \log \mathfrak{Cof}\,\varphi.$$

5. Für Werte von $\varphi > 5{,}09$ ist angenähert:

$$\log \mathfrak{Sin}\,\varphi = \log \mathfrak{Cof}\,\varphi = 0{,}43429\,\varphi + 9{,}6990$$

$$\varphi = 2{,}30259\,(\log \mathfrak{Sin}\,\varphi + 0{,}30103).$$

$$\log 0{,}43429 = 9{,}6378. \qquad \log 2{,}30259 = 0{,}3622.$$

6. Die Werte von $\log \mathfrak{Tg}\,\varphi$ und $\log \mathfrak{Ctg}\,\varphi$ ergeben sich mittelst der Tafeln S. 64 und 65 aus:

$$\log \mathfrak{Tg}\,\varphi = \log \mathfrak{Sin}\,\varphi - \log \mathfrak{Cof}\,\varphi\ (+10).$$

$$\log \mathfrak{Ctg}\,\varphi = \log \mathfrak{Cof}\,\varphi - \log \mathfrak{Sin}\,\varphi.$$

7. Die Summe bezw. Differenz der Tafelwerte von $\mathfrak{Cof}\,\varphi$ und $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ für dasselbe φ ergiebt den Wert e^{φ} bezw. $e^{-\varphi}$:

$$\mathfrak{Cof}\,\varphi \pm \mathfrak{Sin}\,\varphi = e^{\pm\varphi}.$$

8. Die Werte von $\mathfrak{Cof}\,\varphi$ und $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ sind unmittelbar die Ordinaten bezw. Bogenlängen der gemeinen Kettenlinie (s. S. 112), wenn φ die Abscisse bezeichnet und der Parameter $h = 1$ ist.

Hyperbelfunktion $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122*
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598
1,0	1,1752	1907	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	8829
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143*	0369*	0597*	0827*	1059*
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499
1,6	2,3756	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	7904	8202	8503	8806	9112
1,8	2,9422	9734	0049*	0367*	0689*	1013*	1340*	1671*	2005*	2341*
1,9	3,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894
2,0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4117
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868
2,3	4,9370	9876	0387*	0903*	1425*	1951*	2483*	3020*	3562*	4109*
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9288	9892
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274
2,6	6,6947	7628	8315	9009	9709	0417*	1132*	1854*	2583*	3319*
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	0285*	1098*
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689
2,9	9,0596	1512	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177
3,0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658
3,1	11,0765	1882	3011	4151	5303	6466	7641	8827	0026*	1236*
3,2	12,2459	3694	4941	6201	7473	8758	0056*	1367*	2691*	4028*
3,3	13,5379	6743	8121	9513	0919*	2338*	3772*	5221*	6684*	8161*
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445
3,9	24,691	24,939	25,190	25,144	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465
5,0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192

Hyperbelfunktion $\mathfrak{Cof}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041
0,1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181
0,2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423
0,3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770
0,4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225
0,5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792
0,6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476
0,7	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286
0,8	1,3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229
0,9	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314
1,0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552
1,1	1,6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7956
1,2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540
1,3	1,9709	9880	0053 *	0228 *	0404 *	0583 *	0764 *	0947 *	1132 *	1320 *
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312
1,5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538
1,6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020
1,7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	0206 *	0492 *	0782 *
1,8	3,1075	1371	1669	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852
1,9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261
2,0	3,7622	7987	8355	8727	9103	9483	9867	0255 *	0647 *	1043 *
2,1	4,1443	1847	2256	2668	3085	3507	3932	4362	4797	5236
2,2	4,5679	6127	6580	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881
2,3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026
2,4	5,5569	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	0125 *	0721 *
2,5	6,1323	1931	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024
2,6	6,7690	8363	9043	9729	0423 *	1123 *	1831 *	2546 *	3268 *	3998 *
2,7	7,4735	5479	6231	6990	7758	8533	9136	0106 *	0905 *	1712 *
2,8	8,2527	3351	4182	5022	5871	6728	7594	8469	9352	0244 *
2,9	9,1146	2056	2976	3905	4844	5791	6749	7716	8693	9680
3,0	10,0678	1683	2700	3728	4765	5813	6872	7942	9022	0113 *
3,1	11,1215	2328	3453	4588	5736	6895	8065	9247	0442 *	1648 *
3,2	12,2866	4097	5340	6596	7864	9146	0440 *	1747 *	3067 *	4401 *
3,3	13,5748	7108	8482	9871	1273 *	2689 *	4120 *	5565 *	7024 *	8498 *
3,4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,139
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466
3,9	24,711	24,959	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037
4,0	27,308	27,582	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155
4,8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198

Briggische Logarithmen der Hyperbelfunktion Sin φ für $\varphi = 0$ bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	8,	0000	3011	4772	6022	6992	7784	8455	9036	9548	459
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1475	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9,4836	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9,6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9,7160	7262	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958	81
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9218	9286	9353	9419	66
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9742	9805	9868	9930	9992	0053*	61
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	10,0701	0758	0815	0871	0927	0982	1038	1093	1148	1203	54
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	10,1788	1340	1892	1944	1995	2046	2098	2148	2199	2250	50
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	49
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711	47
1,6	10,3758	3805	3352	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	45
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	5999	45
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6568	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2050	2099	2143	43
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	44
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792	44
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095	43

Briggische Logarithmen der Hyperbelfunktion 𝔈𝔬𝔣 φ für φ = 0 bis 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0062	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0562	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1263	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1785	1818	1851	33
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2051	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3249	3288	38
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3715	3754	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5545	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554	43
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0894	0938	0981	1024	1067	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2974	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4278	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	9009	9052	9095	43

Hyperbelfunktion $\mathfrak{Tg}\,\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 2,00.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	100
0,1	0,0997	1096	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	97
0,2	0,1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821	92
0,3	0,2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	87
0,4	0,3800	3885	3969	4053	4137	4219	4301	4382	4462	4542	80
0,5	0,4621	4700	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	72
0,6	0,5370	5441	5511	5581	5649	5717	5784	5850	5915	5980	65
0,7	0,6044	6107	6169	6231	6291	6352	6411	6469	6527	6584	57
0,8	0,6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	50
0,9	0,7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	43
1,0	0,7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	37
1,1	0,8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	31
1,2	0,8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	26
1,3	0,8617	8643	8668	8693	8717	8741	8764	8787	8810	8832	22
1,4	0,8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	18
1,5	0,9052	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9202	16
1,6	0,9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9342	13
1,7	0,9354	9367	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	11
1,8	0,9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554	9
1,9	0,9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9619	9626	9633	7
2,0	0,9640										

V. DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

A. Differentialformeln.

In den folgenden Formeln können die Gröfsen x, y, z, u ... entweder unabhängig veränderlich, oder Funktionen ein und derselben Veränderlichen (t) sein.

1. $d\,(a + x) = d\,x.$
2. $d\,(a\,x) = a\,.\,d\,x.$
3. $d\,(x + y + z + u + \ldots) = d\,x + d\,y + d\,z + d\,u + \ldots$
4. $d\,(xy) = x\,.\,dy + y\,.\,dx.$
5. $d\,(xyzu\ldots) = \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u} + \ldots\right) xyzu\ldots$
6. $d\,\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$ 7. $d\,\frac{m + nx}{p + qx} = \frac{np - mq}{(p + qx)^2}\,dx.$

8. $d\,x^m = m\,x^{m-1}\,.\,dx.$ 9. $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$ 10. $d\,\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$

11. $d\,a^x = \ln a\,.\,a^x\,.\,dx.$ 12. $d\,e^x = e^x\,.\,dx.$

13. $d\,x^y = x^{y-1}(x \ln x\,.\,dy + y\,.\,dx).$

14. $d \log^a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{dx}{x}.$ 15. $d \ln x = \frac{dx}{x}$

---

16. $d \sin x = \cos x\,.\,dx.$ 17. $d\,\frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x\,.\,dx}{\sin^2 x}.$

18. $d \cos x = -\sin x\,.\,dx.$ 19. $d\,\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x\,.\,dx}{\cos^2 x}.$

20. $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$ 21. $d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$

---

22. $d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

23. $d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

24. $d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$

25. $d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$

Allgemein:

$$dF(x, y, z, u \ldots) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \ldots$$

$$d^n F(x, y, z, u \ldots) = \frac{\partial^n F}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1}\,dy + \ldots$$

$$\text{sinnbildlich} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \ldots\right)^n,$$

wenn man in dem nach dem Binomischen Satze (S. 32) entwickelten Ausdrucke auf der rechten Seite die n^{te} Potenz von ∂ im Zähler mit der n^{ten} partiellen Ableitung von F vertauscht.

B. Reihen von Maclaurin und Taylor.

1. Reihe von Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n.$$

Hierin bedeuten $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0) \ldots f^{(n-1)}(0)$ die Werte, welche $f(x)$ und ihre Ableitungen nach x für $x = 0$ annehmen. Das Restglied R_n ist zu beurteilen nach:

$$R_n = \frac{(1-\Theta)^{n-1}\, x^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\Theta x);$$

worin Θ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

2. Reihe von Taylor.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n;$$

Restglied $R_n = \dfrac{(1-\Theta)^{n-1}\, h^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x + \Theta h)$.

Θ ein positiver echter Bruch.

3. $f(x+h, y+k) = f(x,y) + \delta f(x,y) + \dfrac{1}{2!} \delta^2 f(x,y) + \dfrac{1}{3!} \delta^3 f(x,y) + \ldots$

Hierin ist:

$$\delta f(x,y) = h \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \text{(Erste Variation von } f(x,y)\text{)}.$$

$$\delta^2 f(x,y) = h^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \quad \text{(Zweite Variation).}$$

$$\delta^3 f(x,y) = h^3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} + 3h^2 k \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\, \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\, \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}.$$

Die Reihen von Maclaurin und Taylor sind nur gültig, wenn $f(x)$ mit sämtlichen Ableitungen in dem Intervall 0 bis x bezw. x bis $x+h$ endlich und stetig bleibt.

C. Werte von unbestimmter Form.

1. $\dfrac{0}{0}$. Nimmt der Bruch $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x = a$ die Form $\dfrac{0}{0}$ an, so erhält man den wahren Wert, wenn man $\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ bildet und darin $x = a$ setzt, wo $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ die Ableitungen von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach x bedeuten. Stellt sich auch $\dfrac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ in der Form $\dfrac{0}{0}$ dar, so ist der wahre Wert $\dfrac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$ u. s. f.

2. $\frac{\infty}{\infty}$. Man verfährt wie bei $\frac{0}{0}$.

3. $0 \cdot \infty$. Wenn in $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ für $x = a$, $\varphi(x) = 0$ und $\psi(x) = \infty$ wird, so setzt man zur Ermittelung des wahren Wertes $\frac{1}{\psi(x)} = f(x)$ und erhält dann den Fall 1.

4. 0^0, 1^∞, ∞^0. Nimmt der Ausdruck $\varphi(x)^{\psi(x)}$ für einen Wert $x = a$ eine dieser Formen an, so ist, wenn man $\varphi(x)^{\psi(x)} = y$ setzt: $\ln y = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x)$; mithin $y = e^{\psi(x) \cdot \ln \varphi(x)}$. Setzt man nun $\ln \varphi(x) = f(x)$, so erhält man den Ausdruck $e^{\psi(x) f(x)}$, in welchem der Exponent nach 3. bestimmt wird.

5. $\infty - \infty$ wird auf Nr. 1 zurückgeführt, indem man dafür schreibt

$$\frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty}}.$$

D. Maxima und Minima.

1. Funktion mit einer Veränderlichen. Die Werte von x, welche $y = f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, findet man aus der Gleichung:

$$f'(x) = 0,$$

und zwar ist:

y ein Maximum, wenn $f''(x) < 0$
„ „ Minimum, „ $f''(x) > 0$ wird.

Ist $f''(x) = 0$, so mufs auch $f'''(x) = 0$ sein, wenn die gefundenen Werte von x Maxima oder Minima bedingen, und entsprechend $f^{IV}(x) \gtrless 0$ werden.

2. Unentwickelte Funktion $f(x, y) = 0$. Die Werte, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen, müssen die Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \quad f(x,y) = 0, \quad \text{und die Bedingung} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \gtrless 0.$$

y ist ein Maximum, wenn $\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] : \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] < 0$

„ „ „ Minimum, „ $\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] : \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] > 0$.

3. Funktion mit 2 Veränderlichen $z = f(x, y)$. Die Werte von x und y, welche das Maximum bezw. Minimum bedingen, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

unter der Bedingung: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2 > 0.$

und zwar hat man, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ beide < 0, ein Maximum,

" $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ " > 0, " Minimum.

4. Relative Maxima und Minima. Sollen die Maxima und Minima der Funktion $v = f(x, y, z)$ unter gleichzeitigem Bestehen der Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ ermittelt werden, so bilde man:

$$u = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$$ und setze:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f'(x) + \lambda \varphi'(x) + \mu \psi'(x) = 0. \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'(y) + \lambda \varphi'(y) + \mu \psi'(y) = 0. \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= f'(z) + \lambda \varphi'(z) + \mu \psi'(z) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Hierin bezeichnet $f'(x)$ die partielle Ableitung von $f(x, y, z)$ nach x u. s. w.

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$
$$\psi(x, y, z) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen eliminiert man zunächst die Hülfsgröfsen λ und μ und findet dann die Werte von x, y, z, welche einem Maximum oder Minimum entsprechen.

E. Zerlegung rationaler Brüche in Teilbrüche.

In Teilbrüche können nur echte rationale Brüche zerlegt werden von der allgemeinen Form:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q}.$$

Man zerlege $F(x)$ in ihre linearen Faktoren durch Auflösen der Gleichung:

$$F(x) = 0.$$

Sind α, β, γ, δ . . . die n Wurzeln derselben, so ist:

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots\ldots$$

Alsdann können drei Fälle eintreten:

1. α, β, γ, δ . . . . . sind sämtlich **reell und verschieden.**

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x - \alpha} + \frac{\beta_1}{x - \beta} + \frac{\gamma_1}{x - \gamma} + \frac{\delta_1}{x - \delta} + \ldots\ldots$$

Die Zähler α_1, β_1, γ_1 . . . . bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\alpha_1 = \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)},\ \beta_1 = \frac{f(\beta)}{F'(\beta)},\ \gamma_1 = \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)},\ \delta_1 = \frac{f(\delta)}{F'(\delta)},$$ u. s. w.

2. Es treten **gleiche** Wurzeln auf, etwa α $m$mal, β $p$mal, so dafs also $F(x) = (x-\alpha)^m (x-\beta)^p (x-\gamma)(x-\delta)\ldots$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{(x-\alpha)^m} + \frac{\alpha_2}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{\alpha_3}{(x-\alpha)^{m-2}} + \ldots + \frac{\alpha_m}{x-\alpha} + \frac{\beta_1}{(x-\beta)^p}$$
$$+ \frac{\beta_2}{(x-\beta)^{p-1}} + \ldots + \frac{\beta_p}{x-\beta} + \frac{\gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\delta_1}{x-\delta} + \ldots\ldots$$

Die $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ hierin ergeben sich als Koefficienten der z-Potenzen beim Ausdividieren des folgenden, in Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von z geordneten Ausdrucks:

$$\frac{f(\alpha+z)}{(\alpha-\beta+z)^p (\alpha-\gamma+z)(\alpha-\delta+z)\ldots} = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \ldots$$
$$+ \alpha_m z^{m-1} + \varphi(z) z^m.$$

Entsprechend die $\beta_1 \ldots \beta_p$ bei Ausführung der Division:

$$\frac{f(\beta+z)}{(\beta-\alpha+z)^m (\beta-\gamma+z)(\beta-\delta+z)\ldots} = \beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2 + \ldots$$
$$+ \beta_p z^{p-1} + \psi(z) z^p.$$

γ_1, δ_1 u. s. w. findet man nach dem unter 1. gegebenen Verfahren.

3. Die Wurzeln sind teilweise **imaginär**, also etwa

$$F(x) = (x-p+qi)(x-p-qi)\,\Phi(x).$$

Man verfährt wie unter 1. und erhält:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-p+qi} + \frac{\alpha_2}{x-p-qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

worin $\alpha_1 = \dfrac{f(p-qi)}{F'(p-qi)} = A - iB$, $\alpha_2 = \dfrac{f(p+qi)}{F'(p+qi)} = A + iB$.

Soll die Rechnung reell durchgeführt werden, so fasse man die beiden imaginären (zugeordneten) Teilbrüche zusammen; es ergiebt sich dann ein reeller Teilbruch mit einem Nenner zweiten Grades und es wird:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2(x-p)A - 2qB}{(x-p)^2 + q^2} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}.$$

F. Integralformeln.

a. Allgemeine Regeln.

In den Formeln 1. bis 3. sind u und v Funktionen der Veränderlichen x.

1. $\int a\,du = a\int du = au + C.$

2. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$ (Zerlegungs-Verfahren).

3. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (Teilweise Integration).

4. $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy$ (Substitutions-Verfahren).

5. $\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,dx = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$ (Differentiation unter dem Integralzeichen).

6. $\int dy \int f(x,y)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy.$ (Umkehr der Reihenfolge der Integrationen).

7. $\int\int \varphi(x)\,.\,dx\,.\,dx = x\int \varphi(x)\,.\,dx - \int x\varphi(x)\,.\,dx.$

b. Rationale Funktionen.

8. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

9. $\int \frac{1}{x^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + C.$

10. $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b\,(n+1)} + C.$

11. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C = \ln cx.$

12. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C = \frac{1}{b}\ln c\,(a+bx).$

13. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C.$

14. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b\,(a+bx)} + C.$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x + C;\ x < 1.$ *)

17. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + C = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x + C;\ x > 1.$ *)

---

*) Ueber die Hyperbelfunktionen und deren Umkehrung vergl. S. 58 u. f.

18. $\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x \right) + C.$

19. $\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{ab} + bx}{\sqrt{ab} - bx} + C$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x \right) + C.$$

20. $\int \frac{dx}{a + 2bx + cx^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b + cx}{\sqrt{ac - b^2}} + C$, wenn $ac - b^2$ positiv;

$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2 - ac} - b - cx}{\sqrt{b^2 - ac} + b + cx} + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{b^2 - ac}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}} + C, \end{aligned}\right\}$ wenn $b^2 - ac$ positiv;

$= -\frac{1}{b + cx} + C$, wenn $b^2 = ac$.

21. $\int \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{a + 2bx + cx^2} = \frac{\beta}{2c} \ln (a + 2bx + cx^2) + \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{a + 2bx + cx^2}.$

22. Ist in $\int \frac{f(x)\, dx}{a + 2bx + cx^2}$ der Zähler $f(x)$ eine ganze Funktion von höherem als erstem Grade, so dividiert man nach absteigenden Potenzen von x bis zu einem Reste ersten Grades und integriert die einzelnen Summanden.

23. $\int \frac{dx}{(a + 2bx + cx^2)^p} = \frac{1}{2(ac - b^2)(p-1)} \cdot \frac{b + cx}{(a + 2bx + cx^2)^{p-1}}$

$$+ \frac{(2p - 3)\, c}{2(ac - b^2)(p - 1)} \int \frac{dx}{(a + 2bx + cx^2)^{p-1}}.$$

24. $\int \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{(a + 2bx + cx^2)^p} = -\frac{\beta}{2c(p - 1)} \cdot \frac{1}{(a + 2bx + cx^2)^{p-1}}$

$$+ \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{(a + 2bx + cx^2)^p}.$$

25. Ist $\int \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = \int \frac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots + px + q}{Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Px + Q}\, dx$ und $m > n$, so sondere man durch Division nach absteigenden Potenzen eine ganze Funktion von x ab und zerlege die übrig bleibende echt gebrochene Funktion in Teilbrüche (s. S. 70 und 71), die man einzeln integriert.

c. Irrationale Funktionen.

26. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3 + C.$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C.$

28. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3b^2}(3\alpha b - 2a\beta + \beta bx)\sqrt{a+bx} + C.$

29. Das Integral $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}$ wird durch die Substitution $\frac{1}{\alpha+\beta x} = y$ auf die Form 28. gebracht.

30. $\int \frac{f(x, \sqrt[n]{a+bx})}{\varphi(x, \sqrt[n]{a+bx})}\,dx.$ Man substituiere $\sqrt[n]{a+bx} = y.$

31. $\int x^{m-1}(a+bx)^n\,dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{n+1}}{(m+n)b}$

$$- \frac{(m-1)a}{(m+n)b}\int x^{m-2}(a+bx)^n\,dx$$

$$= \frac{x^m(a+bx)^n}{m+n} + \frac{na}{m+n}\int x^{m-1}(a+bx)^{n-1}\,dx.$$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$

$$= 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

33.*) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{-x+\sqrt{a^2+x^2}} + C$

$$= \mathfrak{Ar\,Sin}\,\frac{x}{a} + C.$$

34.*) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln(b+cx+\sqrt{c}.\sqrt{a+2bx+cx^2}) + C;\ c > 0.$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\,\frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C \Big\}$$ wenn $ac - b^2$ positiv;

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathfrak{Ar\,Cof}\,\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C \Big\}$$ wenn $b^2 - ac$ positiv;

$$= \frac{-1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C;\ c < 0.$$

---

*) Ueber die Hyperbelfunktionen und deren Umkehrung vergl. S. 53 u. f.

35. $$\int \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{\beta}{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2} + \frac{\alpha c - \beta b}{c}\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C.$$

36. $$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{x^{m-1}X}{mc} - \frac{(m-1)a}{mc}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{X} - \frac{(2m-1)b}{mc}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{X},$$

worin $X = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$.

37.*) $$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C.$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a} + C.$$

38. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

39.*) $$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C.$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{a} + C.$$

40. $$\int \sqrt{a + 2bx + cx^2}\,dx = \frac{b + cx}{2c}\sqrt{a + 2bx + cx^2} + \frac{ac - b^2}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C.$$

41. Das Integral $\int \frac{dx}{(x-a)^p X}$ wird durch die Substitution $\frac{1}{x-a} = y$ auf die Form 36. gebracht.

42. Das Integral $\int \frac{A + Bx}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2} \cdot \frac{dx}{X}$ wird durch die Substitution $x = \frac{py + q}{y + 1}$, wenn man p und q aus den Gleichungen:

$$\gamma pq + \beta(p + q) + \alpha = 0$$
$$cpq + b(p + q) + a = 0$$

bestimmt und alsdann $y^2 = z$ setzt, auf zwei Integrale von der Form

$$\int \frac{dz}{(\alpha_1 + \gamma_1 z)\sqrt{a_1 + c_1 z}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dz}{(\alpha_2 + \gamma_2 z)\sqrt{a_1 z + c_1 z^2}}$$

gebracht, die nach 29. bezw. 41. zu behandeln sind.

43. Um das Integral $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,\frac{dx}{X}$ zu bestimmen, zerlege man $\frac{f(x)}{F(x)}$,

*) Ueber die Hyperbelfunktionen und deren Umkehrung vergl. S. 58 u. f.

erforderlichen Falls nach Absonderung einer ganzen Funktion, in Teilbrüche; man erhält alsdann Integrale von der Form **41.** und. wenn man zugeordnete komplexe Teilbrüche zusammenfafst, von der Form **42.**

44. $$\int \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{X^3} = \frac{(a\beta - b\alpha) + (a\beta - c\alpha)\, x}{(b^2 - ac)\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C.$$

d. Transscendente Funktionen.

45. $$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$ 46. $$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

47. $$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a}\left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \ldots \pm \frac{n!}{a^n x^n}\right] + C.$$

48. $$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C.$$

49. $$\int \frac{(\ln x)^n}{x}\, dx = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C.$$

---

50. $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$$

51. $$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

52. $$\int \sin^2 x\, dx = -\tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{1}{2} x + C.$$

53. $$\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{1}{2} x + C.$$

54. $$\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C.$$

55. $$\int \cos mx\, dx = \frac{\sin mx}{m} + C.$$

56. $$\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

57. $$\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

58. $$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

59. $$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \cos x + C.$$

60. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \sin x + C.$

61. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

62. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

63. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

64. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$

65. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

66. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

67. $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$

68. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C.$

69.*) $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$

70.*) $\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$

71. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx.$

72. $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx.$

73. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$

74. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

75.**) $\int \sin^p x \cos^q x\,dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \sin^p x \cos^{q-2} x\,dx.$

$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cos^q x\,dx.$

---

*) Ist n eine ungerade Zahl, so wende man statt der gegebenen Reduktionsformeln die Substitutionen $\cos x = z$ bezw. $\sin x = z$ an. — Die Integration kann auch erfolgen durch Benutzung der Formeln 1. und 2, S. 59 unter 6. und von Nr. 54. und 55.

**) Ist p oder q eine ungerade Zahl, so gelingt die Integration leichter durch die Substitution $\cos x = z$ bezw. $\sin x = z$.

76. $\int \sin^{-p} x \cos^q x\, dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} + \frac{p-q-2}{p-1} \int \sin^{-p+2} x \cos^q x\, dx.$

77. $\int \sin^p x \cos^{-q} x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} + \frac{q-p-2}{q-1} \int \sin^p x \cos^{-q+2} x\, dx.$

78. $\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x\right) + C$, wenn $a^2 > b^2$;

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b + a\cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2}}{a + b\cos x} + C$

$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x\right) + C.$ } wenn $a^2 < b^2$.

79. $\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b\cos x} + C.$

80. $\int \frac{\sin x\, dx}{a + b\cos x} = -\frac{1}{b} \ln (a + b\cos x) + C.$

81. $\int \frac{A + B\cos x + C\sin x}{a + b\cos x + c\sin x} dx = A \int \frac{d\varphi}{a + p\cos\varphi}$

$+ (B\cos\alpha + C\sin\alpha) \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{a + p\cos\varphi} - (B\sin\alpha - C\cos\alpha) \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{a + p\cos\varphi},$

wenn man $b = p\cos\alpha$, $c = p\sin\alpha$ und $x - \alpha = \varphi$ setzt.

82. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$

83. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$

84. $\int \operatorname{arc\,sin} x\, dx = x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

85. $\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2} + C.$

86. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$

87. $\int \operatorname{arc\,ctg} x\, dx = x \operatorname{arc\,ctg} x + \tfrac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$

88. Die Integration rationaler Ausdrücke der **Hyperbelfunktionen** $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cof}\, x$, $\mathfrak{Tg}\, x$, $\mathfrak{Ctg}\, x$ (und Umkehrungen) erfolgt mittelst der entsprechenden Formeln für die Kreisfunktionen bezw. deren Umkehrungen, indem man $x = iy$ setzt und die Beziehungen berücksichtigt:

$\cos ix = \mathfrak{Cof}\, x$, $\sin ix = i\,\mathfrak{Sin}\, x$, $\operatorname{tg} ix = i\,\mathfrak{Tg}\, x$, $\operatorname{ctg} ix = -i\,\mathfrak{Ctg}\, x$.

(Vergl. S. 60.)

e. Integration durch Reihen-Entwicklung.

Kann man in $\int f(x)\,dx$ die Funktion $f(x)$ in eine Reihe verwandeln, welche innerhalb des gegebenen Intervalls von x konvergent ist, so ist die durch Integration aller Glieder gewonnene Integralreihe für die gegebenen Grenzen konvergent.

Aus der Maclaurinschen Reihe (s. S. 67) folgt:

89. $$\int f(x)\,dx = f(0)\,x + f'(0)\frac{x^2}{2} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{x^3}{3} + \frac{f'''(0)}{3!}\frac{x^4}{4} + \ldots.$$

90. $$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = 0{,}5772156649\ldots + \ln(-\ln x) + \ln x + \tfrac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{2!} + \tfrac{1}{3}\frac{(\ln x)^3}{3!} + \ldots;\ 0 < x < 1.$$

91. $\int_0^x \frac{e^x\,dx}{x}$ führt durch die Substitution $e^x = z$ auf Nr. 90 zurück.

f. Bestimmte Integrale.

92. $$\int_a^b = -\int_b^a; \qquad \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c; \qquad \int_a^c - \int_a^b = \int_b^c.$$

93. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}.$$

94. $$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{a + bx^2} = \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\infty} \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}.$$

95. $$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}.$$

96. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},\ b > 0.$$

97. $$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x}\,dx = \infty.$$

98. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots\ 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$

99. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n}\,\frac{\pi}{2}.$

100. $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1.$

101. $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

102. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$ (a positive, n positive ganze Zahl.)

103. $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\,dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi};\ 0 < n < 1.$

g. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale.

Gegeben $\int_a^b f(x)\,dx.$

Man teile $b-a$ in n gleiche Teile, $\frac{b-a}{n} = h$, und berechne die zu den Werten $x=a$, $x=a+h$, $x=a+2h\ldots.$ gehörigen Werte $f(x) = y_0, y_1, y_2 \ldots.$ Dann ist:

104. $\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots. + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right]$

$$- \frac{B_1 h^2}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_3 h^4}{4!}[f'''(b) - f'''(a)] - \ldots.$$

Hierin sind B_1, $B_3 \ldots$ die Bernoullischen Zahlen, und zwar:

$$B_1 = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{6};\ B_3 = \frac{1}{2.3.5} = \frac{1}{30};\ B_5 = \frac{1}{2.3.7} = \frac{1}{42};$$

$$B_7 = \frac{1}{2.3.9} = \frac{1}{54};\ B_9 = \frac{5}{2.3.11} = \frac{5}{66};\ B_{11} = \frac{691}{2730}\ldots.$$

105.*) $\int_a^b f(x)\,dx = h\,[\tfrac{1}{2}\,y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}\,y_n]$

$$-\frac{1}{12}\,h^2\,[f'(b) - f'(a)] + \frac{1}{384}\,\varrho\,\frac{(b-a)^5}{n^4}\,M.$$

Das Schlufsglied dient zur Abschätzung des Fehlers, insofern ϱ ein echter Bruch (> 0, < 1) und M der absolut gröfste Wert ist, welchen $f^{IV}(x)$ im Intervall $x = a$ bis $x = b$ annimmt.

Simpsonsche Regel.

106.*) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,h\,[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots$

$$+ 4y_{n-1} + y_n] - \frac{5}{288}\,\varrho\,\frac{(b-a)^5}{n^4}\,M.$$

n mufs eine gerade Zahl sein. ϱ und M sieh unter 105. Formel 105 ist genauer wie 106.

G. Differentialgleichungen.

a. Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. $$f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0.$$

Lösung: $$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C.$$

2. **Trennung der Veränderlichen:**

$$f(x)\,\varphi(y)\,dx + F(x)\,\psi(y)\,dy = 0.$$

Lösung: $$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx + \int \frac{\psi(y)}{\varphi(y)}\,dy = C.$$

3. $$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0.$$

Ist die Bedingung der Integrabilität erfüllt:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x},$$ so ist die Lösung:

$$\int f(x, y)\,dx + \int \left[\varphi(x, y) - \int \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx\right] dy = C$$

oder: $$\int \varphi(x, y)\,dy + \int \left[f(x, y) - \int \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\,dy\right] dx = C.$$

4. Ist die obige Bedingung der Integrabilität **nicht** erfüllt, so wird dieselbe hergestellt durch Multiplikation der Gleichung mit einem Faktor M, dem **integrierenden Faktor**, welcher der **partiellen** Differentialgleichung genügen mufs:

---

*) Vergl. Handbuch der Baukunde I. S. 437.

$$f(x, y)\frac{\partial M}{\partial y} - \varphi(x, y)\frac{\partial M}{\partial x} = M\left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right).$$

In manchen Fällen kann M bestimmt werden aus den Gleichungen:

$$\frac{dy}{f(x, y)} = -\frac{dx}{\varphi(x, y)} = \frac{dM}{M\left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]}.$$

5. Ergiebt die Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

so heifst die Differentialgleichung **homogen**. Man löst sie, indem man setzt $\frac{y}{x} = t$ oder $y = xt$, $dy = xdt + tdx$.

Lösung: $$\ln x = \int \frac{dt}{f(t) - t} + C.$$

6. Die Differentialgleichung heifst **linear**, wenn sie die Form hat:

$$f_1(x)\frac{dy}{dx} + f(x)\,y + \varphi(x) = 0.$$

Man setze $y = uv$, wobei u und v Funktionen von x bedeuten,

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Diese beiden Werte in die zu lösende Gleichung eingesetzt, giebt:

$$f_1(x)\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + f(x)\,uv + \varphi(x) = 0.$$

Man bestimme nun u aus der Gleichung

$$f_1(x)\frac{du}{dx} + f(x)\,u = 0 \text{ und erhält:}$$

$$\ln\frac{u}{c} = -\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx \text{ oder } u = c\,e^{-\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx}.$$

Aus der obigen Gleichung folgt dann für v die Bedingungsgleichung:

$$f_1(x)\,u\frac{dv}{dx} + \varphi(x) = 0$$

oder $$v = -\int\frac{\varphi(x)}{u f_1(x)}dx + C_1 = -\int\frac{\varphi(x)}{c f_1(x)}e^{\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx}dx + C_1.$$

Die Lösung wird daher:

$$y = uv = e^{-\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx}\left[-\int\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}e^{\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx}dx + C\right].$$

7. Verfahren der **wiederholten Differentiation**.

$$y = F\left(x, \frac{dy}{dx}\right).$$

Man setze $\frac{dy}{dx} = z$ und differentiiere nach x, so folgt:

$$z = \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{dz}{dx},$$

womit bisweilen Fall 6. hergestellt ist. Den für z gefundenen Ausdruck setze man in $y = F(x, z)$ ein.

b. Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$.

Lösungen: 1) $y = \int dx \int f(x)\, dx + Cx + C_1$.

2) $y = x\int f(x)\, dx - \int x f(x)\, dx + Cx + C_1$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$.

Lösung: $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\, dy}} + C_1.$$

Allgemein: $F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0$.

Man setzte $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ und eliminierte dx aus den beiden Gleichungen $F\left(\frac{dz}{dx}, y\right) = 0$; $\frac{dy}{dx} = z$. Die Lösung ergiebt sich durch die mittelst Trennung der Veränderlichen auszuführende Integration der Gleichung: $F\left(\frac{z\,dz}{dy}, y\right) = 0$.

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Man setzte $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; dann erhält man die beiden Gleichungen: $x = \int \frac{dz}{f(z)} + C$, $y = \int \frac{z\,dz}{f(z)} + C_1$, aus welchen durch Elimination von z die Lösung sich ergiebt.

4. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, x\right)$. Man setzte $\frac{dy}{dx} = z$ und versuchte, die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dz}{dx} = f(z, x)$ zu integrieren; findet man $z = \varphi(x)$, so bleibt noch übrig die Integration der Gleichung: $dy = \varphi(x)\, dx$.

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y\right)$. Man setzte $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{dz}{dy}$ und versuchte, die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{z\,dz}{dy} = f(y, z)$

zu integrieren; findet man $z = \varphi(y)$, so ist dies Integral der gegebenen Gleichung $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C$.

c. Lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung.

α) Ohne Störungsfunktion.

1. $$a\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0.$$

Integral: $y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + \ldots\ldots + C_n e^{w_n x}$.
Die Gröfsen $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$a w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0.$$

2. Tritt unter jenen Wurzeln eine imaginäre auf, z. B. $w_3 = p + qi$, so giebt es auch eine zweite $w_4 = p - qi$. Das Integral der Differentialgleichung wird dann:

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + e^{px}[C_3 \cos qx + C_4 \sin qx] + C_5 e^{w_5 x} + \ldots + C_n e^{w_n x}.$$

3. Sind mehrere Wurzeln einander gleich, $w_1 = w_2 = w_3 \ldots = w_p$, so wird das Integral:

$$y = e^{w_1 x}[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_p x^{p-1}] + C_{p+1} e^{w_{p+1} x} + \ldots + C_n e^{w_n x}.$$

β) Mit Störungsfunktion.

$$a\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x).$$

Integral: $y = z_1 e^{w_1 x} + z_2 e^{w_2 x} + \ldots\ldots + z_n e^{w_n x}$.
Die $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n$ hierin bestimmen sich, wie unter α); die $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ sind zu berechnen aus den Gleichungen:

$$e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \ldots\ldots + e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = 0;$$

$$w_1 e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + w_2 e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + w_3 e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \ldots + w_n e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = 0;$$

$$w_1^2 e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + w_2^2 e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + w_3^2 e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \ldots + w_n^2 e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = 0;$$

. . . .
. . . .

$$w_1^{n-1} e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2^{n-1} e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3^{n-1} e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \dots + w_n^{n-1} e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = f(x).$$

Wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion ist, so erscheint y in der Form:

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + \dots + C_n e^{w_n x} + F(x),$$

wo $F(x)$ eine ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet, deren Koefficienten nach dem Verfahren der unbestimmten Koefficienten ermittelt werden können.

γ) Mit einer Konstanten als Störungsfunktion.

Ist in β) $f(x) = \text{const.} = b$, so differentiiere man die Gleichung nach x und setze $\frac{dy}{dx} = u$, wodurch der Fall α) hergestellt ist. Man erhält schliefslich:

$$y = \int u \, dx.$$

H. Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

a. Hauptsätze.

1. Die **absolute Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses ist der Quotient aus der Anzahl a der dem Ereignis günstigen Fälle dividiert durch die Anzahl n der überhaupt möglichen Fälle: $w = \frac{a}{n}$.

$w = 0$ ist der Ausdruck der Unmöglichkeit, $w = 1$ derjenige der Gewifsheit.

2. Sind $w_1, w_2, w_3 \dots$ die Wahrscheinlichkeiten mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs diese Ereignisse gleichzeitig oder in einer vorbestimmten Reihenfolge eintreten: $w = w_1 w_2 w_3 \dots$

3. Die Wahrscheinlichkeit w, dafs von mehreren zusammengehörigen Ereignissen, welche für sich die absoluten Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, w_3 \dots$ haben, irgend eines derselben eintrifft, ist:

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

4. **Relative Wahrscheinlichkeiten** zweier Ereignisse nennt man die Wahrscheinlichkeiten, welche man erhält, wenn man die überhaupt keinem dieser Ereignisse günstigen Fälle bei der Anzahl der möglichen Fälle als nicht vorhanden betrachtet. Sind w_1, w_2 die absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse, so sind $\frac{w_1}{w_1 + w_2}$ und $\frac{w_2}{w_1 + w_2}$ ihre relativen Wahrscheinlichkeiten.

5. Die Wahrscheinlichkeit w, dafs von zwei Ereignissen A und B, welche für sich die Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2 haben, A m-mal und B n-mal in bestimmter Reihenfolge eintrete, ist:

$$w = w_1^{\,m} w_2^{\,n}.$$

Wenn die Reihenfolge eine beliebige, so ist:

$$w = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} w_1^{\,m} w_2^{\,n}.$$

b. Verfahren der kleinsten Quadrate.

1. Theorie der Beobachtungsfehler.

Jede Beobachtung ist mit zufälligen Fehlern behaftet. Jeder Beobachtungsfehler ist anzusehen als die Summe einer unendlich grofsen Anzahl von elementaren Fehlern, welche eben so leicht positiv wie negativ ausfallen.

Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit ω des Vorkommens eines Fehlers Δ als Funktion seiner Gröfse:

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}\, d\Delta,$$

die Wahrscheinlichkeit W für das Vorkommen eines Fehlers zwischen den Grenzen Δ_1 und Δ_2:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-h^2 \Delta^2}\, d\Delta.$$

Hierin ist die Konstante h derjenige Faktor, welcher jeder einzelnen Beobachtung zugeordnet werden mufs, um die Gröfse der Genauigkeit derselben auszudrücken, also mit dieser wächst und daher der **Genauigkeits-Koefficient** genannt wird. Setzt man $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$ und nimmt Δ als Abscissen, y als Ordinaten eines rechtwinkligen Achsenkreuzes an, so stellt jene Gleichung die sogen. **Wahrscheinlichkeitskurve** dar; ω ist ein Flächenelement, W die zwischen den Abscissen Δ_1 und Δ_2 liegende Fläche der Kurve. Die Fläche der ganzen Kurve (von $\Delta = -\infty$ bis $+\infty$) ist $= 1$. Für $\Delta = 0$ erreicht $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ seinen gröfsten Wert. Die Kurve verläuft in zwei zur y-Achse gleichliegenden Aesten; die Δ-Achse ist Asymptote der Kurve. Für die Abscisse $\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}}$, worin m die Anzahl der Fehler, und die Ordinate $y = 0{,}60653 \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ hat die Kurve einen Wendepunkt.

Der **wahrscheinliche Fehler** r einer Beobachtung ist derjenige Wert von Δ, welcher bei dieser Gattung von Beobachtungen an den positiven wie negativen Fehlern ebenso oft überschritten wie nicht erreicht wird. Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Fehlers in den Grenzen $+r$ und $-r$ ist daher $= \frac{1}{2}$, und es ist $\pm r$ die Abscisse der Wahrscheinlichkeitskurve, deren zugehörige Ordinate die rechts bezw. links vom Scheitel gelegene Fläche der Kurve halbiert.

Der wahrscheinliche Fehler r ist umgekehrt proportional dem Genauigkeits-Koefficienten und dient daher als Einheit des Maſses zur Darstellung der Fehler.

Es ist:

$$r = \frac{0{,}4769364}{h} = 0{,}67449\,\varepsilon = 0{,}67449\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}},$$

wo m die Anzahl der Fehler.

Um zu prüfen, ob die Anzahl der Versuche groſs genug, ob die Fehler wirklich zufällige gewesen, und um sich überhaupt über die Zuverlässigkeit des Ergebnisses zu vergewissern, ist die **Verteilung der Gröſsen der Fehler** in Betracht zu ziehen, wofür die vorstehende Theorie folgende Angaben liefert:

Bei 1000 Beobachtungen liegen in den nach 0,1 r fortschreitenden Intervallen

0,0 bis 1,0 r:
54, 54, 53, 52, 51, 50, 49, 47, 46, 44, zusammen 500 Fehler;
zwischen 1,0 r und 2,0 r:
42, 40, 38, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, zusammen 323 Fehler;
zwischen 2,0 r und 3,0 r:
21, 19, 17, 15, 14, 12, 11, 10, 8, 7, zusammen 134 Fehler;
zwischen 3,0 r und 3,5 r . . . . 25 Fehler;
zwischen 3,5 r und 4,0 r . . . . 11 Fehler;
zwischen 4,0 r und 5,0 r . . . . 6 Fehler;

Summe 999 Fehler.

Hiernach ist also eine Beobachtung, deren Fehler $> 5{,}0\,r$, bereits als unzuverlässig anzusehen.

2. Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte unbekannter Gröſsen aus gegebenen Beobachtungen.

Eine Gröſse F sei eine bekannte Funktion von einer Anzahl unabhängiger Veränderlichen $x, y, z \ldots.$ und der n Konstanten $a, b, c \ldots.$ Durch Beobachtung kennt man m Werte von F, welche gegebenen Werten von $x, y, z \ldots.$ entsprechen, und es sind nun die Werte der n Konstanten zu bestimmen für den Fall, daſs $m > n$.

Wollte man je n Gleichungen zur Bestimmung der n Konstanten verbinden, so würde man, weil die m beobachteten Werte von F mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet sind, je nach Wahl der n Gleichungen andere Werte der Konstanten erhalten. Die Aufgabe

ist nun, diejenige Gruppe von Werten der Konstanten zu bestimmen, welche für die m beobachteten Werte von F die wahrscheinlichste ist. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergiebt, dafs dies bei denjenigen Werten der Fall ist, für welche

$$\Sigma (h^2 \Delta^2) = \min.$$

Denkt man sich unter h eine Zahl von der Beschaffenheit, dafs $\frac{h_1^2}{h^2}$, $\frac{h_2^2}{h^2}$, $\frac{h_3^2}{h^2}$ ganze Zahlen werden, welche der Reihe nach mit $g_1, g_2, g_3 \ldots$ bezeichnet werden, so gilt die Bedingung der wahrscheinlichsten Werte der Konstanten:

$$\Sigma (g \Delta^2) = \min \text{ für ungleiche Genauigkeiten,}$$
$$\Sigma (\Delta^2) = \min \text{ für gleiche}$$

Der erste Fall wird also auf den zweiten einfacheren zurückgeführt, da man die einzelnen Werte von Δ so oft in die Summe einzuführen hat, als die zugehörigen Koefficienten g anzeigen. g heifst das **Gewicht** der Beobachtung.

α) Funktionen ersten Grades.

Die Funktion F sei in Bezug auf die zu berechnenden Konstanten vom ersten Grade, also von der Form:

$$F = ax + by + cz + \ldots\ldots,$$

wo $x, y, z \ldots$ unabhängige Veränderliche sind.

Die zu beobachtenden Werte von F seien $F_1, F_2, F_3 \ldots$, die Beobachtungsfehler dabei $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots\ldots$

Bezeichnet m die Anzahl der Gleichungen, n die Anzahl der Konstanten $(m > n)$, so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten $a, b, c \ldots$ aus den Gleichungen:

$$\Sigma (g F x) = a \Sigma (g x^2) + b \Sigma (g x y) + c \Sigma (g x z) + \ldots$$
$$\Sigma (g F y) = a \Sigma (g y x) + b \Sigma (g y^2) + c \Sigma (g y z) + \ldots$$
$$\Sigma (g F z) = a \Sigma (g z x) + b \Sigma (g z y) + c \Sigma (g z^2) + \ldots$$

u. s. w.,

worin z. B.: $\Sigma (g y z) = g_1 y_1 z_1 + g_2 y_2 z_2 + \ldots\ldots$ ist.

Bei gleicher Genauigkeit aller Beobachtungen fällt überall in den Gleichungen der Faktor g fort.

Wenn in der gegebenen Gleichung für F eine der zu ermittelnden Konstanten mit keiner Veränderlichen verbunden ist (absolutes Glied), so ist in obigen Bestimmungsgleichungen der Wert der betreffenden Veränderlichen $= 1$ zu setzen.

Die Auflösungen der Bestimmungsgleichungen haben die Form (vergl. S. 39):

$$a = A_1 \Sigma (g F x) + B_1 \Sigma (g F y) + C_1 \Sigma (g F z) + \ldots$$
$$b = A_2 \Sigma (g F x) + B_2 \Sigma (g F y) + C_2 \Sigma (g F z) + \ldots$$
$$c = A_3 \Sigma (g F x) + B_3 \Sigma (g F y) + C_3 \Sigma (g F z) + \ldots$$

Berechnet man mittelst Einsetzung der so bestimmten wahrscheinlichsten Werte von $a, b, c \ldots$ in die Gleichung $F = ax + by + cz + \ldots\ldots$ die Werte von F, welche den bei der Beobachtung

benutzten Werten von $x, y, z \ldots$ entsprechen, und bezeichnet die Unterschiede entsprechender berechneten und beobachteten Werte von F mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$, so liegt der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungen in den Grenzen:

$$r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{m}{m-n} \frac{\Sigma(g\Delta^2)}{\Sigma(g)}} \left(1 \pm \frac{0{,}477}{\sqrt{m}}\right),$$

$$\text{für gleiche } g\colon\ r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m-n}} \left(1 \pm \frac{0{,}477}{\sqrt{m}}\right).$$

Hierin ist: $\Sigma(g\Delta^2) = \Sigma(gF^2) - a\,\Sigma(gFx) - b\,\Sigma(gFy) - \ldots;$

bezw: $\Sigma(\Delta^2) = \Sigma(F^2) - a\,\Sigma(Fx) - b\,\Sigma(Fy) - \ldots$

Die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Konstanten sind:

$$r_a = r\sqrt{\frac{A_1\,\Sigma(g)}{m}};\quad r_b = r\sqrt{\frac{B_2\,\Sigma(g)}{m}};\quad r_c = r\sqrt{\frac{C_3\,\Sigma(g)}{m}}$$

u. s. w.

für gleiche g: $r_a = r\sqrt{A_1}$; $r_b = r\sqrt{B_2}$; $r_c = r\sqrt{C_3}$ u. s. w.

β) Ausgleich unmittelbarer Beobachtungen.

Ist die beobachtete Gröfse von keiner Veränderlichen abhängig, also

$$F = a,$$

so wird der wahrscheinlichste Wert von a:

$$a = \frac{\Sigma(Fh^2)}{\Sigma(h^2)} = \frac{\Sigma(Fg)}{\Sigma(g)};$$

bei m Beobachtungen von gleicher Güte:

$$a = \frac{\Sigma(F)}{m},$$

d. h. bei Beobachtungen gleicher Güte einer unabhängigen Gröfse ist das **arithmetische Mittel** der wahrscheinlichste Wert derselben.

Wahrscheinlicher Beobachtungsfehler $r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{m}{m-1} \frac{\Sigma(g\Delta^2)}{\Sigma(g)}}$.

Wahrscheinlicher Fehler des arithmetischen Mittels $r_a = \frac{r}{\sqrt{m}}$.

γ) Funktionen höheren Grades.

Sind die für F gegebenen m Gleichungen nicht vom ersten Grade in bezug auf die n Konstanten $a, b, c \ldots$, so entwickele man zunächst aus n der Gleichungen F die Näherungswerte $a_1, b_1, c_1 \ldots$ der Konstanten und setze hierauf:

$$a = a_1 + \alpha,\quad b = b_1 + \beta,\quad c = c_1 + \gamma \ldots\ldots$$

Sind nun $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \ldots$ die den Näherungswerten $a_1, b_1, c_1 \ldots$ entsprechenden Werte von F, sind ferner $F_1, F_2, F_3 \ldots$ die beobachteten Werte von F, so erhält man durch Entwicklung von F nach dem Taylorschen Satze unter Vernachlässigung der höheren Potenzen m Gleichungen für Δ:

$$\Delta_1 = -F_1 + \Phi_1 + \alpha\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_1} + \beta\frac{\partial \Phi_1}{\partial b_1} + \gamma\frac{\partial \Phi_1}{\partial c_1} + \ldots\ldots$$

$$\Delta_2 = -F_2 + \Phi_2 + \alpha\frac{\partial \Phi_2}{\partial a_1} + \beta\frac{\partial \Phi_2}{\partial b_1} + \gamma\frac{\partial \Phi_2}{\partial c_1} + \ldots\ldots$$

$$\Delta_3 = -F_3 + \Phi_3 + \alpha\frac{\partial \Phi_3}{\partial a_1} + \beta\frac{\partial \Phi_3}{\partial b_1} + \gamma\frac{\partial \Phi_3}{\partial c_1} + \ldots\ldots$$

Hieraus sind, gleiche Gewichte g vorausgesetzt, nach der Bedingung $\Sigma(\Delta^2) =$ Minimum oder

$$\frac{\partial \Sigma(\Delta^2)}{d\alpha} = 0; \qquad \frac{\partial \Sigma(\Delta^2)}{d\beta} = 0; \qquad \frac{\partial \Sigma(\Delta^2)}{d\gamma} = 0\ldots.$$

die Verbesserungen $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ zu berechnen.

Die entstehenden Gleichungen sind den unter α) gegebenen Gleichungen ähnlich; man erhält sie, wenn man in den letzteren für

$$a,\ b,\ c\ldots.\quad x,\quad y,\quad z\ \ldots\ldots F$$

einsetzt: $$\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots.\frac{\partial\Phi}{\partial a_1},\ \frac{\partial\Phi}{\partial b_1},\ \frac{\partial\Phi}{\partial c_1}\ldots\ldots F-\Phi.$$

Nötigenfalls ist das Verfahren bis zur gewünschten Genauigkeit zu wiederholen. — Dasselbe Verfahren kann auch benutzt werden, wenn die Funktion in bezug auf die Konstanten vom ersten Grade ist (s. u. α), um unbequem grofse Zahlen F durch die kleineren $F - \Phi$ zu ersetzen.

VI. ANALYTISCHE GEOMETRIE.

A. Punkt und gerade Linie in der Ebene.

In folgenden Entwicklungen sind rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

1. Sind x, y, x_0, y_0 die Koordinaten zweier Punkte, deren Entfernung von einander r ist; sei ferner α der Winkel, den r mit der positiven Richtung der Abscissenachse (x-Achse) bildet, so ist:

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{x-x_0}{r}; \qquad \sin\alpha = \frac{y-y_0}{r}.$$

2. Teilt man die Strecke r nach dem Verhältnis $1 : n$ und nennt die Koordinaten des Teilpunktes x_1, y_1, so ist:

$$x_1 = \frac{x + n x_0}{1+n}; \qquad y_1 = \frac{y + n y_0}{1+n}.$$

3. **Gleichungen der geraden Linie.**

Im allgemeinen ist eine gerade Linie durch die Gleichung ersten Grades bestimmt:

$$Ax + By + C = 0.$$

Ist die Gerade unter einem Winkel α gegen die x-Achse geneigt, so dafs $\operatorname{tg}\alpha = m$, und schneidet die Gerade auf der y-Achse die Strecke b ab, so ist ihre Gleichung:

$$y = mx + b.$$

Geht die Gerade durch einen Punkt (x_1, y_1), so ist ihre Gleichung:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Geht die Gerade durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2), so ist ihre Gleichung:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Schneidet eine Gerade auf der x-Achse die Strecke a, auf der y-Achse die Strecke b ab, so ist ihre Gleichung:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

4. Die Gleichung der geraden Linie, welche im Endpunkte einer vom Anfangspunkte der Koordinaten ausgehenden, gegen die x-Achse unter dem Winkel α geneigten Strecke l senkrecht steht, lautet:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - l = 0. \quad \textbf{(Normalform)}.$$

Ist statt der Länge l ein Punkt $(x_1, y_1,)$ der Geraden gegeben, so ist deren Gleichung:

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\sin\alpha = 0,$$

oder

$$(x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1 = 0.$$

5. Um die allgemeine Gleichung der geraden Linie:

$$Ax + By + C = 0$$

in die Normalform

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - l = 0$$

zu bringen, setze man:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad l = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist überall so zu wählen, dafs l positiv wird.

6. Der Abstand p eines Punktes (x_1, y_1) von einer geraden Linie, deren Gleichung die Normalform hat, ist:

$$p = \pm(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - l),$$

wo das positive oder negative Zeichen genommen wird, je nachdem der Punkt (x_1, y_1) und der Koordinaten-Anfangspunkt auf verschiedenen oder auf derselben Seite der Geraden sich befinden.

7. Die Gleichung der von dem Punkte (x_1, y_1) auf die Gerade

$$Ax + By + C = 0$$

gefällten Senkrechten lautet:

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1).$$

8. Sind $$Ax + By + C = 0$$
und $$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
die Gleichungen zweier Geraden, so ist die Gleichung aller Geraden, welche durch den Schnittpunkt beider gehen:

$$Ax + By + C + \lambda(A_1 x + B_1 y + C_1) = 0$$

oder geordnet:

$$(A + \lambda A_1)x + (B + \lambda B_1)y + C + \lambda C_1 = 0,$$

worin λ ein beliebiger Zahlenfaktor ist.

9. Der Winkel w, welchen zwei gerade Linien der Gleichungen unter 8. mit einander bilden, ergiebt sich aus:

$$\cos w = \frac{AA_1 + BB_1}{\sqrt{(A^2 + B^2)(A_1^2 + B_1^2)}}.$$

10. Zwei Gleichungen von der Form:

$$Ax + By + C = 0 \text{ und } k(Ax + By) + C_1 = 0$$

stellen **parallele Geraden** dar.

Sind die Gleichungen in entwickelter Form gegeben:

$$y = mx + b, \qquad y = m_1 x + b_1,$$

so mufs sein, wenn die Geraden parallel sein sollen:

$$m = m_1,$$

wenn sie senkrecht aufeinander stehen sollen:

$$mm_1 = -1.$$

11. Die Winkel der beiden Geraden:

$$Ax + By + C = 0$$
$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

werden halbiert durch die Geraden:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \mp \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = 0.$$

12. **Umwandlung ebener Koordinaten.**

Die Koordinaten in Beziehung auf das alte Achsenkreuz werden mit x, y, auf das neue mit x', y' bezeichnet.

α) Parallele Verschiebung des Achsenkreuzes. Sind f, g die Koordinaten des neuen Anfangspunktes, so ist:

$$x = f + x'; \quad y = g + y'.$$

β) Drehung des Achsenkreuzes um den Anfangspunkt. Bezeichnet α den Winkel, welchen die alte positive x-Achse bei ihrer Drehung nach der alten positiven y-Achse hin zurücklegen mufs, um in die Lage der neuen positiven x-Achse zu kommen, so ist:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha; \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

γ) Umwandlung von Parallelkoordinaten in Polarkoordinaten. Bezeichnet r den Leitstrahl, φ den Polarwinkel, so ist, wenn der Pol mit dem Anfangspunkte, die Polarachse mit der positiven x-Achse zusammenfällt:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi.$$

Sind x, y die Koordinaten eines schiefwinkligen Achsenkreuzes mit dem Winkel ω, so hat man:

$$x = \frac{r \sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega}; \qquad y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \omega}.$$

δ) Umwandlung von Polarkoordinaten in Parallelkoordinaten. Bei den Bezeichnungen unter γ) ist für rechtwinklige Koordinaten:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

für schiefwinklige Koordinaten:

$$\cos \varphi = \frac{x + y \cos \omega}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y \sin \omega}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega}.$$

B. Krumme Linien in der Ebene.

a. Allgemeine Sätze.

1. Eine krumme Linie in der Ebene, bezogen auf Parallelkoordinaten, wird dargestellt durch eine **Gleichung**:

$$F(x, y) = 0.$$

Durch Auflösung derselben nach y erhält man eine oder mehrere Gleichungen von der Form:

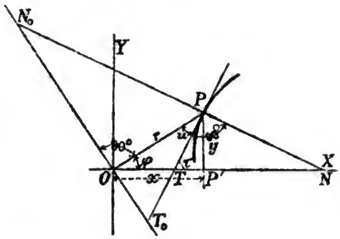
$$y = f(x),$$

welche ebensoviele Teile der Kurve darstellen.*)

Dasselbe gilt für die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten:

$$F(r, \varphi) = 0; \qquad r = f(\varphi).$$

Abbild. 8.



2. Den Winkel τ, welchen die nach der Seite der positiven y-Achse liegende **Tangente** mit der positiven x-Achse bildet (s. Abbild. 8), findet man für rechtwinklige Koordinaten aus:

$$\sin \tau = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos \tau = \frac{dx}{ds},$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx};$$

hierin ist das Differential des **Bogens**:

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

welches bei der Bestimmung von $\sin \tau$ und $\cos \tau$ mit dem für $\operatorname{tg} \tau$ sich ergebenden Vorzeichen genommen werden mufs.

*) Häufig ist es für die Rechnung bequemer, die Kurve mittelst einer Hülfsveränderlichen t durch zwei Gleichungen darzustellen:

$$x = \psi_1(t), \qquad y = \psi_2(t). \qquad \text{(Vergl. S. 107.)}$$

3. Bezeichnet man den Winkel, welchen die im Sinne des wachsenden φ gerichtete Tangente der Kurve mit der positiven Richtung des Leitstrahls r bildet, mit u (s. Abbild. 8), so ist:

$$\sin u = \frac{r\,d\varphi}{d\,s}, \qquad \cos u = \frac{d\,r}{d\,s}, \qquad \operatorname{tg} u = \frac{r\,d\varphi}{d\,r}.$$

Das Differential des Bogens:

$$ds = \pm\sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2}$$

mufs bei der Bestimmung von $\sin u$ und $\cos u$ mit dem für $\operatorname{tg} u$ sich ergebenden Vorzeichen genommen werden.

4. Die **Gleichung der Tangente** im Punkte (x, y) der Kurve ist:

$$\eta - y = \frac{d\,y}{d\,x}(\xi - x), \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

wo ξ, η die laufenden Koordinaten bezeichnen. Löst man in der letzteren Gleichung die Klammern auf und schreibt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + p = 0,$$

so findet man für Kurven n^{ten} Grades:

$$p = -\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 1\,F_{n-1} + 2\,F_{n-2} + \ldots + (n-1)F_1 + n\,F_0,$$

worin F_k die homogenen Glieder k^{ter} Ordnung von F bezeichnet.

Tangente PT (s. Abbild. 8) $= y\dfrac{ds}{dy} = y\dfrac{dx}{dy}\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

Subtangente . . . . $P'T = y\dfrac{dx}{dy}$.

Polartangente . . . $PT_0 = \dfrac{r\,ds}{dr} = r\sqrt{1 + \dfrac{r^2 d\varphi^2}{dr^2}}$.

Polarsubtangente . . $OT_0 = \dfrac{r^2\,d\varphi}{dr}$.

5. Die **Gleichung der Normale** im Punkte (x, y) ist für rechtwinklige Koordinaten, wenn ξ, η die laufenden Koordinaten bezeichnen:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x), \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Normale PN (s. Abbild. 8) $= y\dfrac{ds}{dx} = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$.

Subnormale . . . . $P'N = y\dfrac{dy}{dx}$.

Polarnormale . . . $PN_0 = \dfrac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2}$.

Polarsubnormale . . $ON_0 = \dfrac{dr}{d\varphi}$.

6. Die **unendlichen Punkte** einer Kurve, d. h. die Richtungswinkel ihrer Verschwindungspunkte findet man, indem man die

Gleichung der Kurve auf Polarkoordinaten bezieht und diejenigen Winkel φ sucht, welche $r = \infty$ entsprechen. Ist die Kurve eine algebraische vom n^{ten} Grade, so dividiert man zuvor ihre Gleichung durch die höchste Potenz von r; hierzu schreibe man die Gleichung in der Form:

$$F(x, y) = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \ldots + F_1 + F_0 = 0,$$

worin F_k die homogenen Glieder k^{ter} Ordnung bezeichnet.

7. **Die Asymptoten** sind die Tangenten in den unendlichen Punkten der Kurve. Man erhält ihre Gleichung, indem man die Tangentengleichung auf Polarkoordinaten bezieht, durch die höchste Potenz von r dividiert und alsdann $r = \infty$ und für φ die unter 6. angegebenen Richtungswinkel der Verschwindungspunkte allmählich einsetzt.

8. Zwei Kurven, welche einen Punkt gemeinsam haben, bilden in demselben eine **Berührung** k^{ter} Ordnung, wenn die ersten k Ableitungen: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ky}{dx^k}$ in dem betreffenden Punkte für beide Kurven gleich sind.

Bei einer Berührung von gerader Ordnung schneiden sich die Kurven in dem gemeinsamen Punkte, bei einer Berührung von ungerader Ordnung berühren sie sich, ohne sich zu schneiden. Die Tangente einer Kurve bildet mit derselben im allgemeinen eine Berührung erster Ordnung, der Krümmungskreis (s. u. 9.) im allgemeinen eine Berührung zweiter Ordnung.

9. Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkte (x, y) ist der Kreis, der mit der Kurve daselbst eine Berührung zweiter Ordnung (s. u. 8.) besitzt oder auch drei unendlich nahe Punkte gemein hat. Sein Mittelpunkt heifst der Krümmungsmittelpunkt; derselbe ist der Schnittpunkt der beiden unendlich nahen Normalen im Punkte (x, y). Der Krümmungshalbmesser ϱ ist

für rechtwinklige Koordinaten:

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

für Polarkoordinaten:

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{d\varphi + du}.$$

du ergiebt sich durch Differentiation von $u = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\,d\varphi}{dr}\right)$ (s. u. 3.).

Der reciproke Wert von ϱ heifst die **Krümmung** der Kurve.

10. Die Koordinaten X, Y des **Krümmungsmittelpunktes** für den Punkt (x, y) sind:

$$X = x - \varrho \frac{dy}{ds}; \qquad Y = y + \varrho \frac{dx}{ds};$$

oder: $$X = x - \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}; \qquad Y = y + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}};$$

oder: $$X = x - \frac{dy}{d\tau}; \qquad Y = y + \frac{dx}{d\tau};$$

oder: $$X = x - \varrho \sin \tau; \qquad Y = y + \varrho \cos \tau.$$

11. Die **Evolute** einer Kurve ist der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte; die gegebene Kurve heifst Evolvente.

Die Gleichung der Evolute findet man, indem man aus der Gleichung der Evolvente und den Gleichungen für X, Y die Koordinaten x, y eliminiert und dann X, Y als veränderlich betrachtet.

Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale der Evolvente, Tangente der Evolute.

Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten der Evolute ist gleich dem Unterschiede der zu diesen Punkten gehörigen Krümmungshalbmesser der Evolvente. Hieraus folgt, dafs der Endpunkt eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens, der auf die Evolute gewickelt ist, die Evolvente beschreibt, wenn der Faden, stets in Richtung der Tangente angezogen, von der Evolute abgewickelt wird.

Man findet umgekehrt, wenn die Evolute $F(X, Y) = 0$ gegeben ist, als Gleichung der **Evolvente** die folgenden:

$$x = X - S\frac{dX}{dS}, \quad y = Y - S\frac{dY}{dS}, \quad F(X, Y) = 0,$$

wenn (X, Y) einen beliebigen Punkt der Evolute bezeichnet und S die Bogenlänge derselben bis zu diesem Punkte, von dem Punkte aus gezählt, wo die Abwicklung beginnt.

12. Eine Kurve ist nach der positiven Seite der y-Achse **konkav**, wenn $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$, und **konvex**, wenn $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$ ist. In dem Punkte, wo $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ ist, während $\frac{d^3 y}{dx^3} \gtrless 0$, geht die Kurve aus der konkaven in die konvexe Form über, oder umgekehrt. Ein solcher Punkt heifst ein **Wendepunkt**; man ermittelt denselben durch Auflösung der Gleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$. Wenn die Wurzeln dieser Gleichung gleichzeitig den sämtlichen Gleichungen:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = 0, \ldots \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

genügen, so ist der Punkt nur dann ein Wendepunkt, wenn k gerade ist; die Tangente hat alsdann (wegen 8.) eine Berührung gerader

Ordnung mit der Kurve, schneidet dieselbe also noch im Berührungspunkte. Ist hingegen k ungerade, so hat der Punkt die Eigenschaft, dafs seine Tangente mit der Kurve eine Berührung ungerader Ordnung eingeht, er ist aber kein Wendepunkt.

Für einen Wendepunkt ist $\varrho = \infty$.

13. Ein Punkt der Kurve ist ein **Doppelpunkt**, wenn sich zwei Zweige der Kurve in ihm schneiden. Wenn dies geschieht, erscheint immer:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$$

unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, es müssen also die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad F(x, y) = 0$$

gleichzeitig stattfinden. Die letzte Gleichung läfst sich für Kurven n^{ten} Grades wie in 4. auf:

$$1 F_{n-1} + 2 F_{n-2} + \ldots + (n-1) F_1 + n F_0 = 0$$

reduzieren. Man findet die beiden Tangenten im Doppelpunkt durch Auflösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \operatorname{tg}^2 \tau + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \operatorname{tg} \tau + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

nach $\operatorname{tg} \tau$. Giebt die Gleichung zwei gleiche Wurzeln, so fallen die beiden Tangenten zusammen; der Doppelpunkt heifst dann Rückkehrpunkt (Spitze). Sind die Wurzeln der Gleichung imaginär, so erhält man einen isolierten oder zugeordneten Punkt, in welchem die Kurve keine reellen Tangenten hat.

14. **Inhalt der Fläche:**

α) zwischen der Kurve, der Abscissenachse und den Ordinaten y_0, y, welche den Abscissen x_0, x entsprechen:

$$F = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx.$$

β) zwischen der Kurve und den zu den Winkelabscissen φ_0, φ gehörigen Leitstrahlen r_0, r:

$$F = \tfrac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2\, d\varphi.$$

15. **Bogenlänge.** Die Länge s einer Kurve, welche zwischen zwei den Abscissen x_0, x entsprechenden Punkten liegt, ist:

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Für Polarkoordinaten hat man:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{d\,r}{d\,\varphi}\right)^2}\,.\,d\,\varphi = \int_{r_0}^{r} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\,\varphi}{d\,r}\right)^2}\,.\,d\,r.$$

16. **Hüllkurven.** Die durch die Gleichung

$$F(x,\ y,\ p) = 0,$$

worin p ein veränderlicher Parameter, dargestellte Kurvenschar wird im allgemeinen von einer Kurve umhüllt, welche die Hüllkurve der Kurvenschar heifst. Ihre Gleichung ergiebt sich durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial\,F(x,y,p)}{\partial\,p} = 0, \qquad F(x,y,p) = 0.$$

Ist die Kurvenschar der Gleichung $F(x,y,p,q) = 0$ durch zwei veränderliche Parameter p und q bestimmt, zwischen denen die Bedingungsgleichung $\varphi(p,\ q) = 0$ besteht, so ergiebt sich die Gleichung der Hüllkurve durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen:

$$\frac{\partial\,F}{\partial\,p}\cdot\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,q} = \frac{\partial\,F}{\partial\,q}\cdot\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,p}, \qquad F(x,y,p,q) = 0, \qquad \varphi(p,q) = 0.$$

17. **Trajektorien.** Diejenige Kurve, welche die Kurvenschar der Gleichung:

$$F(x,y,p) = 0,$$

worin p ein veränderlicher Parameter, rechtwinklig durchschneidet, heifst die rechtwinklige Trajektorie der Kurvenschar. Die Differentialgleichung der Trajektorie, deren Koordinaten ξ, η seien, ergiebt sich, indem man aus den Gleichungen:

$$\frac{d\,\eta}{d\,\xi} = \frac{\partial\,F}{\partial\,\eta} : \frac{\partial\,F}{\partial\,\xi} \quad \text{und} \quad F(\xi,\eta,p) = 0$$

die Gröfse p eliminiert. Die Integration der entstandenen Gleichung liefert mit Rücksicht auf die willkürliche Konstante eine Schar von Trajektorien.

b. Kegelschnitte.

1. Die **allgemeine Gleichung** der Kegelschnitte in Parallelkoordinaten hat die Form:

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_1 x + 2\,a_2 y + a_0 = 0.$$

2. Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem die Diskriminante $a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2$ positiv, gleich Null oder negativ ist.

Die allgemeine Form der Parabelgleichung ist also:

$$(a\,x + b\,y + c)^2 + A\,x + B\,y + C = 0.$$

3. Bei der Ellipse und Hyperbel findet man den **Mittelpunkt** als Schnittpunkt der geraden Linien:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \qquad a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0.$$

4. Ist in rechtwinkligen Koordinaten:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = k$$

die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse oder Hyperbel und:

$$g_1 x'^2 + g_2 y'^2 = k$$

die **Hauptachsengleichung,** so findet man den Drehungswinkel φ, um welchen das alte Koordinatenkreuz im positiven Sinne gedreht werden mufs, um in die Lage des neuen zu gelangen, aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}};$$

g_1 und g_2 werden erhalten aus je zwei der Gleichungen

$$g_1 + g_2 = a_{11} + a_{22}; \quad g_1 g_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2;$$

$$g_1 - g_2 = \frac{a_{11} - a_{22}}{\cos 2\varphi} = \frac{2a_{12}}{\sin 2\varphi}.$$

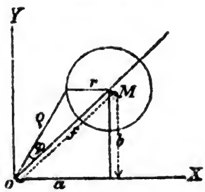
$a_{11} + a_{22}$ heifst die Invariante der Kegelschnittsgleichung.

5 Die Bedingungen, dafs die Gleichung einen Kreis darstellt, sind: $a_{12} = 0$; $a_{11} = a_{22}$; a_{11}, a_{22}, k gleiches Vorzeichen.

1. Kreis.

Gleichungen:

Abbild. 9.



1. Allgemeine Gleichung (Abbild. 9):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

2. Mittelpunktsgleichung: (Koordinaten-Anfangspunkt im Mittelpunkt):

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

3. Scheitelgleichung: (Koordinaten-Anfangspunkt in der Kreislinie, OX ein Durchmesser):

$$y^2 = x(2r - x).$$

4. Polargleichung für die Achse OM (Abbild. 9):

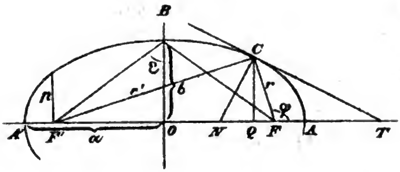
$$\varrho^2 - 2\varrho f \cos\varphi + f^2 = r^2.$$

Umfang und **Inhalt** der Kreisfläche s. S. 1 u. ff., **Inhalt** der Kreisabschnitte und Kreisausschnitte s. S. 28 u. 29, S. 128.

2. Ellipse und Hyperbel.

Für die Ellipse (Abbild. 10, s. folg. S.) gelten die oberen, für die Hyperbel (Abbild. 11) die unteren Zeichen.

Abbild. 10.



1. **Mittelpunktsgleichung.** Bezieht man die Kurven auf ihre Hauptachsen, so ist die Gleichung, wenn $OA = a$ und OB, bezw. $AD = b$ die beiden Halbachsen bezeichnet:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\pm (a^2 - x^2)}.$$

2. **Scheitelgleichung.** Verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Scheitel A' in der x-Achse, so ist die Gleichung:

$$\pm y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

3. Die **Brennpunkte** F und F' haben auf der x-Achse von O den Abstand:

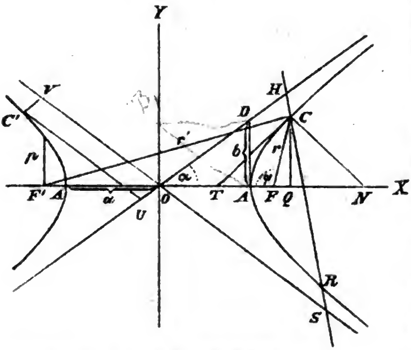
$$OF = \pm \sqrt{a^2 \mp b^2}.$$

Bei der Ellipse ist $BF = BF' = OA = a$, bei der Hyperbel $OF = OD$. Das Verhältnis:

$$\frac{OF}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = \sin \varepsilon, \text{ bezw.} = \frac{1}{\cos \alpha} = e$$

heifst (numerische) Excentricität des Kegelschnitts.

Abbild. 11.



4. Die von den Brennpunkten nach einem beliebigen Punkte des Kegelschnitts gezogenen **Leitstrahlen** sind:

$$r = \pm (a - ex),$$
$$r' = a + ex.$$

Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Leitstrahlen konstant:

$$r' \pm r = 2a.$$

(Fadenkonstruktion.)

5. Die Ordinate in einem Brennpunkte ist:

$$p = \pm a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}.$$

Die Gröfse $2p$ heifst **Parameter.**

6. **Zugeordnete Durchmesser** nennt man solche Durchmesser, von denen der eine alle die Sehnen halbiert, welche dem anderen

parallel sind. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel dem diesem zugeordneten Durchmesser.

Bilden diese Durchmesser $2a_1$, $2b_1$ mit der ersten Hauptachse die Winkel α, β (Abbild. 15, S. 104), so ist, wenn beide Winkel spitze:

$$a^2 \pm b^2 = a_1^2 \pm b_1^2; \quad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta); \quad \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

Die auf zwei zugeordnete Durchmesser als schiefwinklige Achsen bezogene Gleichung beider Kegelschnitte lautet: $\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1.$

7. **Gleichung der Tangente** im Punkte (x, y): $\frac{\xi x}{a^2} \pm \frac{\eta y}{b^2} = 1,$

Gleichung der Normale: $\frac{\xi - x}{b^2 x} = \pm \frac{\eta - y}{a^2 y}$. ($\xi$, η die laufenden Koordinaten.)

Tangente und Normale halbieren die Winkel der Leitstrahlen.

8. Die Hyperbel nähert sich auf ihren in das Unendliche gehenden Zweigen den beiden Geraden $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$, den **Asymptoten,** immer mehr, ohne dieselben im Endlichen zu erreichen. Jede Asymptote bildet mit der ersten Hauptachse einen Winkel α, so dafs $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ ist.

Zieht man eine Gerade HS (Abbild. 11), welche die Hyperbel und die Asymptoten schneidet, so sind die beiden Stücke CH und RS zwischen der Hyperbel und den Asymptoten einander gleich. Hieraus folgt eine einfache Konstruktion der Hyperbel, wenn die Asymptoten und ein Punkt C der Hyperbel gegeben sind.

Ist die Gerade HS normal zur Hauptachse, so wird das zwischen den Asymptoten liegende Stück durch einen Hyperbelast so geteilt, dafs das Produkt der Teile konstant $= b^2$ ist.

Ist die Gerade HS parallel zur Hauptachse, so wird das zwischen den beiden Hyperbelästen liegende Stück durch eine Asymptote so geteilt, dafs das Produkt der Teile konstant $= a^2$ ist.

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Tangente wird im Berührungspunkte halbiert. Die von beliebigen Tangenten und den Asymptoten gebildeten Dreiecke sind flächengleich.

Wenn $C'U$ und $C'V$ den Asymptoten parallel sind, so ist:

$$C'U \cdot C'V = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Die auf die Asymptoten als Achsen bezogene Gleichung der Hyperbel in schiefwinkligen Koordinaten lautet:

$$x'y' = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

9. Für einen beliebigen Punkt C (x, y) (Abbild. 10 u. 11) ist:

Tangente $CT = \frac{ay}{bx}\sqrt{\pm(a^2 - e^2 x^2)}.$

Normale $CN = \frac{b}{a}\sqrt{\pm(a^2 - e^2 x^2)}.$

Subtangente $TQ = \mp \frac{a^2}{x} \pm x.$ **Subnormale** $NQ = \mp \frac{b^2}{a^2} x.$

10. **Gleichseitige Hyperbel.** Mittelpunktsgleichung:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

$$a = b. \quad e = \sqrt{2}.$$

Parameter: $p = a.$

Asymptotengleichung: $x' y' = \frac{1}{2} a^2.$

Die Asymptoten stehen senkrecht aufeinander.

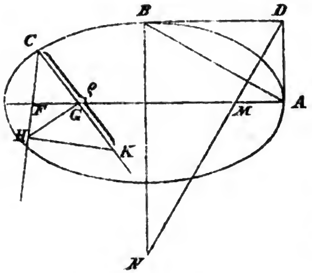
Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel s. Dampfmaschinen, Schiebersteuerungen.

11. **Krümmungshalbmesser** im Punkte C (Abbild. 10 u. 11):

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(r r')^{\frac{3}{2}}}{a b} = \frac{p}{\sin^3 FCT}.$$

Konstruktion (Abbild. 12): Man konstruiere die Normale CG im Punkte C, ziehe CF durch den Brennpunkt F, $GH \perp GC$, $HK \perp CH$; dann ist K der Krümmungsmittelpunkt.

Abbild. 12.



Für den Scheitel A ist bei Ellipse und Hyperbel

$$\varrho' = \frac{b^2}{a} = p;$$

für den Scheitel B bei der Ellipse ist

$$\varrho'' = \frac{a^2}{b}.$$

Die Krümmungsmittelpunkte M und N für die Scheitel der Ellipse erhält man (Abbild. 12), indem man durch D eine Gerade $\perp AB$ zieht.

12. Bewegt sich ein Punkt P in der Weise, dafs seine jedesmaligen Entfernungen PF von einem festen Punkte F und PQ von einer festen Geraden in einem konstanten Verhältnis $\frac{PF}{PQ} = e$ stehen, so ist der geometrische Ort des Punktes eine Ellipse, wenn $e < 1$, eine Parabel, wenn $e = 1$, eine Hyperbel, wenn $e > 1$. Der feste Punkt F liegt auf der Hauptachse und ist ein Brennpunkt; die feste Gerade steht normal zur Hauptachse und heifst **Leitlinie.**

13. **Polargleichung** eines Kegelschnitts, bezogen auf den Brennpunkt F als Pol und FA als Polarachse (Abbild. 10 u. 11):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\varphi} = \pm \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos\varphi}.$$

14. **Fläche.** Bei der Ellipse ist (Abbild. 10):

$$\text{Fläche } OBCQ = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Der Inhalt der ganzen Ellipse ist $\pi a b$.

Bei der Hyperbel ist (Abbild. 11):

$$\text{Fläche } A\,C\,Q = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Der Subtrahend stellt die Fläche OCA vor.

$$\text{Fläche } O\,A'\,C'\,V = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln \frac{2 \cdot OV}{OD}.$$

Fläche der gleichseitigen Hyperbel s. S. 58.

15. **Umfang der Ellipse:**

$$S = \pi(a+b)\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \tfrac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \tfrac{1}{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \ldots\right] = \pi(a+b)\varkappa.$$

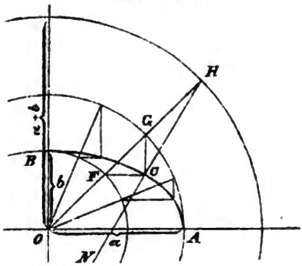
Zur Berechnung von $\pi(a+b)$ kann man für $(a+b) = n$ die Tafel auf S. 1 bis 23, zur Berechnung von $\varkappa$ folgende Angaben benutzen:

$\frac{a-b}{a+b} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\varkappa =$	1,0025	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635	1,0922	1,1267	1,1677	1,2155	1,2732.

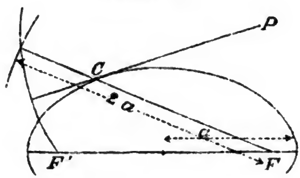
16. **Konstruktion der Ellipse aus den beiden Halbachsen** a und b (Abbild. 13).

α) Man beschreibe um O Kreise mit b, a, $a+b$, ziehe einen beliebigen Halbmesser $OFGH$, durch $F \parallel OA$, durch $G \parallel OB$, so ist C ein Punkt der Ellipse und HCN die Normale in diesem Punkte.

Abbild. 13.



Abbild. 14.



β) Man lasse die Strecke $a+b$ mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten. Der Teilpunkt zwischen a und b beschreibt dann die Ellipse.

17. **Konstruktion der Tangente an einen Kegelschnitt**

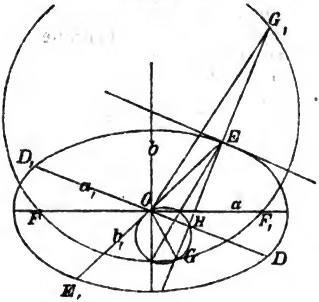
α) **In einem Punkte** C. (Abbild. 10 u. 11.) Mit Hülfe von 7.

β) **von einem Punkte** P **aufserhalb** (Abbild. 14).

Man beschreibe um P mit PF' und um F mit $2a$ Kreise, verbinde ihren Schnittpunkt mit F, so ist C der Berührungspunkt.

18. Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse, wenn gegeben sind $DD_1 = 2a_1$ und $EE_1 = 2b_1$ (Abbild. 15) als zugeordnete Durchmesser der Gröfse und Lage nach. Man fälle $EH \perp DD_1$, mache $EG = EG_1 = OD_1 = a_1$, so ergiebt sich die Lage einer Hauptachse durch Halbierung des Winkels $G\,O\,G_1$. Die Längen der Hauptachsen sind:

Abbild. 15.



$$2a = OG_1 + OG.$$
$$2b = OG_1 - OG.$$

Oder: Man konstruiere OG wie vorhin, beschreibe über OG als Durchmesser einen Kreis, ziehe durch seinen Mittelpunkt und E eine Gerade. Die Schnittpunkte derselben mit dem Kreise sind Punkte der Hauptachsen, ihre Entfernungen von E die Längen der halben Hauptachsen.

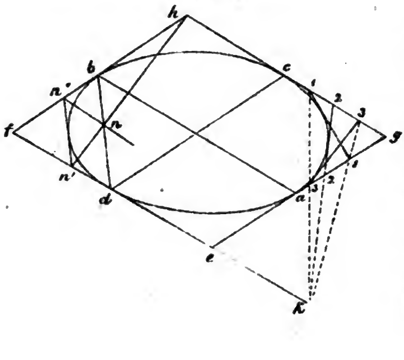
Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der kleinen Achse liegt, und der durch G und G_1 geht, schneidet die grofse Achse in den Brennpunkten F und F_1.

Läfst man die Linie G_1EH sich so bewegen, dafs G_1 auf OG_1 und deren Verlängerungen, und H auf DD_1 sich bewegt, so beschreibt der Punkt E die Ellipse.

Der vierte harmonische Punkt zu G_1, H und G, dem Punkte H zugeordnet, ist der Krümmungsmittelpunkt zu E.

19. Konstruktion der Ellipse aus den zugeordneten Durchmessern ab und cd (Abbild. 16).

Abbild. 16.



α) Man mache $edf \parallel gch \parallel ab$ und $gae \parallel hbf \parallel cd$, verlängere fe um $ek = de$, teile cg in beliebig viele (hier 4) gleiche Teile, ziehe $k1$, $k2$, $k3$; die Schnittpunkte mit ag seien 3, 2, 1, dann sind 11, 22, 33 Tangenten der Ellipse.

β) Man ziehe bd (Abbild. 16) und nehme darauf beliebige Punkte n an, ziehe hnn' und $nn'' \parallel ba$, so ist $n'n''$ Tangente der Ellipse.

3. Parabel.

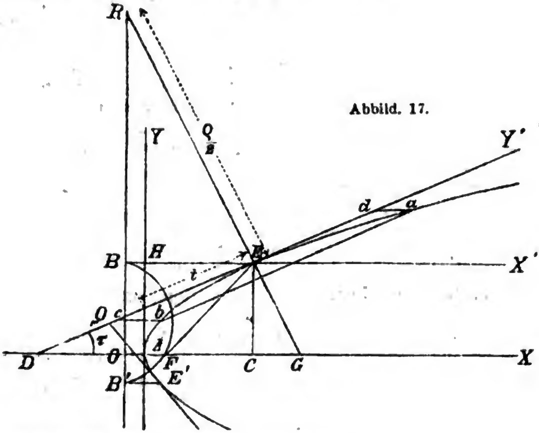
1. **Scheitelgleichung.** $y^2 = 2px$.

2. Der **Brennpunkt** hat vom Scheitel den Abstand $AF = \frac{1}{2}p$ (Abbild. 17), p ist die Ordinate im Brennpunkte. Die Linie, die im Abstande $-\frac{1}{2}p = AO$ der y-Achse parallel läuft, heifst **Leitlinie.**

Es ist dann für jeden Punkt der Parabel $FE = EB = \frac{1}{2}p + x$.

3. Ein Durchmesser EX' (Abbild. 17) der Parabel halbiert alle Sehnen, welche der Tangente EY' in seinem Endpunkte parallel sind; er ist parallel AX und heifst der der Richtung EY' zugeordnete Durchmesser.

Betrachtet man EX' und EY' als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der Parabel: $y'^2 = \frac{2p}{\sin^2 \tau} x' = 2p' x'$.



Abbild. 17.

4. **Gleichung der Tangente:** $\eta y = p(\xi + x)$.
Gleichung der Normale: $\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x)$.
$\Big\}\ \operatorname{tg} \tau = \frac{p}{y}$.

Hierin bezeichnen ξ, η die laufenden Koordinaten der Tangente bezw. Normale.

Die Tangente ED und die Normale EG halbieren die Winkel FEB und FEX'.

Subtangente $DC = 2x$. **Subnormale** $CG = p =$ konstant.

5. **Polargleichung,** bezogen auf F als Pol, FA als Polarachse:

$$r = \frac{p}{2\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}. \qquad \text{(Abbild. 17.)}$$

6. **Krümmungshalbmesser:** $\varrho = \frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 CEG}$. (Abbild. 17.)

Die Projektion von ϱ auf die x-Achse ist gleich $2\,EF = 2\,EB$. (Abbild. 17.) Demnach ist $ER = \frac{1}{2}\,\varrho$. Auch gilt die Konstruktion von ϱ, wie in Abbild. 12 für Ellipse und Hyperbel angegeben (s. S. 102). Krümmungshalbmesser im Scheitel $= p$.

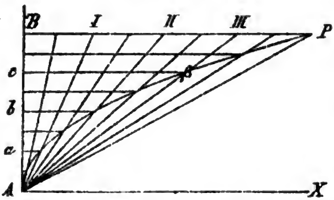
7. **Gleichung der Evolute:** $27\,py^2 = 8\,(x-p)^3$. Es ist dies die Neilsche oder semikubische Parabel.

8. **Fläche** $AEC = \frac{2}{3}\,xy$; $aEb = \frac{2}{3}\,abcd$. Näherungsweise ist der Inhalt eines beliebigen flachen Abschnitts von der Grundlinie g und der Höhe $h = \frac{2}{3}\,gh$.

9. **Bogenlänge** AE:

$$s = \frac{p}{2}\left\{\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right\} = t + \frac{p}{2}\ln\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}.$$

Abbild. 18.

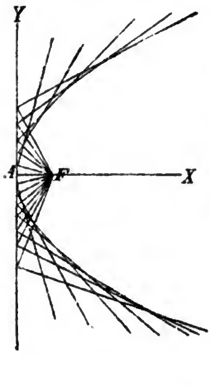


Wenn $\frac{x}{y}$ (wie bei Hängebrücken) ein kleiner Bruch ist, so ist annähernd:

$$s = y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

Dieselbe Formel gilt näherungsweise für die Länge eines beliebigen flachen Bogens, wenn man g für y und $\frac{2h}{g}$ für $\frac{x}{y}$ setzt. (Vergl. 8.)

Abbild. 19.



10. **Konstruktionen der Parabel.**

α) Gegeben Scheitel A, Achse AX und ein Punkt P (Abbild. 18).

AB ist $\perp AX$ in A; $PB \perp AB$; PB und AB sind in gleich viele gleiche Teile geteilt; verbinde III mit A, ziehe durch c eine Parallele zu AX, so ist β ein Punkt der Parabel.

β) Gegeben Scheitel A und Brennpunkt F (Abbild. 19).

Man lasse den Scheitel eines rechten Winkels an AY so gleiten, dafs der eine Schenkel immer durch F geht; der andere Schenkel bildet alsdann jederzeit eine Tangente an die Parabel.

γ) Gegeben zwei Tangenten PG und PH und ihre Berührungspunkte G und H (Abbild. 20).

Man teile PG und PH in n gleiche Teile (hier 6), so sind 11, 22, 33 u. s. w. Tangenten der Parabel.

Diese Konstruktion kann mit Vorteil bei der Zeichnung flacher Bögen angewandt werden.

11. **Konstruktion einer Tangente an die Parabel**

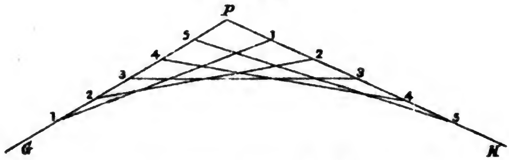
α)* **in einem Punkte** E (Abbild. 17).

Man mache $AD = AC$ oder $DF = FE$, so ist DE die Tangente.

β) **von einem Punkte** Q **aufserhalb der Parabel** (Abbild. 17).

Man beschreibe um Q mit QF einen Kreis, ziehe durch B und B' Parallelen zu AX, dann sind E und E' Berührungspunkte der Tangenten QE und QE'.

Abbild. 20.



Das für Ellipse und Hyperbel unter **2. 12.** und **13.** Gesagte gilt auch für die Parabel.

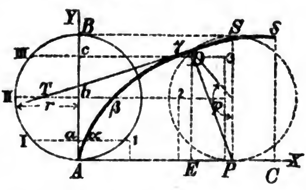
c. Die cyklischen Kurven.

I. Gemeine Cykloide.

1. Die Cykloide ist die Kurve, welche ein Punkt A einer Kreislinie AB beschreibt, wenn diese, ohne zu gleiten, auf einer Geraden AC sich abwälzt.

2. **Konstruktion** (Abbild. 21): Man mache $AC =$ Bogen $AB = \pi r$, teile beides in dieselbe Anzahl gleicher Teile, konstruiere die Schnittpunkte 1, 2, 3 und mache $1\alpha = aI$, $2\beta = bII$ und $3\gamma = cIII$; dann sind α, β, γ Punkte der Cykloide.

Abbild. 21.



3. **Gleichungen** der Cykloide, bezogen auf AC als x-Achse und AB als y-Achse:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi); \quad y = r(1 - \cos\varphi).$$

$$x = r \arccos\frac{r-y}{r} \pm \sqrt{(2r-y)\,y}.$$

4. Die **Normale** im Punkte D geht durch den Berührungspunkt P des erzeugenden Kreises und der Grundlinie AC. PD Normale, SDT Tangente.

5. **Krümmungshalbmesser:** $\varrho = 4r\sin\frac{1}{2}\varphi = 2\sqrt{2ry}$. ϱ ist doppelt so lang als die Normale.

6. Die **Evolute** der Cykloide ist eine der ursprünglichen Cykloide kongruente Kurve.

7. **Fläche** $AED = r^2(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi)$
$= \frac{3}{2}rx - \frac{1}{2}y\sqrt{(2r-y)y}$;
$AC\delta = \frac{3}{2}\pi r^2$.

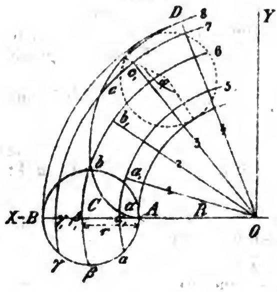
8. **Bogen** $AD = 4r(1-\cos\frac{1}{2}\varphi) = 4r - 2\sqrt{2r(2r-y)}$.
$A\delta = 4r$.

9. **Die verlängerte und die verkürzte Cykloide** entstehen, wenn der erzeugende Punkt aufserhalb bezw. innerhalb des rollenden Kreises im Abstande p von dessen Mittelpunkt liegt. Die Gleichungen sind: $x = r\varphi - p\sin\varphi$; $y = r - p\cos\varphi$.

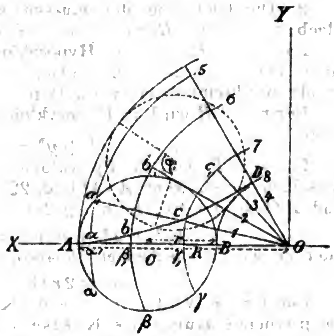
2. Epicykloide und Hypocykloide.

1. Ein Punkt A einer Kreislinie vom Halbmesser $AC = r$, welche sich auf einer Kreislinie vom Halbmesser $AO = R$ abwälzt, beschreibt eine Epicykloide, wenn die Berührung der Kreise äufserlich (Abbild. 22), eine Hypocykloide, wenn die Berührung innerlich (Abbild. 23) stattfindet.

Abbild. 22.



Abbild. 23.



2. **Konstruktion** (Abbild. 22 und 23): Man teile den Bogen AB und den Winkel $AOD = \frac{r}{R}180^0$ in dieselbe Anzahl gleicher Teile, ziehe die Halbmesser 1, 2, 3, 4 durch O und die Kreisbögen 5, 6, 7, 8 um O; macht man nun $a_1 a = \alpha_1 \alpha$, $b_1 b = \beta_1 \beta$ und $c_1 c = \gamma_1 \gamma$,

so sind A, a, b, c, D Punkte der Epicykloide (Abbild. 22), bezw. der Hypocykloide (Abbild. 23).

3. **Gleichungen.** (Die oberen Zeichen gelten für die Epicykloide, die unteren für die Hypocykloide):

$$x = (R \pm r) \cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) \mp r \cos\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right);$$

$$y = (R \pm r) \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r \sin\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right).$$

Die Hypocykloide R, r ist, je nachdem $r \gtrless R$, übereinstimmend mit der Hypocykloide R, $R - r$ oder der Epicykloide R, $r - R$.

4. Die **Normale** für irgend einen Punkt geht immer durch den Berührungspunkt des erzeugenden und des Grundkreises für die betreffende Lage.

5. **Krümmungshalbmesser**: $\varrho = \frac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r} \sin \frac{1}{2}\varphi$.

Für A ist: $\varrho' = 0$;

für D: $\varrho'' = 4r \frac{R \pm r}{R \pm 2r}$.

6. Die **Evolute** ist eine ähnliche Epi- bezw. Hypocykloide.

7. **Fläche** zwischen OA, der Kurve und einem Leitstrahl:

$$= \frac{r(R \pm r)(R \pm 2r)}{2R}(\varphi - \sin\varphi).$$

8. **Bogen** $s = 4r \frac{R \pm r}{R}(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi)$; Bogen $AD = 4r \frac{(R \pm r)}{R}$.

9. Die Gleichung der Kurven wird (durch Elimination von φ) algebraisch, wenn R und r ein meſsbares Verhältnis haben.

Für $r = \frac{1}{2}R$ wird die Hypocykloide eine Gerade in der Richtung AO. Jeder nicht im Umfange des erzeugenden Kreises liegende Punkt beschreibt dann eine Ellipse.

Für $r = \frac{1}{4}R$ wird die Hypocykloide zur Astrois, deren Gleichung lautet:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Für $r = R$ wird die Epicykloide zur Kardioide. Die Gleichung derselben lautet, wenn A (Abbild. 22) der Koordinaten-Anfangspunkt und AO die positive Richtung der x-Achse ist:

$$(y^2 + x^2 + a^2)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

oder in den entsprechenden Polarkoordinaten ϱ und ψ:

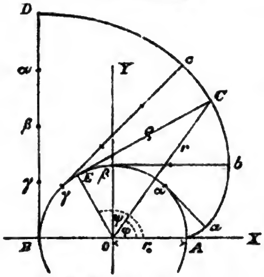
$$\varrho = 2r(1 + \cos\psi).$$

Für $r = \infty$ wird der rollende Kreis eine gerade Linie, die entsprechende Kurve eine Kreisevolvente. (s. f. S. u. 3.)

10. **Die verlängerte und die verkürzte Epi- oder Hypocykloide** entstehen, wenn der erzeugende Punkt auſserhalb bezw. innerhalb des erzeugenden Kreises im Abstande p von dessen Mittelpunkt liegt. Die Gleichungen sind:

$$x = (R \pm r)\cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) \mp p\cos\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right);$$
$$y = (R \pm r)\sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - p\sin\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right).$$

Abbild. 24.



3. Kreisevolvente.

1. Dieselbe beschreibt irgend ein Punkt einer Geraden, welche, ohne zu gleiten, auf einem Kreise sich abwälzt. (Fadenkonstruktion.)

2. **Konstruktion** (Abbild. 24): Man mache BD gleich dem Bogen AB und teile beide in n (hier 4) gleiche Teile: αa ist Tangente in α von der Länge $\alpha D = \frac{1}{4} BD$; βb ist Tangente in β von der Länge $\beta D = \frac{2}{4} BD$, u. s. w. Dann sind A, a, b, c, D Punkte der Evolvente.

3. **Gleichungen:** $x = r_0 (\cos\psi + \psi \sin\psi)$;
$y = r_0 (\sin\psi - \psi\cos\psi)$.

Polargleichung: $\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}$.

4. Der **Krümmungshalbmesser** ϱ eines Punktes C ist die Tangente CE von C an den Grundkreis, also gleich der Länge des Bogens AE.

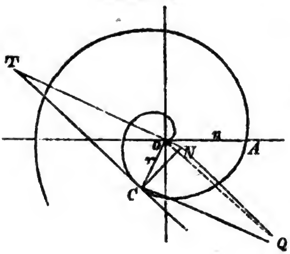
5. **Bogenlänge:** Der Bogen AC, welcher dem Winkel ψ entspricht, ist: $s = \frac{\varrho^2}{2r_0} = \frac{r_0\psi^2}{2}$.

6. **Fläche** $ACO = \frac{1}{6} r_0^2 \psi^3$.

d. Spiralen.

I. Archimedische Spirale.

Abbild. 25.



1. Sie entsteht, wenn ein Punkt C (Abbild. 25) sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Strahle OC bewegt, welcher seinerseits sich gleichförmig um den festen Punkt O dreht. Entspricht einer einmaligen Drehung von OC (= 360°) ein Weg von C auf $OC = r_0$, so ist nach $\frac{1}{n}$ Umdrehung der Leitstrahl $= \frac{r_0}{n}$, woraus die Konstruktion der Spirale folgt.

2. **Polargleichung:** $r = a\varphi = \frac{r_0}{2\pi}\varphi$, wenn r den Leitstrahl und φ den Polarwinkel, von OA aus gerechnet, bezeichnet.

3. Zieht man in einem beliebigen Punkte C die Tangente CT, ferner $OT \perp OC$ und $CN \perp CT$, so ist die **Polarsubtangente:** $OT = \frac{r^2}{a}$, die **Polarsubnormale:** $ON = a =$ konstant. Hieraus ergiebt sich die Konstruktion der Tangente an die Spirale.

4. **Krümmungshalbmesser:** $\varrho = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}$.

Konstruktion: Errichte auf CN (Abbild. 25) in N und auf OC in C Senkrechte; beide schneiden sich in Q; zieht man OQ, so schneidet diese die Normale CN im Krümmungsmittelpunkte.

5. **Bogenlänge:** $s = \frac{r}{4\pi}[\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2}\ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})]$

$$= \frac{r}{4\pi}[\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\varphi],$$

angenähert (für viele Windungen): $s = \frac{r_0}{4\pi}\varphi^2$.

2. Hyperbolische Spirale.

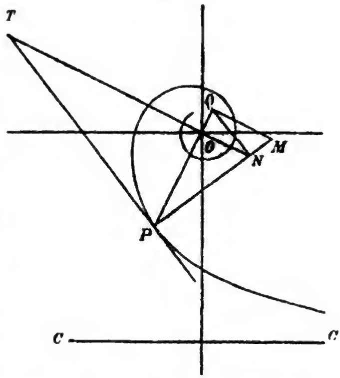
1. Trägt man von einem Durchmesser (Polarachse) einer Schar koncentrischer Kreise aus auf alle diese Kreise nach derselben Seite hin Bögen von der Länge a ab, so ist der geometrische Ort von deren Endpunkten eine hyperbolische Spirale. Ihre **Gleichung** ist:

$$r\varphi = a.$$

Der Pol ist ein **asymptotischer Punkt,** um welchen die Spirale unendlich viele Windungen beschreibt, ohne ihn im Endlichen zu erreichen.

Die zur Polarachse im Abstande a gezogene Parallele CC' ist **Asymptote** der Spirale.

Abbild. 26.



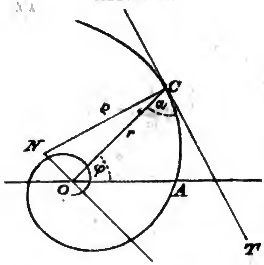
2. Zieht man in einem beliebigen Punkte P (Abbild. 26) die Tangente PT, ferner $OT \perp OP$, $PN \perp PT$, so ist:

Polarsubnormale $ON = -\frac{r^2}{a}$; **Polarsubtangente** $OT = -a =$ konstant. Hieraus ergiebt sich die Konstruktion der Tangente.

3. **Krümmungshalbmesser:** $\varrho = \frac{r}{\sin^3 OTP}$.

Konstruktion: Errichte auf PN (Abbild. 26) in N eine Senkrechte bis zum Schnitt mit der Verlängerung von PO in Q, ferner auf PQ in Q eine Senkrechte, so ist deren Schnittpunkt M mit der verlängerten Normale PN der Krümmungsmittelpunkt.

Abbild. 27.



3. Logarithmische Spirale.

1. **Gleichung;** $r = a\,e^{m\varphi}$. Für $\varphi = 0$ ist: $r = OA = a$ (Abbild. 27). Da ferner für $\varphi = -\infty$, $r = 0$ wird, so ist der Pol O ein **asymptotischer Punkt,** dem die Spirale für negative φ sich immer mehr nähert, ohne ihn zu erreichen.

2. Die **Tangente** CT in einem beliebigen Punkte C bildet mit dem Leitstrahle OC den konstanten Winkel α, so dafs $\operatorname{ctg} \alpha = m$.

3. **Polarsubnormale:** $ON = r \operatorname{ctg} \alpha = r\,m$.

Polarnormale: $CN = r\sqrt{1 + m^2} = \frac{r}{\sin \alpha}$

$= $ **Krümmungshalbmesser** ϱ in C.

4. Die **Evolute** der Spirale ist eine der gegebenen kongruente Kurve, gegen diese um den Winkel: $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln m}{m}$ gedreht.

5. **Fläche** $OAC = \frac{r^2}{4m} =$ dem halben, vom Leitstrahle, der Tangente und der Polarsubtangente gebildeten Dreiecke.

6. **Bogenlänge** von C bis zum Pol $= \frac{r}{\cos \alpha}$, gleich der Länge der Tangente CT bis zum Schnitt mit NO.

e. Gemeine Kettenlinie.

Die gemeine Kettenlinie ist die Gleichgewichtslinie eines an zwei Punkten aufgehängten, vollkommen biegsam gedachten Fadens, dessen Belastung überall proportional seiner Länge ist.

1. **Gleichung:** $y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \operatorname{Cof} \frac{x}{h}$.

$$x = h \ln\left(\frac{y}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}\right) = h \operatorname{Ar\,Cof} \frac{y}{h}.$$

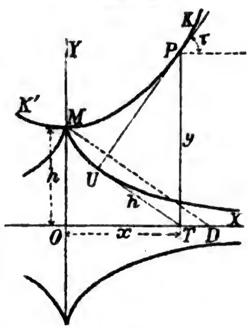
Der Anfangspunkt der Koordinaten liegt um $h = MO$ tiefer als der tiefste Punkt M der Kettenlinie KK' (Abbild. 28).

2. Der Winkel τ der Tangente UP in einem beliebigen Punkte P mit der (wagerechten) x-Achse bestimmt sich aus:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}; \quad \cos\tau = \frac{h}{y}.$$

Abbild. 28.



Führt man τ als die unabhängige Veränderliche ein, so erhält man die folgenden zwei Gleichungen der Kettenlinie:

$$x = h \ln \frac{1 + \sin\tau}{\cos\tau} = h \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$= h\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,(\operatorname{tg}\tau); \quad y = \frac{h}{\cos\tau}.$$

3. Der **Krümmungshalbmesser** im Punkte P ist gleich und entgegengerichtet der Normale im Punkte P, gemessen von P bis zur x-Achse $= \frac{y^2}{h} = \frac{h}{\cos^2\tau}$.

4. **Fläche** $OMPT$ hat den Inhalt:

$$F = \tfrac{1}{2} h^2 \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h^2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h} = h^2 \operatorname{tg}\tau = h\sqrt{y^2 - h^2}.$$

5. **Bogenlänge** MP:

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h} = h \operatorname{tg}\tau = \sqrt{y^2 - h^2} = PU = OD,$$

wenn $TU \perp PU$ und $MD \perp PU$.

$$x = h \ln\left[\frac{s}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{h}\right)^2}\right] = h\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{s}{h}.$$

Die Tafeln der Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Cos}\,x$ und $\mathfrak{Sin}\,x$ (s. S. 62 u. 63) geben ohne weiteres die Werte der Ordinaten bezw. Bogenlängen der Kettenlinie für den Parameter $h = 1$.

6. **Evolvente.** Ist Scheitel M Beginn der Abwicklung, so ist die Gleichung der Evolvente (s. Abbild. 28):

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 = \left[\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \ln\left(\pm\frac{h}{y} \pm \sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}\right)\right]^2,$$

$$= \left[\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\left(\pm\frac{h}{y}\right)\right]^2,$$

je nachdem y positiv oder negativ ist, oder auch:

$x = h\,(\mathfrak{Tg}\,\varphi - \varphi);\qquad y = \pm\dfrac{h}{\mathfrak{Cos}\,\varphi}$, wo φ eine unabhängige Veränderliche bezeichnet.

Hierin ist h die konstante Länge UT der Tangente von der Kurve bis zur x-Achse (Abbild. 28 a. v. S.). **(Huyghenssche Traktorie** oder **Antifriktionskurve.)**

7. Bezeichnet $2L$ die Länge einer Kette, $2l$ die wagerechte Entfernung, $2b$ die lotrechte Entfernung ihrer Aufhängepunkte, so findet man den Parameter h, den Anfangspunkt der Koordinaten und damit den tiefsten Punkt der Kettenlinie, wie folgt: Durch Versuche bestimmt man mit Hülfe der Tafel für log $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ (s. S. 64) die Gröfse φ aus

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{\varphi} = \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{l}, \text{ bezw. aus}$$

$$\log \mathfrak{Sin}\,\varphi - \log \varphi = \tfrac{1}{2} \log (L + b) + \tfrac{1}{2} \log (L - b) - \log l.$$

$$\text{Dann ist } h = \frac{l}{\varphi}.$$

Berechnet man noch die Gröfse ψ aus

$$\mathfrak{Tg}\,\psi = \frac{b}{L} \text{ (s. Tafel S. 66),}$$

so liegt der Anfangspunkt der Koordinaten in einer Tiefe $= L\,\mathfrak{Ctg}\,\varphi$ unter dem Mittelpunkt derjenigen Strecke, welche die Aufhängepunkte der Kette verbindet, und in einem wagerechten Abstande $= \psi h$ von jenem Mittelpunkte, u. zw. nach dem tiefer gelegenen Aufhängepunkte zu.

8. Liegen die Aufhängepunkte der Kette gleich hoch, so ist

$$b = 0, \quad \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{\varphi} = \frac{L}{l}, \quad h = \frac{l}{\varphi}.$$

Tiefe des Anfangspunktes der Koordinaten unter der Linie der Aufhängepunkte $y_0 = L\,\mathfrak{Ctg}\,\varphi$.

$$\text{Aufhängewinkel } \alpha: \cos \alpha = \frac{h}{y_0} = \frac{l\,\mathfrak{Tg}\,\varphi}{L\,\varphi}.$$

f. Gleichungen einiger anderen Kurven.

Kurve.	Rechtwinklige Koordinaten.	Polarkoordinaten.
1. Cissoide	$y^2 (a - x) = x^3$	$r = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$.
2. Lemniskate	$(x^2 + y^2)^2 = 2 c^2 (x^2 - y^2)$	$r = c \sqrt{2} \sqrt{\cos 2 \varphi}$.
3. Konchoide	$(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2 y^2$	$r = a + \frac{b}{\cos \varphi}$.
4. Descartessches Blatt	$x^3 + y^3 = 3 a x y$	$r = \frac{3 a \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$.
5. Vierblatt	$(x^2 + y^2)^3 = 4 a^2 x^2 y^2$	$r = a \sin 2 \varphi$.

1. Die **Cissoide.** Gegeben ein Kreis vom Durchmesser a; im Endpunkte eines festen Durchmessers, der x-Achse, eine Kreistangente; vom anderen Endpunkte, dem Koordinaten-Anfangspunkte, beliebige Sekanten bis zum Schnitt mit der Tangente. Trägt man nun die Sehnen, welche der Kreis von den Sekanten abschneidet, auf diesen von ihrem Schnittpunkt mit der Tangente aus ab, so bestimmen die Endpunkte die Cissoide.

2. Die **Lemniskate** ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche das Produkt ihrer Abstände von zwei festen Punkten F und F', deren Abstand $= 2c$, konstant u. zw. $= c^2$ ist.

Die in der Mitte der Strecke $2c$ (Koordinaten-Anfangspunkt) sich schneidenden Aeste stehen senkrecht aufeinander.

Die Halbachse der Kurve ist $c\sqrt{2}$.

Der Winkel zwischen Leitstrahl und Normale $= 2\varphi$.

Für y_{max} ist $\varphi = 30^0$ und $r = c$.

Ganze Fläche der Lemniskate $F = a^2$.

3. Die **Konchoide** ist der geometrische Ort der Endpunkte der von einem Pole P nach einer Geraden gezogenen Strahlen, auf welchen man, von ihren Schnittpunkten mit der Graden aus, die konstante Länge a abträgt. Entfernung der Geraden vom Pol $= b$.

C. Punkt, gerade Linie und Ebene im Raum.

Folgende Entwicklungen beziehen sich auf drei zu einander rechtwinklige Raumkoordinaten.

1. Sind x, y, z und x_0, y_0, z_0 die Koordinaten zweier Punkte, deren Entfernung von einander r ist; ferner α, β, γ die Winkel, die r mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so ist:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{r}; \ \cos\beta = \frac{y - y_0}{r}; \ \cos\gamma = \frac{z - z_0}{r}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Teilt man die Strecke r nach dem Verhältnis $1 : n$ und nennt die Koordinaten des Teilpunktes x_1, y_1, z_1, so ist:

$$x_1 = \frac{x + n x_0}{n + 1}; \ y_1 = \frac{y + n y_0}{n + 1}; \ z_1 = \frac{z + n z_0}{n + 1}.$$

3. Der **Winkel** w, welchen zwei durch die Winkel α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 gegebene Richtungen mit einander einschliefsen, ist bestimmt durch:

$$\cos w = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Stehen beide Richtungen auf einander senkrecht, so ist:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0.$$

4. Nennt man λ, μ, ν die Winkel, welche die **Normale** zu den beiden unter 3. angegebenen Richtungen mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so ist:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma}{\sin w}; \quad \cos\mu = \frac{\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha}{\sin w};$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta}{\sin w}.$$

Legt man eine Gerade von der Richtung (α, β, γ) durch den Punkt (x, y, z) und eine zweite von der Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ durch den Punkt (x_1, y_1, z_1), so ist der kürzeste Abstand der Geraden von einander gleich dem absoluten Werte von:

$$(x_1 - x)\cos\lambda + (y_1 - y)\cos\mu + (z_1 - z)\cos\nu.$$

5. Eine **gerade Linie** im Raume ist durch die beiden Gleichungen bestimmt:

$$y = mx + b, \qquad z = m_1 x + b_1.$$

Geht eine Gerade durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) und bildet sie mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so sind ihre Gleichungen:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

In obigen Gleichungen ist sonach:

$$m = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}; \quad m_1 = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

Die Gleichungen der durch die Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) gehenden geraden Linie sind:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6. Bedingung dafür, dafs zwei gerade Linien sich schneiden, ist, dafs die Determinante der auf die Form $mx + ny + pz + q = 0$ gebrachten 4 Gleichungen der beiden Geraden identisch verschwindet.

7. **Gleichung der Ebene** ist allgemein:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Alle Punkte also, deren Koordinaten einer Gleichung ersten Grades zwischen drei Veränderlichen genügen, liegen in einer Ebene.

8. Schneidet eine Ebene die Achsen in den Entfernungen a, b, c vom Anfangspunkte, so ist ihre Gleichung:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

9. Bildet eine vom Anfangspunkte der Koordinaten ausgehende Strecke l mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so ist die Gleichung einer Ebene, welche im Endpunkte von l normal auf l steht:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - l = 0. \quad \textbf{(Normalform.)}$$

Ist statt der Länge l ein Punkt (x_1, y_1, z_1) der Ebene gegeben, so ist die Gleichung der Ebene:

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0,$$

oder:

$$(x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1 + (z - z_1)z_1 = 0.$$

10. Um die allgemeine Gleichung der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in die Normalform

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - l = 0$$

zu bringen, hat man zu setzen:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \qquad l = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist überall so zu wählen, daſs l positiv wird.

11. Der **Abstand p eines Punktes** (x_1, y_1, z_1) von der Ebene der Gleichung

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - l = 0 \text{ ist:}$$

$$p = \pm (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - l),$$

wo das positive oder negative Zeichen gilt, je nachdem der Punkt (x_1, y_1, z_1) und der Anfangspunkt der Koordinaten auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Ebene sich befinden.

12. Ist $Ax + By + Cz + D = 0$ die Gleichung einer Ebene, so ist die auf ihr in einem Punkte (x_1, y_1, z_1) errichtete **Normale** bestimmt durch:

$$z - z_1 = \frac{C}{A}(x - x_1); \qquad z - z_1 = \frac{C}{B}(y - y_1),$$

und die Cosinus der Winkel, welche diese Normale mit den Koordinatenachsen x, y, z (oder welche die gegebene Ebene mit den Ebenen yz, xz, xy) einschlieſst, sind:

$$\cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \qquad \cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

13. Gehen zwei Richtungen (α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) durch denselben Punkt (x_1, y_1, z_1), so ist die Gleichung der Ebene, welche durch die Richtungen und den Punkt bestimmt ist:

$$(x-x_1)(\cos\beta\cos\gamma_1 + \cos\beta_1\cos\gamma) + (y-y_1)(\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\alpha\cos\gamma_1)$$
$$+ (z - z_1)(\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta) = 0.$$

14. Sind: $Ax + By + Cz + D = 0$ und

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

die Gleichungen zweier Ebenen, so ist, wenn λ eine beliebige Zahl:

$$(Ax + By + Cz + D) + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0,$$

oder: $(A + \lambda A_1)x + (B + \lambda B_1)y + (C + \lambda C_1)z + D + \lambda D_1 = 0$ die Gleichung einer Ebene, welche durch die Schnittlinie beider Ebenen geht. Die Gleichung der Projektion dieser Schnittlinie auf die xy-Ebene erhält man durch Elimination von z aus den Gleichungen

beider Ebenen; entsprechend die der Projektion auf die xz- bezw. yz-Ebene.

15. Sind: $Ax + By + Cz + D = 0$ und
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
die Gleichungen zweier Ebenen, und ist w der **Winkel der Normalen** beider Ebenen, so hat man:

$$\cos w = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}}.$$

Die Ebenen sind **normal** zu einander, wenn:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

16. Zwei Gleichungen von der Form:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ und}$$
$$k(Ax + By + Cz) + D_1 = 0,$$

worin k eine beliebige Konstante ist, stellen **parallele Ebenen** dar.

17. Die Winkel der beiden Ebenen:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ und}$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

werden halbiert durch die Ebenen:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \mp \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = 0.$$

18. **Umwandlung der Koordinaten.**

Die Koordinaten in Beziehung auf das alte System seien x, y, z, auf das neue x', y', z'.

α. Die Richtung der Achsen sei unverändert, die Koordinaten des neuen Anfangspunktes seien f, g, h, dann ist:

$$x = f + x'; \quad y = g + y'; \quad z = h + z'.$$

β. Der Anfangspunkt sei unverändert, die Achsen seien gedreht. Die Cosinus der Winkel, welche die neuen Achsen x', y', z' mit der alten Achse x bilden, seien a, b, c,

entsprechend mit der alten Achse y: a', b', c';
" " " " " z: a'', b'', c''; dann ist:

$x = ax' + by' + cz'$	$x' = ax + a'y + a''z$
$y = a'x' + b'y' + c'z'$	$y' = bx + b'y + b''z$
$z = a''x' + b''y' + c''z'$	$z' = cx + c'y + c''z.$

Zwischen den Koefficienten a, b, c finden folgende Beziehungen statt:

1) $a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$	2) $ab + a'b' + a''b'' = 0$
$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1$	$ac + a'c' + a''c'' = 0$
$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$	$bc + b'c' + b''c'' = 0$
3) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$	4) $aa' + bb' + cc' = 0$
$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$	$aa'' + bb'' + cc'' = 0$
$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$	$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$

5) $a = b'c'' - c'b''$	6) $a' = cb'' - bc''$	7) $a'' = bc' - cb'$
$b = c'a'' - a'c''$	$b' = ac'' - ca''$	$b'' = ca' - ac'$
$c = a'b'' - b'a''$	$c' = ba'' - ab''$	$c'' = ab' - ba'.$

γ. Bei gleichzeitiger Verschiebung und Drehung verbinde man die Formeln unter α. und β. entsprechend.

δ. Um die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes in **Polarkoordinaten** r, φ, ϑ zu verwandeln, suche man zunächst die Koordinaten x', y', z' desselben, bezogen auf ein rechtwinkliges System, dessen Anfangspunkt der Pol, dessen xy-Ebene die Aequatorebene, dessen x-Achse die Polarachse ist, von der aus φ gezählt wird; dann ist:

$$x' = r\cos\varphi\cos\vartheta; \quad y' = r\sin\varphi\cos\vartheta; \quad z' = r\sin\vartheta.$$

Für die Punkte in der xy-Ebene ist: $\vartheta = 0$.

D. Kurven doppelter Krümmung.

a. Allgemeine Sätze.

1. Eine Kurve doppelter Krümmung bezogen auf Parallelkoordinaten wird dargestellt durch zwei Gleichungen:

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Sie ist die Schnittkurve der beiden Flächen, welche diese Gleichungen, einzeln genommen, vorstellen.

Die Kurve ist auch bestimmt durch die Gleichungen ihrer Projektionen auf die xy- und die xz-Ebene:

$$y = \varphi_1(x); \quad z = \varphi_2(x).$$

2. Die Winkel α, β, γ, welche die **Tangente** im Punkte (x, y, z) mit den Koordinatenachsen der x, y, z bildet, erhält man aus:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

das **Bogendifferential** aus:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

3. Die **Gleichungen der Tangente** im Punkte (x, y, z) sind:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

4. Die **Gleichung der Normalebene** ist:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

5. Eine Ebene, welche durch den Punkt (x, y, z) und die beiden benachbarten Punkte der Kurve geht, nennt man die **Krümmungsebene** in dem Punkte (x, y, z).

Setzt man:

$$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y; \quad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z; \quad C = dx\,d^2y - dy\,d^2x;$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$

$$= ds^2\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

so ist die Gleichung der Krümmungsebene:

$$(\xi - x)A + (\eta - y)B + (\zeta - z)C = 0.$$

Die Winkel, welche die Normale zur Krümmungsebene mit der x-, y-, z-Achse bildet, folgen aus:

$$\cos\lambda = \frac{A}{D};\quad \cos\mu = \frac{B}{D};\quad \cos\nu = \frac{C}{D}.$$

6. Bezeichnet man den Winkel zweier benachbarten Tangenten mit $d\tau$, so ist:

$$d\tau = \frac{D}{ds^2},$$

und der Halbmesser für die Krümmung in der Krümmungsebene oder der **ersten Krümmung** der Kurve ist:

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Die Koordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes sind:

$$X = x + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds};\quad Y = y + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds};\quad Z = z + \varrho_1^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

7. Zwei benachbarte Krümmungsebenen bilden mit einander einen Winkel:

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$
$$= \frac{A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z}{D^2}\,ds;$$

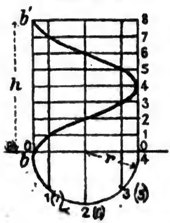
man nennt: $\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}$ den Halbmesser der **zweiten Krümmung** oder der Drehung der Kurve.

Die Kurve ist eine ebene Kurve, wenn für alle Punkte $d\vartheta = 0$ oder die Determinante:

$$Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

b. Cylindrische Schraubenlinie.

Abbild. 29.



1. Eine cylindrische Schraubenlinie wird durch einen Punkt erzeugt, welcher gleichförmig eine Kreislinie durchläuft, während letztere selbst sich in einer Richtung, die auf ihrer Ebene senkrecht steht, gleichförmig fortbewegt, also den Mantel eines Cylinders beschreibt.

Der Halbmesser dieses Cylinders sei r, die Steigung der Schraube $bb' = h$ (Abbild. 29), die Tangente des Steigungswinkels: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r} = a$. Die Achse des Cylinders sei die z-Achse, die

x-Achse schneide die Schraubenlinie im Punkte b. Der Winkel, den die Projektion des Leitstrahls auf die xy-Ebene mit der x-Achse bildet, sei φ.

Alsdann sind die **Gleichungen** der Schraubenlinie:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = ar\varphi;$$

oder:

$$x = r\cos\frac{z}{ar}; \quad y = r\sin\frac{z}{ar}.$$

2. Die **Gleichungen der Tangente** sind:

$$-\frac{\xi - x}{\sin\varphi} = \frac{\eta - y}{\cos\varphi} = \frac{\zeta - z}{a}.$$

Die Tangente bildet mit der z-Achse und den Seiten des Cylinders einen konstanten Winkel: $\gamma = 90^0 - \alpha$.

Wickelt man daher den Mantel des Cylinders und auf ihm die Schraubenlinie in eine Ebene ab, so wird die Kurve eine gerade Linie.

3. Die **Krümmungshalbmesser** sind:

$$\varrho_1 = r(1 + a^2) = \frac{r}{\cos^2\alpha} \text{ (erste Krümmung)},$$

$$\varrho_2 = r\frac{1 + a^2}{a} = \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha} \text{ (zweite Krümmung)}.$$

Es sind also ϱ_1 und ϱ_2 konstant, aufserdem ist ϱ_1 stets normal zur z-Achse.

4. **Bogenlänge:** $s = \frac{r}{\cos\alpha}\varphi = r\varphi\sqrt{1 + a^2}$.

5. **Konstruktion der Projektion der Schraubenlinie** auf die xz-Ebene (Abbild. 29). Man teile die Steigung h in n gleiche Teile, ebenso von b aus den als Kreis sich darstellenden Normalschnitt des Cylinders. Durch die ersteren Teilpunkte lege man wagerechte, durch die letzteren lotrechte Linien; der Schnittpunkt einer Wagerechten mit der entsprechenden Lotrechten ist ein Punkt der Projektion der Schraubenlinie.

E. Krumme Flächen.

a. Allgemeine Sätze.

1. Die Gleichung einer krummen Fläche in rechtwinkligen Koordinaten hat die allgemeine Form:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Durch Entwicklung nach z wird dieselbe:

$$z = f(x, y).$$

Es werde bezeichnet:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

2. Gleichung der **Tangentialebene** im Punkte (x, y, z) der Fläche:

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

3. Gleichungen der **Normale:**

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die Winkel α, β, γ, welche die Normale mit der x-, y-, z-Achse bildet, erhält man aus:

$$\cos\alpha = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial x}; \qquad \cos\beta = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial y}; \qquad \cos\gamma = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial z},$$

worin:

$$W = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

4. Das **Element der krummen Fläche,** dessen Projektion auf die xy-Ebene $= dx \,.\, dy$, ist

$$dO = \frac{dx \,.\, dy \,.\, W}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die doppelte Integration dieses Ausdrucks (nach beliebigen oder von einander abhängigen Grenzen) ergiebt den Inhalt eines bestimmten Bereiches der krummen Fläche.

5. Jede durch die Normale gehende Ebene bildet mit der Fläche eine Durchschnittslinie, welche man **Normalschnitt** nennt. Bildet die Tangente an diesen mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν, so ist der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes:

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\lambda + 2s\cos\lambda\cos\mu + t\cos^2\mu}.$$

6. **Satz von Meunier.**

Eine Ebene, welche durch die Tangente des Normalschnittes hindurchgeht und mit dessen Ebene einen Winkel ϑ bildet, schneidet die Fläche in einem schiefen Schnitt; sein Krümmungshalbmesser in dem betreffenden Punkte ist:

$$\varrho' = \varrho\cos\vartheta.$$

7. Die auf einander senkrechten Normalschnitte, für welche ϱ ein Maximum ϱ_1 bezw. ein Minimum ϱ_2 wird, nennt man **Hauptnormalschnitte.** Die Werte von ϱ_1 und ϱ_2 erhält man aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

8. **Satz von Euler.**

Für irgend einen anderen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene von ϱ_1 den Winkel φ bildet, ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}.$$

9. Den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$ nennt man das **Maſs der Krümmung** der Fläche in diesem Punkte.

b. Flächen zweiter Ordnung.

1. Die **allgemeine Form der Gleichung** der Flächen zweiter Ordnung ist:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx$$
$$+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

2. Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Gamma; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta; \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_1; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_2,$$

(wobei $a_{ik} = a_{ki}$), so ergeben sich folgende Bedingungen für die Hauptflächen, welche die allgemeine Gleichung darstellt, wenn $a_{11} > 0$ ist:

	$\Delta > 0,\ \delta_1 > 0,$	$\Gamma < 0$	Ellipsoid.
	$\Delta < 0$	$\Gamma < 0$	einschaliges Hyperboloid.
oder:	$\Delta > 0,\ \delta_1 < 0$	$\Gamma = 0$	Kegel.
		$\Gamma > 0$	zweischaliges Hyperboloid.
	$\Delta = 0$	$\delta_1 < 0$ oder $\delta_2 < 0$	hyperbolisches Paraboloid.
	$\Delta = 0$	$\delta_1 > 0$ oder $\delta_2 > 0$	elliptisches Paraboloid.

3. Für die Mittelpunktsflächen ($\Delta \gtrless 0$) ergiebt sich der **Mittelpunkt** als Durchschnitt der Ebenen:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0.$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = 0.$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 = 0.$$

4. Die Gleichungen der Mittelpunktsflächen, bezogen auf den Mittelpunkt als Anfang eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Achsen in die Hauptachsen der Flächen fallen, sind:

für das **Ellipsoid**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

für das **einschalige Hyperboloid**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

für das **zweischalige Hyperboloid**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hierin bedeuten a, b, c die Halbachsen der Hauptschnitte; sie sind im ersten Falle sämtlich reell, im zweiten Falle bedeutet c und im dritten b und c die imaginären Halbachsen der Hauptschnittshyperbeln.

5. **Paraboloide.** Gleichung in einfachster Form:

$$\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = z.$$

Das obere Zeichen gilt für das elliptische Paraboloid; p, q sind die Parameter der Hauptschnittsparabeln. Für das hyperbolische Paraboloid ist p der Parameter der Hauptschnittsparabel, $q = p \operatorname{tg}^2 \varphi$, φ der halbe Winkel der Asymptotenebenen.

6. **Kugel.** Mittelpunktsgleichung: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel, so ist ihre Gleichung:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = r^2.$$

Jede Gleichung von der Form:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

stellt eine Kugel dar; dabei ist:

$$\xi = -\tfrac{1}{2} a; \quad \eta = -\tfrac{1}{2} b; \quad \zeta = -\tfrac{1}{2} c;$$
$$r = \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{4} c^2 - d}.$$

7. **Cylinder.** Die Gleichung eines auf einer Koordinatenebene normal stehenden Cylinders ist bestimmt durch die Gleichung der Durchschnittskurven in der Ebene.

Ist der Durchschnitt eines Cylinders mit der xy-Ebene eine Ellipse, deren Halbachsen a und b, und bilden die Seiten mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so ist seine Gleichung:

$$\frac{\left(x - z\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - z\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)^2}{b^2} = 1.$$

8. **Kegel.** Jede homogene Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

stellt einen Kegel dar.

Ist die Leitkurve des Kegels eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, deren Ebene in der Entfernung h normal zur z-Achse steht, so ist die Gleichung des Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte der Koordinaten liegt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0.$$

Ist die Leitkurve ein ebensolcher Kreis vom Halbmesser a (Umdrehungskegel), so ist in obiger Gleichung des Kegels $b = a$ zu setzen.

c. Umdrehungsflächen.

1. $y = f(x)$ sei die Gleichung der Meridianlinie einer Umdrehungsfläche in bezug auf die Umdrehungsachse als x-Achse.

Es bezeichne:

F den Inhalt desjenigen Teils der Oberfläche, welcher zwischen zwei im Abstande x_0 und x vom Anfangspunkte zur x-Achse normal gelegten Ebenen enthalten ist,

V den Inhalt des Umdrehungskörpers, welcher zwischen diesen Ebenen und der Fläche liegt.

Dann ist: $$F = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\,ds, \qquad V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2\,dx,$$

wo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Bogendifferential der Meridianlinie ist.*)

2. Die Normalen zur Umdrehungsfläche schneiden sämtlich die Umdrehungsachse.

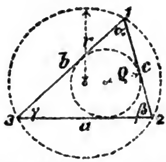
3. Für jeden Punkt der Umdrehungsfläche ist die durch denselben gehende Meridianlinie der eine Hauptschnitt und also der Krümmungshalbmesser der Meridianlinie in dem betreffenden Punkte der eine Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche; der andere Hauptkrümmungshalbmesser ist gleich dem Stück der Normalen, welches zwischen der Fläche und der Umdrehungsachse liegt.

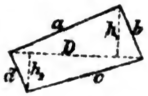
---

*) Vergl. Guldinsche Regel a. S. 134.

VII. INHALTE VON FLÄCHEN UND KÖRPERN.

A. Flächeninhalte ebener Gebilde.

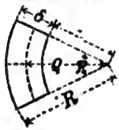
Gebilde.	Bezeichnung der Abmessungen.	Flächeninhalt F.
1. Dreieck. (Vergl. S. 54.)	Abbild. 30.  h die Höhe zur Seite a. $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Koordinaten der Ecken in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz.	$F = \frac{1}{2} a h$ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= \frac{1}{2} a b \sin\gamma$ $= \frac{a^2}{2} \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$ $= 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ $= \varrho^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ $= \varrho s = \frac{abc}{4r}$ $= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$ $= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ + x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ + x_3 y_1 - x_1 y_3 \end{array} \right\}$.
	Der Koordinaten-Anfangspunkt liegt in der Ecke 3: $[x_3 = 0,\ y_3 = 0]$.	$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$.
Rechtwinkliges Dreieck.	a, b Katheten. c Hypotenuse. α der a gegenüberliegende Winkel.	$F = \frac{1}{2} a b$ $= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg}\alpha$ $= \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg}\alpha$ $= \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$.

Gebilde.	Bezeichnung der Abmessungen.	Flächeninhalt F.
2. Viereck.	Abbild. 31. 	$F = \frac{h_1 + h_2}{2} D.$
Kreisviereck.	a, b, c, d die 4 Seiten. $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.	$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$
Trapez.	a, b die parallelen Seiten. h die Höhe.	$F = \frac{a + b}{2} h.$
Parallelo-gramm.	a, b die Seiten. h der Abstand der Seiten b. γ der Winkel des P.'s.	$F = bh$ $= ab \sin\gamma.$
Rechteck.	a, b die Seiten.	$F = ab.$
Rhombus.	a Seite, γ Winkel } des Rhombus.	$F = a^2 \sin\gamma.$
3. Vieleck.	$x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3 \ldots x_n y_n$ die Koordinaten der n Ecken in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz.	$F = \frac{1}{2} \{(x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x_4 y_3 - x_3 y_4) + \ldots + (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) + (x_1 y_n - x_n y_1)\}.$ F kann auch bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittelst Diagonalen.
Regelmäfsiges Vieleck.	a die Seite. r der Halbmesser des eingeschrieb. Kreises. R der Halbmesser des umschriebenen Kreises. n die Anzahl der Seiten. U der Umfang.	$F = \frac{n}{4} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ $= n r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$ $U = na = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$ $= 2nr \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$

(Tafel s. umstehend.)

Tafel regelmäfsiger Vielecke.

n	F	F	R	a	r	Winkel des Vielecks.
3	0,4330 a^2	1,2990 R^2	0,5774 a	1,7321 R	0,50000 R	60°
4	1,0000 -	2,0000 -	0,7071 -	1,4142 -	0,70711 -	90°
5	1,7205 -	2,3776 -	0,8507 -	1,1756 -	0,80902 -	108°
6	2,5981 -	2,5981 -	1,0000 -	1,0000 -	0,86603 -	120°
7	3,6339 -	2,7364 -	1,1524 -	0,8678 -	0,90097 -	128° 34',3
8	4,8284 -	2,8284 -	1,3066 -	0,7654 -	0,92388 -	135°
9	6,1818 -	2,8925 -	1,4619 -	0,6840 -	0,93969 -	140°
10	7,6942 -	2,9389 -	1,6180 -	0,6180 -	0,95106 -	144°
12	11,1962 -	3,0000 -	1,9319 -	0,5176 -	0,96593 -	150°
15	17,6424 -	3,0505 -	2,4049 -	0,4158 -	0,97815 -	156°
16	20,1094 -	3,0615 -	2,5629 -	0,3902 -	0,98078 -	157° 30'
20	31,5688 -	3,0902 -	3,1963 -	0,3129 -	0,98769 -	162°
24	45,5745 -	3,1058 -	3,8305 -	0,2611 -	0,99144 -	165°
32	81,2254 -	3,1215 -	5,1013 -	0,1960 -	0,99519 -	168° 45'
48	183,0846 -	3,1326 -	7,6876 -	0,1301 -	0,99786 -	172° 30'
64	325,6923 -	3,1366 -	10,1899 -	0,0981 -	0,99880 -	174° 22',5

Gebilde.	Bezeichnung der Abmessungen.	Flächeninhalt F.
4. Kreis. (Tafel für F und U s. S. 1 bis 21.)	r der Halbmesser. R der Durchmesser. U der Umfang.	$F = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = 0{,}7854 d^2$ $= \frac{1}{4} U d.$ $U = \pi d.$
Kreisring. Für F ist die Tafel auf S. 1 bis 21 zu benutzen.	R äufserer, r innerer } Halbmesser. D äufserer, d innerer } Durchmesser. ϱ mittlerer Halbmesser. δ Ringbreite.	$F = \pi (R^2 - r^2)$ $= \frac{1}{4}\pi (D^2 - d^2)$ $= \frac{1}{4}\pi D^2 - \frac{1}{4}\pi d^2$ $= 2\pi\varrho\delta.$
Kreis-ausschnitt. Für F kann die Tafel auf S. 1 bis 21 benutzt werden.	r der Halbmesser. b die Bogenlänge. φ^0 der zum Bogen b gehörige Centriwinkel in Grad. φ der dem Halbmesser 1 entsprechende Bogen.	$F = \frac{1}{2} b r$ $= \frac{\varphi^0}{360} \pi r^2$ $= \frac{1}{2} \varphi r^2.$ $\varphi = \frac{\varphi^0 \pi}{180}. \quad b = \frac{\varphi^0 \pi}{180} r.$
Kreisabschnitt. Tafel s. S. 28 u. 29.	r der Halbmesser. φ^0 der Centriwinkel in Grad.	$F = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\varphi^0 \pi}{180} - \sin\varphi\right).$
Ringstück.	Abbild. 32. 	$F = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (R^2 - r^2).$ $= \frac{\varphi^0 \pi}{180} \varrho \delta.$

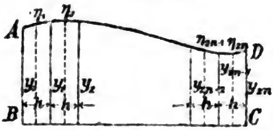
5. Ellipse und Ellipsenabschnitt s. S. 103 bezw. 102.
Hyperbelabschnitt s. S. 103.
Parabelabschnitt s. S. 106.
Cykloidenfläche s. S. 108.

Die Flächen anderer Kurven s. unter VI. B. S. 109 bis 115.

6. Beliebige Fläche.

α. Die Fläche sei begrenzt auf drei Seiten durch gerade Linien, von welchen $AB = y_0$ und $DC = y_{2n}$ (s. Abbild. 33) normal zu BC stehen. Man teile BC in eine **gerade** Anzahl $(2n)$ gleicher Teile h, errichte in den Teilpunkten Ordinaten $y_1, y_2 \ldots\ldots y_{2n-1}$, bezeichne ferner die mittleren Höhen der so gebildeten Flächenteile mit $\eta_1, \eta_2 \ldots\ldots \eta_{2n}$, so ermittelt sich näherungsweise der Inhalt der Fläche $ABCD$ aus einer der nach fortschreitender Genauigkeit geordneten Formeln:

Abbild. 33.



1. $F = h\left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + \frac{1}{2} y_{2n}\right)$.
2. $F = h\Sigma(\eta)$.
3. $F = \frac{1}{3} h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$.
4. $F = h\Sigma\left[\eta + \frac{1}{12}(y_0 - \eta_1) + \frac{1}{12}(y_{2n} - \eta_{2n})\right]$. *)
5. $F = h\Sigma\left[\eta + \frac{1}{72}(8y_0 + \eta_2 - 9\eta_1) + \frac{1}{72}(8y_{2n} + \eta_{2n-1} - 9\eta_{2n})\right]$. **)

β. Formel 3, die **Simpsonsche Regel**, liefert nur dann genaue Werte, wenn der Ausdruck für eine Ordinate eine ganze Funktion höchstens dritten Grades ihres Abstandes von einem beliebigen Punkte ist; alsdann braucht nur die mittlere Ordinate zwischen y_0 und y_{2n}, y_m, gemessen oder berechnet zu werden, und es ist, wenn H die ganze Höhe BC bezeichnet:

$$F = \frac{1}{6} H(y_0 + 4y_m + y_{2n}).$$

γ. Hat man 5 je um h von einander abstehende Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 gemessen oder berechnet, so ist auch:

$$F = \frac{2}{45} h\left[7(y_0 + y_4) + 32(y_1 + y_3) + 12 y_2\right].$$

Diese Formel ist genau richtig, wenn y eine ganze Funktion höchstens vierten Grades seines Abstandes von einem beliebigen Punkte ist.

δ. Weitere Näherungsformeln finden sich auf S. 80 u. 81, insofern das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ den Inhalt der Fläche $ABCD$ darstellt, wenn

---

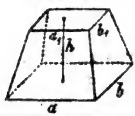
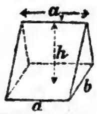
*) Nach Poncelet.

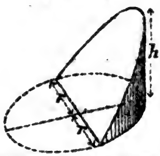
**) Nach Franke. Vergl. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1875. S. 177.

BC die x-Achse, die Gleichung der Kurve AD $y = f(x)$ ist und a und b die zu AB und DC gehörigen Abscissen sind.

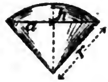
Obige Regeln gelten auch für den Inhalt eines von zwei parallelen Ebenen begrenzten Körpers, wenn unter $y_0 \dots y_{2n}$ die Flächeninhalte der durch parallele Ebenen gebildeten Querschnitte verstanden werden.

B. Inhalte und Oberflächen von Körpern.

Körper.	Bezeichnung der Abmessungen.	Inhalt = J. Oberfläche = O. Mantelfläche = M.
1. Prisma.		J = Grundfläche × Höhe.
Schief abgeschn. dreiseitiges Prisma.	N = Normalschnitt. a, b, c Längen der 3 Kanten.	$J = \frac{1}{3}(a + b + c) N$.
Rechtwinkliges Parallelopiped.	a, b, c Längen der 3 Kanten.	$J = abc$. $O = 2(ab + ac + bc)$.
2. Pyramide.		$J = \frac{1}{3}$ Grundfläche × Höhe.
Dreiseitige Pyramide.	$x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, $x_3\ y_3\ z_3$ die Koordinaten von drei Eckpunkten; der Anfangspunkt liegt in der vierten Ecke.	$J = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.
Abgestumpfte Pyramide.	F, f die parallelen Endflächen. h deren Abstand.	$J = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff})$.
3. Obelisk. (Abbild. 34.)	Abbild. 34. 	$J = \frac{1}{6} h [(2a + a_1) b + (2a_1 + a) b_1]$.
4. Keil. (Abbild. 35.)	Abbild. 35. 	$J = \frac{1}{6}(2a + a_1) b h$.
5. Cylinder.		J = Grundfläche × Höhe.
Kreiscylinder.	r = Halbmesser der Grundfläche. h = Höhe.	$J = \pi r^2 h$. $M = 2\pi r h$. $O = 2\pi r (r + h)$.

Körper.	Bezeichnung der Abmessungen.	Inhalt $= J$. Oberfläche $= O$. Mantelfläche $= M$.
Schief abgeschnittener Cylinder.	h_1 = kürzeste Cylinderseite, h_2 = längste " r = Halbmesser d. Grundfl.	$J = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$. $M = \pi r (h_1 + h_2)$.
Hohlcylinder (Rohr).	R = äufserer Halbmesser. r = innerer Halbmesser. h = Höhe. $\delta = R - r$ = Dicke. $\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$ = mittlerer Halbmesser.	$J = \pi h (R^2 - r^2)$ $= \pi h \delta (2R - \delta)$ $= \pi h \delta (2r + \delta)$ $= 2 \pi h \delta \varrho$.
Cylinderhuf. (Abbild. 36.)	Abbild. 36. 	$J = \frac{2}{3} r^2 h$. $M = 2 r h$.
6. Normaler Kreiskegel.	r = Halbmesser der Grundfläche. h = Höhe. s = Seite.	$J = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r s$.
Abgestumpfter Kegel.	Wie oben, ferner R = Halbmesser der anderen Grundfläche.	$J = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$. $M = \pi s (R + r)$.
7. Kugel.	r = Halbmesser $= \sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}} = 0{,}62085 \sqrt[3]{J}$. $d = 2r$ = Durchmesser.	$J = \frac{4}{3} \pi r^3 = 4{,}1888\, r^3$. $= \frac{1}{6} \pi d^3 = 0{,}5236\, d^3$.*) $O = 4 \pi r^2 = \pi d^2$ **) $= 4 \times$ Inhalt des gröfsten Kreises.
Hohlkugel.	R äufserer, r innerer Halbmesser.	$J = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$.
Kugelabschnitt. (Kugelkalotte.)	h = Höhe des Abschnitts. r = Halbmesser der Kugel. a = Halbmesser der Grundfläche.	$J = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$ $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$. $M = 2 \pi r h$.
Kugelzone.	h = Höhe der Zone. r = Halbmesser der Kugel. a, b = Halbmesser der Endflächen.	$J = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$ $M = 2 \pi r h$.

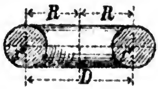
*) Tafel s. S. 132.
**) Hierzu ist die Tafel von S. 1 bis 21 zu benutzen.

Körper.	Bezeichnung der Abmessungen.	Inhalt $= J$. Oberfläche $= O$. Mantelfläche $= M$.
Kugelausschnitt. (Abbild. 37.)	Abbild. 37. 	$J = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$ $O = \pi r(2h + a).$
Kugelzweieck.	φ^0 der Winkel, welchen die begrenzenden gröfsten Kugelkreise bilden.	$M = \frac{\varphi^0}{90}\pi r^2.$
Kugeldreieck.	ε^0 der sphärische Excefs, d. h. Ueberschufs der Winkelsumme über 180^0.	$M = \frac{\varepsilon^0}{180}\pi r^2.$

Tafel der Kugelinhalte

für die Durchmesser $d = 1$ bis 100.

d	Kugelinhalt J	d	Kugelinhalt J	d	Kugelinhalt J	d	Kugelinhalt J	d	Kugelinhalt J
1	0,523599	21	4849,048	41	36086,95	61	118846,9	81	278261,8
2	4,188790	22	5575,280	42	38792,38	62	124788,2	82	288695,6
3	14,13717	23	6370,626	43	41629,77	63	130924,3	83	299387,0
4	33,51032	24	7238,228	44	44602,24	64	137258,3	84	310339,1
5	65,44984	25	8181,230	45	47712,93	65	143793,3	85	321555,1
6	113,0974	26	9202,770	46	50965,00	66	150532,5	86	333038,2
7	179,5943	27	10306,00	47	54361,60	67	157479,1	87	344791,4
8	268,0826	28	11494,04	48	57905,83	68	164636,2	88	356818,0
9	381,7035	29	12770,05	49	61600,86	69	172006,9	89	369120,9
10	523,5988	**30**	14137,17	**50**	65449,84	**70**	179594,3	**90**	381703,5
11	696,9100	31	15598,53	51	69455,90	71	187401,7	91	394568,8
12	904,7785	32	17157,25	52	73622,17	72	195432,2	92	407720,0
13	1150,347	33	18816,56	53	77951,80	73	203688,8	93	421160,4
14	1436,755	34	20579,52	54	82447,94	74	212174,8	94	434892,8
15	1767,146	35	22449,29	55	87113,74	75	220893,3	95	448920,4
16	2144,660	36	24429,02	56	91952,32	76	229847,3	96	463246,7
17	2572,441	37	26521,84	57	96966,82	77	239040,1	97	477874,4
18	3053,628	38	28730,91	58	102160,4	78	248474,8	98	492807,0
19	3591,364	39	31059,35	59	107536,2	79	258154,6	99	508047,3
20	4188,790	**40**	33510,32	**60**	113097,4	**80**	268082,6	**100**	523598,8

Körper.	Bezeichnung der Abmessungen.	Inhalt $= J$. Oberfläche $= O$ Mantelfläche $= M$.
8. Ellipsoid.	a, b, c die 3 Halbachsen.	$J = \frac{4}{3} \pi a b c$.
Umdrehungs-ellipsoid.	wenn $2a$ die Drehachse: „ $2b$ „ „ :	$J = \frac{4}{3} \pi a b^2$. $J = \frac{4}{3} \pi a^2 b$.
9. Umdrehungs-Paraboloid.	r = Halbmesser der Grundfläche. h = Höhe.	$J = \frac{1}{2} \pi r^2 h$.
Abgestumpftes Paraboloid.	R, r = Halbmesser der Endflächen. h = Höhe.	$J = \frac{1}{2} \pi (R^2 + r^2) h$.
10. Cylindrischer Ring. (Abbild. 38.)	Abbild. 38. 	$J = 2\pi^2 R r^2 = 2{,}467\, D d^2$ $O = 4\pi^2 R r = 9{,}87\, D d$.
11. Kübel.	Endflächen beliebige Ellipsen mit den Halbachsen a, b und a_1, b_1.	$J = \frac{1}{6} \pi h [2(ab + a_1 b_1) + a b_1 + a_1 b]$
12. Fafs.	D = Spunddurchmesser. d = Bodendurchmesser. h = Höhe.	$J = \frac{1}{12} \pi h (2D^2 + d^2)$ angenähert für kreisförmige Dauben. $J = \frac{1}{15} \pi h (2D^2 + Dd + \frac{3}{4} d^2)$ genau für parabolische Dauben.
13. Kappen-gewölbe.	s = halbe Spannweite. r = innerer Gewölbehalbmesser. δ = Gewölbestärke. h = Pfeilhöhe. l = Länge des Gewölbes.	$J = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (2r\delta + \delta^2) l$. $\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h}.\right)$
14. Kreuzgewölbe über dem Rechtecke $2S \times 2s$.	s, r, δ, h, $2S$, φ die Bezeichnungen unter 13. für die eine Kappe. S, R, Δ, h, $2s$, ψ dieselben für die andere Kappe.	$J = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (2r\delta + \delta^2) S + \frac{\psi^0 \pi}{360} (2R\Delta + \Delta^2) s$. $\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h};\ \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{S}{R-h}.\right)$

15. Guldinsche Regel.

α. Bezeichnet s die Länge einer Kurve, die sich um eine in ihrer Ebene liegende Achse dreht,

x_0 den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse, so ist der Flächeninhalt der erzeugten **Umdrehungsfläche:**

$$M = 2\pi x_0 s.$$

= Weg des Schwerpunktes × Länge der Kurve.

β. Bezeichnet F den Inhalt einer ebenen Fläche, die sich um eine in ihrer Ebene liegende Achse dreht,

x_0 den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse, so ist der Inhalt des erzeugten **Umdrehungskörpers:**

$$J = 2\pi x_0 F$$

= Weg des Schwerpunktes × Inhalt der Fläche.

In beiden Fällen mufs das sich drehende Gebilde auf einer Seite der Achse liegen.*)

γ. Die obigen Regeln sind überhaupt für jede beliebige Bewegung des Schwerpunktes sinngemäfs anwendbar, wenn die Ebene der sich bewegenden Fläche stets zur Richtung der Bewegung normal ist.

VIII. PARALLEL-PERSPEKTIVE.

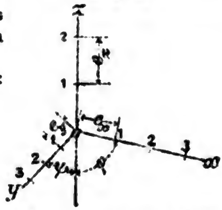
(Axonometrisches Verfahren.)

1. Um einen körperlichen Gegenstand durch eine Zeichnung darzustellen, die einen möglichst vollständigen Einblick in die Gestalt und den Zusammenhang seiner Teile gewährt, bedient man sich oft mit Vorteil der Parallelprojektion, welche zwar weniger naturgetreue, aber leichter herstellbare Bilder liefert, als die Centralprojektion. Die Herstellung geschieht am besten nach dem sogen. **axonometrischen Verfahren.** Man nimmt drei zu einander rechtwinklige Achsen, auf die man den Körper bezieht, und in jeder einen Mafsstab an, projiziert die Achsen samt den Mafsstäben und trägt alle Strecken, die im Körper einer Achse parallel sind, in der Zeichnung parallel der Projektion jener Achse nach dem zugehörigen Mafsstabe auf. Die z-Achse wird senkrecht genommen.

2. Bei **schiefer Projektion** können die Achsenrichtungen und die Längeneinheiten der Mafsstäbe beliebig angenommen werden, voraus-

*) Vergl. S. 125. Umdrehungsflächen.

gesetzt, dafs höchstens zwei Achsenrichtungen gleich sind und die Längeneinheit höchstens eines Achsenmafsstabes Null ist (Satz von Pohlke).



Abbild. 39.

Einfache Fälle (Bezeichnungen s. Abbild. 39):

1) $e_x = e_z = 1$; $e_y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$;
$\varphi = 90^0$; $\psi = 45^0, 60^0$.
(Kavalierperspektive).

2) $e_x = e_y = e_z = 1$; $\varphi + \psi = 90^0$.
(Militärperspektive.)

3. Treten an dem Körper nicht blofs gerade Linien und ebene Flächen auf, sondern Kreise in verschiedenen Stellungen, Kreiscylinder-, Kreiskegel-, Kugelflächen und beliebige Umdrehungsflächen, so ist **senkrechte Projektion** vorzuziehen. Bei dieser sind die Verhältnisse der Längeneinheiten der Achsenmafsstäbe durch die Achsenrichtungen und umgekehrt letztere durch erstere bestimmt. In folgender Tafel sind für die gebräuchlichsten Verhaltnisse*) die nötigen Angaben zusammengestellt. Es bezeichnet:

e die Längeneinheit des wahren Mafsstabes der Zeichnung,

e_x, e_y, e_z die Längeneinheiten der Achsenmafsstäbe,

φ und ψ die spitzen Winkel zwischen der x- bezw. y-Achse und der z-Achse.

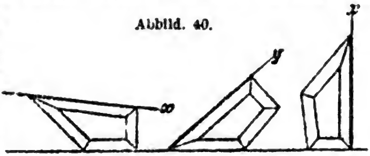
	$e_x : e_y : e_z$	$e_z : e$	ctg φ (angenähert)	ctg ψ (angenähert)
Isometrische Projektion.	1 : 1 : 1	0,8165	$\varphi = \psi = 60^0$	
Dimetrische Projektionen.	1 : $\frac{1}{2}$: 1	0,9428	1 : 8	7 : 8
	1 : $\frac{1}{3}$: 1	0,9733	1 : 18	17 : 18
	1 : $\frac{1}{4}$: 1	0,9847	1 : 32	31 : 32
Trimetrische Projektionen.	$\frac{5}{6}$: $\frac{2}{3}$: 1	0,9670	1 : 5	1 : 3
	$\frac{9}{10}$: $\frac{1}{2}$: 1	0,9853	1 : 11	4 : 11

Die letzte Spalte dient zur Konstruktion der Achsenrichtungen.

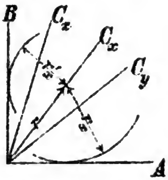
4. Man bezeichne mit r_x, r_y, r_z die Strecken, welche, bezw. mit dem x-, y-, z-Mafsstabe gemessen, die gleiche Längenzahl r

*) Für gewöhnliche Fälle empfiehlt sich die Anwendung der Projektion 1 : $\frac{1}{2}$: 1, der einfachsten nächst der isometrischen Projektion, die meist unschöne Bilder liefert. Es bringt grofsen Gewinn an Zeit, wenn man die Parallelen zu den Achsen mittelst eines besonderen, hiernebben in den drei zu benutzenden Stellungen abgebildeten Schiebvierecks (Abbild. 40) zeichnet, wie solche für verschiedene Verhältnisse durch die Firma Albert Martz in Stuttgart zu beziehen sind.

Abbild. 40.



Abbild. 41.



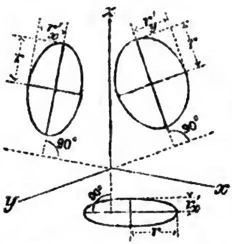
ergeben (so dafs also $r_x = r(e_x : e)$ u. s. w.). Ohne Benutzung der Achsenmafsstäbe können diese Strecken auch durch nebenstehende (noch anderen Zwecken dienende, s. 5.) Verkleinerungsvorrichtung (Abbild. 41) gefunden werden, in welcher die Strahlen C_x, C_y, C_z gegen A unter solchen Winkeln gezogen sind, deren Sinus die Werte $e_x : e$, $e_y : e$, $e_z : e$ haben.

5. Kreise parallel den Koordinatenebenen. (Abbild. 42.) Ein zur yz-Ebene paralleler Kreis bildet sich als Ellipse ab, deren Mittelpunkt das Bild des Kreismittelpunktes, deren grofse Halbachse dem wahren Kreishalbmesser r gleich ist und senkrecht auf der x-Achse steht, deren kleine Halbachse den Wert $r'_x = \sqrt{r^2 - r_x^2}$ hat.

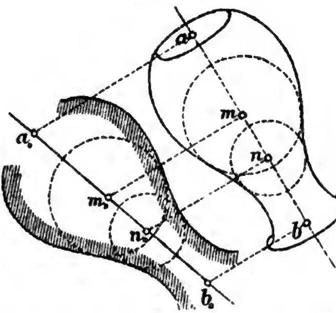
Entsprechend für Kreise parallel der xz- und xy-Ebene. Die Bestimmung der Strecken r'_x, r'_y, r'_z geschieht mit Hülfe der Abbild. 41. Für die Projektion $1 : \frac{1}{2} : 1$ ist

$$r'_x = r'_z = \frac{1}{3} r$$

Abbild. 42.



Abbild. 43.



6. Das Bild einer **Kugel** hat einen Kreis zum Umrifs, dessen Mittelpunkt das Bild des Kugelmittelpunktes und dessen Halbmesser gleich dem wahren Kugelhalbmesser ist. Die scheinbare Dicke von **Cylindern** mit Kreisquerschnitt in beliebiger Lage ist der wirklichen gleich.

7. Umdrehungsflächen in beliebiger Lage. Man zeichnet (Abbild. 43, Seite 136) das Profil im wahren Mafsstabe der Zeichnung in solcher Lage, dafs wenn a_0 und b_0 zwei beliebige Punkte der Achse, a und b deren Bilder bedeuten, aa_0 parallel bb_0 ist. Hierauf beschreibt man aus beliebigen Punkten m_0, n_0 ... der Achse Kreise, die das Profil berühren und mit denselben Halbmessern Kreise aus den entsprechenden, mit Hülfe von Parallelen zu aa_0 aus m_0, n_0 ... gefundenen Punkten m, n ... Die Umhüllungslinie der letzteren Kreise ist der gesuchte Umrifs des Bildes der Fläche.

Bemerkung. Die Konstruktionen u. 5. bis 8. gelten nur für senkrechte Projektion.

ZWEITER ABSCHNITT.

MECHANIK.

I. GEOMETRISCHE BEWEGUNGSLEHRE.

A. Bewegung eines Punktes.

a. Geradlinige Bewegung.

1. Geschwindigkeit.

Die Bewegung eines Punktes heifst **gleichförmig**, wenn in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden. Den in der Zeiteinheit (in 1 Sek.) zurückgelegten Weg nennt man:

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{s}{t} = \frac{\text{Weglänge}}{\text{Zugehörige Zeit}}.$$

Im anderen Falle heifst die Bewegung **ungleichförmig**; für die Geschwindigkeit v zur Zeit t gilt:

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{ds}{dt}.$$

Hieraus folgt die Weglänge $s - s_0$ zur Zeit t:

$$s - s_0 = \int_0^t v\,dt,$$

falls s_0 den Weg zu Anfang der Bewegung, zur Zeit $t = 0$, bedeutet.

2. Beschleunigung.

Die Bewegung eines Punktes heifst **gleichmäfsig beschleunigt** bezw. verzögert, wenn in gleichen Zeiten die Geschwindigkeit um den gleichen Betrag zu- bezw. abnimmt. Die Aenderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit (in 1 Sek.) heifst Beschleunigung bezw. Verzögerung (letztere = negative Beschleunigung)

$$\text{Beschleunigung } p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zugehörige Zeit}}.$$

Im anderen Falle, der **ungleichmäfsig beschleunigten** bezw. verzögerten Bewegung, ergiebt sich die

$$\text{Beschleunigung } p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Hieraus folgt: $$v - v_0 = \int_0^t p\,dt,$$

falls v_0 die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ bedeutet.

Für die gleichmäfsig beschleunigte Bewegung z. B. ist die Geschwindigkeit: $v = v_0 + pt$

und der Weg: $$s = s_0 + \int_0^t v\,dt = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} p t^2.$$

Ist von den vier Gröfsen s, v, p, t die eine als Funktion einer anderen gegeben, so findet man die anderen beiden mit Hülfe der voranstehenden Gleichungen, wie aus folgender Tafel ersichtlich ist.

(s_0 und v_0 bedeuten die Werte von s und v zur Zeit $t = 0$.)

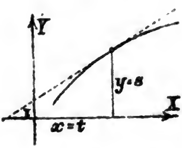
Gegeben	Gesucht:			
	s	v	p	t
$s = f(t)$	$s = f(t)$	$f'(t) = \frac{ds}{dt}$	$f''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$	t
$v = f(t)$	$s_0 + \int_0^t f(t)\,dt$ $= s_0 + \int_0^t v\,dt$	$v = f(t)$	$f'(t) = \frac{dv}{dt}$	t
$p = f(t)$	$s_0 + \int_0^t v\,dt$ (v vorher aufsuchen)	$v_0 + \int_0^t f(t)\,dt$ $= v_0 + \int_0^t p\,dt$	$p = f(t)$	t
$p = f(s)$	s	$\sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^s f(s)\,ds}$ $= \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^s p\,ds}$	$p = f(s)$	$\int_{s_0}^s \frac{ds}{v}$ (v vorher aufsuchen)

Gegeben	Gesucht: s	v	p	t
$v = f(s)$	s	$v = f(s)$	$f(s) \cdot f'(s) = v \dfrac{dv}{ds}$	$\int_{s_0}^{s} \dfrac{ds}{f(s)} = \int_{s_0}^{s} \dfrac{ds}{v}$
$p = f(v)$	$s_0 + \int_{v_0}^{v} \dfrac{v}{f(v)} dv = s_0 + \int_{v_0}^{v} \dfrac{v}{p} dv$	v	$p = f(v)$	$\int_{v_0}^{v} \dfrac{dv}{f(v)} = \int_{v_0}^{v} \dfrac{dv}{p}$

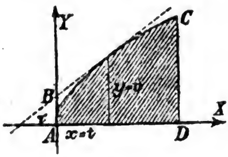
3. Zeichnerische Darstellung.

α. Trägt man (Abbild. 44) die Zeiten t als Abscissen, die Wege s als Ordinaten ab, so ist $v = \dfrac{ds}{dt} = \operatorname{tg} \tau$, um so gröfser also, je steiler die Tangente in dem Kurvenpunkte gerichtet ist. Für die **gleichförmige** Bewegung wird diese Kurve eine gerade Linie $s = s_0 + vt$. (Eisenbahnfahrpläne.)

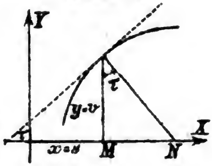
Abbild. 44.



Abbild. 45.



Abbild. 46.



β. Wählt man (Abbild. 45) die Zeiten t als Abscissen, die Geschwindigkeiten v als Ordinaten, so ist die Beschleunigung $p = \operatorname{tg} \tau$ und der Weg $s = \int v\, dt$ = der Fläche $ABCD$. Für die gleichmäfsig beschleunigte Bewegung ist BC eine Gerade, für die gleichförmige Bewegung eine Parallele zur x-Achse.

γ. Trägt man (Abbild. 46) s als Abscissen, v als Ordinaten ab, so ergiebt sich:

Beschleunigung p = Subnormale MN (Satz von Pröll).

Tafel der Geschwindigkeits- (Fall- oder Druck-) Höhen h für Endgeschwindigkeiten v zwischen 0 und 30 m.

$g = 9{,}81$ m.

$v = \sqrt{2gh}$ m	$h = \frac{v^2}{2g}$ m	$v = \sqrt{2gh}$ m	$h = \frac{v^2}{2g}$ m	$v = \sqrt{2gh}$ m	$h = \frac{v^2}{2g}$ m	$v = \sqrt{2gh}$ m	$h = \frac{v^2}{2g}$ m
0,00	0,000000	1,45	0,10716	3,3	0,55504	11,0	6,1672
0,05	0,000127	1,50	0,11468	3,4	0,58919	11,5	6,7406
0,10	0,000510	1,55	0,12245	3,5	0,62436	12,0	7,3394
0,15	0,001147	1,60	0,13048	3,6	0,66055	12,5	7,9638
0,20	0,002039	1,65	0,13876	3,7	0,69776	13,0	8,6137
0,25	0,003186	1,70	0,14730	3,8	0,73598	13,5	9,2890
0,30	0,004587	1,75	0,15609	3,9	0,77523	14,0	9,9898
0,35	0,006244	1,80	0,16514	4,0	0,81549	14,5	10,7161
0,40	0,008155	1,85	0,17444	4,1	0,85678	15,0	11,4679
0,45	0,010321	1,90	0,18400	4,2	0,89908	15,5	12,2452
0,50	0,012742	1,95	0,19381	4,3	0,94241	16,0	13,0479
0,55	0,015418	2,00	0,20387	4,4	0,98675	16,5	13,8761
0,60	0,018349	2,05	0,21419	4,5	1,0321	17,0	14,7299
0,65	0,021534	2,10	0,22477	4,6	1,0785	17,5	15,6091
0,70	0,024975	2,15	0,23560	4,7	1,1259	18,0	16,5138
0,75	0,028670	2,20	0,24669	4,8	1,1743	18,5	17,4439
0,80	0,032620	2,25	0,25803	4,9	1,2238	19,0	18,3996
0,85	0,036825	2,30	0,26962	5,0	1,2742	19,5	19,3807
0,90	0,041284	2,35	0,28147	5,5	1,5418	20	20,3874
0,95	0,045999	2,40	0,29358	6,0	1,8349	21	22,4771
1,00	0,050968	2,45	0,30594	6,5	2,1534	22	24,6687
1,05	0,056193	2,50	0,31855	7,0	2,4975	23	26,9623
1,10	0,061672	2,6	0,34455	7,5	2,8670	24	29,3578
1,15	0,067406	2,7	0,37156	8,0	3,2620	25	31,8552
1,20	0,073394	2,8	0,39959	8,5	3,6825	26	34,4546
1,25	0,079638	2,9	0,42864	9,0	4,1284	27	37,1560
1,30	0,086137	3,0	0,45872	9,5	4,5999	28	39,9592
1,35	0,092890	3,1	0,48981	10,0	5,0968	29	42,8644
1,40	0,099898	3,2	0,52192	10,5	5,6193	30	45,8716

Tafel der Endgeschwindigkeiten v für Geschwindigkeits- (Fall- oder Druck-) Höhen h zwischen 0 und 1000 m.

$g = 9{,}81$ m.

$h = \frac{v^2}{2g}$ m	$v = \sqrt{2gh}$ m	$h = \frac{v^2}{2g}$ m	$v = \sqrt{2gh}$ m	$h = \frac{v^2}{2g}$ m	$v = \sqrt{2gh}$ m	$h = \frac{v^2}{2g}$ m	$v = \sqrt{2gh}$ m
0,05	0,99045	2	6,26418	26	22,5858	160	56,0284
0,10	1,40071	3	7,67202	27	23,0161	170	57,7529
0,15	1,71553	4	8,85889	28	23,4384	180	59,4272
0,20	1,98091	5	9,90454	29	23,8535	190	61,0555
0,25	2,21472	6	10,8499	30	24,2611	200	62,6418
0,30	2,42611	7	11,7192	35	26,2050	225	66,4417
0,35	2,62050	8	12,5284	40	28,0142	250	70,0357
0,40	2,80142	9	13,2883	45	29,7136	275	73,4340
0,45	2,97136	10	14,0071	50	31,3209	300	76,7202
0,50	3,13209	11	14,6908	55	32,8496	325	79,8530
0,55	3,28496	12	15,34405	60	34,3105	350	82,8673
0,60	3,43105	13	15,9706	65	35,7113	400	88,5889
0,65	3,57113	14	16,5730	70	37,0594	450	93,9627
0,70	3,70594	15	17,1553	75	38,3601	500	99,0454
0,75	3,83601	16	17,7178	80	39,6183	550	103,880
0,80	3,96183	17	18,2630	85	40,8375	600	108,499
0,85	4,08375	18	18,7925	90	42,0214	650	112,929
0,90	4,20214	19	19,3075	95	43,1729	700	117,192
0,95	4,31729	20	19,8091	100	44,2945	750	121,305
1,00	4,42945	21	20,2983	110	46,4564	800	125,284
1,20	4,85224	22	20,7759	120	48,5224	850	129,140
1,40	5,24099	23	21,2428	130	50,5037	900	132,883
1,60	5,60284	24	21,6998	140	52,4099	950	136,525
1,80	5,94272	25	22,1472	150	54,2492	1000	140,071

4. Fall im luftleeren Raum.*)

α. Für geringe Fallhöhen ist die **Beschleunigung des freien Falles** in m:

$$g = 9{,}803056 - 0{,}025028 \cos 2\varphi - 0{,}000003\, h,$$

worin φ die geographische Breite und h die Höhe des Ortes über

*) Vergl. S. 178: Fall mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

dem Meeresspiegel bedeuten. Für die Breite $\varphi = 50^0$ und die Meereshöhe ($h = 0$) ist

$$g = 9{,}81 \text{ m}^{*)} \quad (= 31{,}25 \text{ Zoll preuſs.} = 32{,}18 \text{ Zoll engl.}).$$

β. Beginnt ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ zu fallen, so ist (gleichmäſsig beschleunigte Bewegung):

$$v = g\,t = \sqrt{2\,g\,h}\,; \qquad h = \frac{g\,t^2}{2} = \frac{v^2}{2\,g}{}^{**)}; \qquad t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}.$$

(h = Fallhöhe, v = Geschwindigkeit zur Zeit t.)

γ. Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit v_0 lotrecht aufwärts geworfen, so ist (gleichmäſsig verzögerte Bewegung):

$$v = v_0 - g\,t; \qquad s = v_0\,t - g\,\frac{t^2}{2}.$$

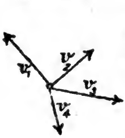
Die Steighöhe h ist $= \frac{v_0^{\,2}}{2\,g}$. Der Körper hat an derselben Stelle der Bahn beim Auf- und Absteigen gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten.

b. Krummlinige Bewegung.

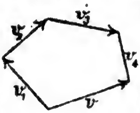
1. Parallelogramm und Polygon der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wirken auf einen Punkt mehrere Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 ... bezw. Beschleunigungen p_1, p_2, p_3 ..., so ist deren Wirkung zu ersetzen durch eine resultierende Geschwindigkeit v bezw. Beschleunigung p. Die Resultierende ergiebt sich für zwei Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen der Gröſse und Richtung nach als Diagonale eines Parallelogramms, welches aus den beiden Gröſsen gebildet werden kann (Abbild. 49), für drei Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen als Diagonale des aus den drei Gröſsen gebildeten Parallelopipeds und entsprechend für mehrere Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen als Schluſsseite desjenigen (räumlichen) Polygons, dessen Seiten die einzelnen Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen sind (Abbild. 47 u. 48).

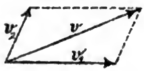
Abbild. 47.



Abbild. 48.



Abbild. 49.



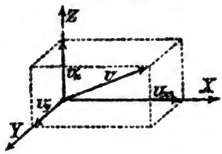
(Vergl. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, S. 153.)

*) Werte algebraischer Ausdrücke, welche g enthalten, s. S. 30.
**) Tafeln s. S. 140 u. 141.

Insbesondere ergiebt sich die Resultierende v von drei Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, welche auf einander senkrecht stehen (Abbild. 50) zu:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Abbild. 50.



und die Winkel α, β und γ, welche v mit den drei Achsen bildet, folgen aus:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}; \quad \cos\beta = \frac{v_y}{v}; \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Umgekehrt läfst sich v nach drei rechtwinkligen Achsen zerlegen in:

$$v_x = v\cos\alpha; \quad v_y = v\cos\beta; \quad v_z = v\cos\gamma.$$

(In gleicher Weise gültig für Beschleunigungen.)

2. Projektion der Bewegungen.

Die Bewegung eines Punktes im Raume, welcher zur Zeit t die Koordinaten x, y, z besitzt, kann aufgefafst werden, als ob der Punkt gleichzeitig drei **geradlinige** Bewegungen in Richtung der drei Koordinatenachsen ausführte. Die Geschwindigkeiten bezw. Beschleunigungen der Projektionen v_x, v_y, v_z bezw. p_x, p_y, p_z sind alsdann gleich den Projektionen der Geschwindigkeit bezw. Beschleunigung des Punktes nach den drei Achsen:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v\cos\alpha = \frac{ds}{dt}\cos\alpha. \qquad p_x = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v\cos\beta = \frac{ds}{dt}\cos\beta. \qquad p_y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v\cos\gamma = \frac{ds}{dt}\cos\gamma. \qquad p_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

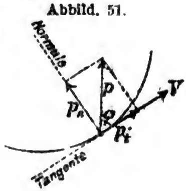
Hieraus folgt (vergl. unter 1.):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

3. Tangential- und Normalbeschleunigung.

Abbild. 51.



Die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ fällt in die Richtung der Tangente an die Bahnkurve, die **Totalbeschleunigung** p dagegen ist im allgemeinen schief zur Bahntangente (Abbild. 51). Zerlegt man p nach der Bahntangente und senkrecht dazu in p_t und p_n, so wird, falls ϱ den Krümmungshalbmesser der Bahn bedeutet:

die **Tangentialbeschleunigung** $p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$,

die **Normal-** oder **Centripetalbeschleunigung** $p_n = \frac{v^2}{\varrho}$;

die letztere fällt in die erste Hauptnormale der Bahnkurve.

Hieraus folgt die Totalbeschleunigung:

$$p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2};$$

für den Winkel φ zwischen v und p hat man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_n}{p_t} = \frac{v^2}{\varrho \frac{dv}{dt}}.$$

Beispiel. Bewegt sich ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit v in einem Kreise vom Halbmesser r, so ist die nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtete Normal- oder Centripetalbeschleunigung $p_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$, falls mit ω die Winkelgeschwindigkeit $v:r$ bezeichnet wird.

4. Hodograph der Bewegung.

Trägt man sämtliche Geschwindigkeiten der Bewegung eines Punktes von einem beliebigen Punkte des Raumes aus der Gröfse und Richtung nach ab, so bilden die Endpunkte der Strecken eine Kurve, welche **Hodograph** der Bewegung genannt wird. Derselbe veranschaulicht das Aenderungsgesetz der Geschwindigkeiten und seine Tangenten sind den Totalbeschleunigungen parallel.

B. Bewegung starrer Körper.

a. Elementarbewegungen.

Jede unendlich kleine Bewegung eines Körpers heifst eine Elementarbewegung. Die einfachsten derartigen Bewegungen, auf welche alle anderen sich zurückführen lassen, sind die folgenden zwei:

1. Elementarverschiebung, bei welcher zwei sich schneidende Geraden des Körpers parallel zu sich bewegt werden. Alle Punkte des Körpers haben bei dieser Bewegung nach Gröfse und Richtung die gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung, und durchlaufen bei einer endlichen Verschiebung kongruente gleichliegende Bahnkurven.

2. Elementardrehung. Bei dieser bleibt eine Gerade des Körpers, die sogen. **Drehachse,** augenblicklich in Ruhe und alle Punkte des Körpers bewegen sich augenblicklich auf Kreisen, deren Ebenen senkrecht zur Drehachse stehen. Die Normalen der Bahnen aller

Körperpunkte schneiden die Drehachse rechtwinklig. Ist $d\varphi$ der unendlich kleine Drehwinkel des Körpers in der Zeit dt, so heifst:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ die } \textbf{Winkelgeschwindigkeit}$$

der Drehung zur Zeit t und

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ die } \textbf{Winkelbeschleunigung.}$$

Für einen beliebigen Körperpunkt im Abstande r von der Drehachse ergiebt sich:

die Geschwindigkeit $v = r\omega$,

die Tangentialbeschleunigung $p_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon$,

die Normalbeschleunigung $p_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$.

Ist die Drehachse während einer endlichen Zeit in Ruhe, so sind die Bahnen der Körperpunkte Kreise, deren Mittelpunkte sämtlich auf der Drehachse liegen.

3. Hat ein Körper aufser einer Elementardrehung gleichzeitig eine Elementarverschiebung in der Richtung der Drehachse, so vollzieht er eine **Elementarschraubenbewegung**. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, v_0 die Geschwindigkeit der Verschiebung, so hat ein Punkt im Abstande r von der Drehachse die totale Geschwindigkeit: $v = \sqrt{(r\omega)^2 + v_0^2}$; der Steigungswinkel α der Schraubenlinie, welche dieser Punkt augenblicklich beschreibt, folgt aus der Beziehung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{r\omega}.$$

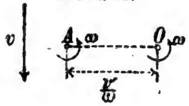
Jede allgemeinste Elementarbewegung eines starren Körpers ist eine Elementarschraubenbewegung.

b. Zusammensetzung und Zerlegung der Drehungen und Verschiebungen.

1. Die **Zusammensetzung zweier Verschiebungen** eines Körpers ergiebt wieder eine Verschiebung; die Geschwindigkeit der letzteren ist die Resultierende der beiden ersteren und wird mittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten gefunden. Ueberhaupt lassen sich Verschiebungen mittelst des Parallelogramms bezw. Polygons der Geschwindigkeiten zusammensetzen und zerlegen.

2. Die **Zusammensetzung einer Drehung** um eine Achse A (Abbild. 52) mit der Winkelgeschwindigkeit ω **und einer zur Drehachse senkrechten Verschiebung** mit der Geschwindigkeit v ergiebt eine Drehung um eine parallele Achse O im Abstande $\frac{v}{\omega}$,

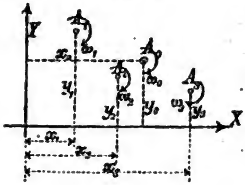
Abbild. 52.



welche mit A in einer Ebene senkrecht zu v liegt. Die Winkelgeschwindigkeit der resultierenden Drehung ist gleich und gleichsinnig mit ω.

Die Zusammensetzung einer beliebigen Verschiebung und einer Drehung liefert eine Schraubenbewegung um eine zur Drehung parallele Achse.

Abbild. 53.



3. Drehungen um parallele Achsen. Die Lage der Achsen sei durch die Koordinaten $x_1\, y_1,\; x_2\, y_2 \ldots$ ihrer Durchdringungspunkte $A_1,\; A_2 \ldots$ mit einer beliebigen Ebene gegeben (Abbild. 53). Die resultierende Drehung erfolgt mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \Sigma\omega$ um eine parallele Achse A_0, deren Lage bestimmt ist durch die Gleichungen:

$$x_0 = \frac{\Sigma x\omega}{\Sigma\omega}; \qquad y_0 = \frac{\Sigma y\omega}{\Sigma\omega}.$$

Bei zwei gleichsinnigen Drehungen (Abbild. 54) mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um A_1 und A_2 liegt die resultierende Achse O, um welche die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_1 + \omega_2$ erfolgt, in der Ebene durch A_1 und A_2. Für die Abstände a_1 und a_2 gelten die Gleichungen:

Abbild. 54.

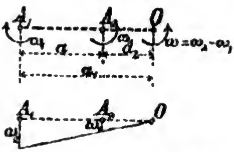


$$a_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\, a; \qquad a_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}\, a.$$

Zeichnerische Bestimmung von O s. Abbild. 54.

Bei zwei ungleichsinnigen Drehungen (Abbild. 55) liegt die resultierende Achse O, um welche die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_2 - \omega_1$ erfolgt, aufserhalb nach der Seite der gröfseren Winkelgeschwindigkeit hin, und die Abstände a_1 und a_2 bestimmen sich aus:

Abbild. 55.

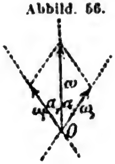


$$a_1 = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\, a; \qquad a_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\, a.$$

Zeichnerische Bestimmung von O s. Abbild. 55.

Ist im letzteren Falle $\omega_1 = \omega_2$, so ist die resultierende Bewegung eine Parallelverschiebung mit der Geschwindigkeit $v = a\,\omega_1 = a\,\omega_2$ senkrecht zur Ebene der Achsen.

Abbild. 56.



4. Drehungen um sich schneidende Achsen. Für Drehungen um Achsen, welche sich sämtlich in einem Punkte schneiden, findet man die resultierende Achse, wenn man die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1,\; \omega_2 \ldots$ von dem Schnittpunkte O aus auf den Achsen so abträgt, dafs die Drehungen, nach O hingesehen, im Sinne der Drehung des Uhrzeigers

erfolgen, und diese Strecken wie Geschwindigkeiten oder Kräfte zusammensetzt. — Polygon bezw. für zwei Drehungen Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten (Abbild. 56).

5. Die **Zusammensetzung zweier Drehungen um sich kreuzende Achsen** A_1 und A_2 mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 liefert eine Schraubenbewegung, deren Achsenrichtung und Winkelgeschwindigkeit ω durch das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten bestimmt wird (Abbild. 56).

Die resultierende Achse schneidet das gemeinsame Lot beider gegebenen Drehachsen, dessen Länge $= e$ sei, in einem Punkte, der von den Achsen A_1 und A_2 die Entfernungen hat:

$$e_1 = \frac{\omega_2}{\omega} \cos \alpha_2 \cdot e = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} e;$$

$$e_2 = \frac{\omega_1}{\omega} \cos \alpha_1 \cdot e = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} e;$$

woraus folgt: $$e_1 : e_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Die Geschwindigkeit v_0 der Verschiebung beträgt:

$$v_0 = \omega_1 \sin \alpha_1 \cdot e_1 + \omega_2 \sin \alpha_2 \cdot e_2 = \omega_1 \sin \alpha_1 \cdot e = \omega_2 \sin \alpha_2 \cdot e.$$

c. Ebene Bewegung (Kinematische Geometrie).

1. Bewegungsverhältnisse der starren Ebene.

α. Erklärungen und Grundsätze.

Bewegt sich ein Körper so, dafs alle Punkte Bahnen parallel zu einer festen Ebene beschreiben, so heifst die Bewegung eine **ebene Bewegung.** Die Bewegung des Körpers ist in diesem Falle bestimmt, sobald die Bewegung einer starren Ebene, welche mit dem Körper fest verbunden ist, gegen eine zweite Ebene bestimmt ist, welche in der ersteren liegt.

Jeder Punkt der bewegten Ebene beschreibt eine Bahnkurve, **Punktbahn,** und jede Kurve (**Hüllkurve**) der bewegten Ebene hüllt eine Kurve, **Hüllbahn,** der ruhenden Ebene ein.

Der augenblickliche Berührungspunkt von Hüllkurve und Hüllbahn heifst **Gleitpunkt,** ihre gemeinsame Normale **Berührungsnormale.**

Die augenblickliche Bewegung einer starren Ebene besteht in einer Elementardrehung um einen Punkt, den **augenblicklichen Drehpunkt** oder den **Pol.**

Durch den Pol gehen die Normalen aller Punktbahnen, sowie die Berührungsnormalen aller Hüllbahnenpaare. Die augenblickliche Bewegungsrichtung aller Punkte ist daher senkrecht zu den Normalstrahlen, den Verbindungslinien der Punkte mit dem Pole.

Der Pol ist eindeutig bestimmt durch Angabe zweier Hüllbahnenpaare oder zweier Punktbahnen als Schnittpunkt der beiden Berührungsnormalen oder der Normalen der beiden Punktbahnen.

Die Punkte der **festen Ebene**, mit denen der Pol nach einander zusammenfällt, bilden die **ruhende Polbahn;**

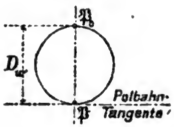
die Punkte der **beweglichen Ebene**, mit denen der Pol nach einander zusammenfällt, bilden die **bewegliche Polbahn.**

Beide Polbahnen berühren sich in jedem Augenblicke im Pole und rollen auf einander (daher auch Rollkurven genannt). Für jede ebene Bewegung giebt es nur ein Polbahnenpaar.

Die **relative Bewegung** der ruhenden Ebene gegen die bewegte, die umgekehrte Bewegung hat dieselben Polbahnen, jedoch wird die feste zur beweglichen, die bewegliche zur festen. Für jedes Hüllbahnenpaar wird die Hüllkurve zur Hüllbahn und umgekehrt.

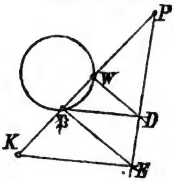
β. Krümmungsverhältnisse.

Abbild. 57.



Diejenigen Punkte der beweglichen Ebene, welche sich augenblicklich in den Wendepunkten W ihrer Bahn, den Wendepunkten der Ebene, befinden, liegen auf einem Kreise vom Durchmesser D_w, dem **Wendekreise,** welcher die Polbahntangente im Pole 𝔓 berührt. Die Polbahnnormale trifft den Wendekreis im **Wendepol** $\mathfrak{P}_0$, durch welchen sämtliche Wendetangenten gehen (Abbild. 57).

Abbild. 58.



Mit Hülfe des Wendekreises läfst sich für den Punkt P einer Punktbahn der **Krümmungsmittelpunkt** K leicht, wie folgt,*) (s. Abbild. 58) **durch Zeichnung** finden:

𝔓 = Pol. W = Wendepunkt auf dem Normalstrahl 𝔓P. Ziehe durch Pol 𝔓 und Punkt P zwei beliebige Strahlen, die sich in D schneiden. Ziehe WD und zu WD durch den Pol 𝔓 eine Parallele, welche PD in E schneidet. Ziehe endlich durch E eine Parallele zu 𝔓D; diese schneidet den Normalstrahl im Krümmungsmittelpunkte K. (Die Konstruktion ist gültig für jede Lage von W relativ zu P und 𝔓.)

Die gleiche Abbildung, in entsprechender Reihenfolge verzeichnet, dient auch dazu, den Punkt P zu finden, wenn W und der Krümmungsmittelpunkt K gegeben sind, oder endlich zur Aufsuchung des Wendepunktes W, falls Punkt P und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt K bekannt sind.

Es läfst sich mithin in jedem Augenblick der Wendekreis finden, sobald zwei Punktbahnen (oder auch, wie unten angegeben, zwei Hüllbahnen) bekannt sind.

Der Schnittpunkt der beiden Normalen ergiebt den Pol 𝔓; mittelst der vorstehenden Konstruktion erhält man auf den beiden

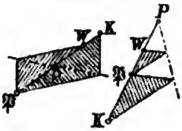
*) Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 29. S. 310.

Normalstrahlen zwei Wendepunkte W_1 und W_2; durch diese und den Pol geht alsdann der Wendekreis. (Ausführung der Konstruktion am bequemsten, wie in Abbild. 61 ausgeführt; s. u.)

Anmerkung. Bei der Benutzung der angegebenen Konstruktion beachte man folgendes:

Das Verfahren besteht in der Verzeichnung zweier ähnlichen Dreiecke über $\mathfrak{P}K$ und $\mathfrak{P}W$ (im Pole $\mathfrak{P}$ stoßen also die beiden Dreiecke zusammen); die beiden Spitzen liegen auf einer Geraden durch den Punkt P. Ist mithin P gegeben, so ziehe man diese Linie für die Spitzen durch P, und zeichne die beiden ähnlichen Dreiecke, durch welche sich, falls W bekannt ist, K findet, oder wenn man K kennt, W findet. Ist P gesucht, so zeichne man die beiden ähnlichen Dreiecke; die Linie durch die beiden Spitzen schneidet alsdann den Normalstrahl in P.

Abbild. 59.



Für die umgekehrte Bewegung ist der Punkt P der Krümmungsmittelpunkt der Punktbahn, welche der Krümmungsmittelpunkt K beschreiben würde. Man nennt daher Punkt und Krümmungsmittelpunkt auch **zugeordnete Punkte.**

Für jedes **Hüllbahnenpaar** gilt der Satz, daſs ihre Krümmungsmittelpunkte im obigen Sinne zugeordnete Punkte sind, d. h. die angegebene Konstruktion bleibt auch für Hüllbahnen gültig, wenn an Stelle des Punktes P der Krümmungsmittelpunkt der Hüllkurve gesetzt wird. (Die Lage des Krümmungsmittelpunktes einer Hüllbahn hängt daher von der Lage des Gleitpunktes auf dem Normalstrahl nicht ab.) Auch die **Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen** sind zugeordnete Punkte.

Bezeichnet:

R und R_1 die Krümmungshalbmesser der beiden Polbahnen,

r den Abstand des Punktes P vom Pole $\mathfrak{P}$,

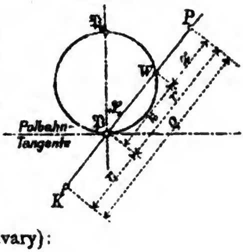
r_1 „ „ „ Krümmungsmittelpunktes K vom Pole $\mathfrak{P}$,

z den Abstand des Punktes P vom Wendepunkte W,

φ den Winkel zwischen Normalstrahl und Polbahnnormale,

$D_w = \mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$ den Durchmesser des Wendekreises, so gilt der

Abbild. 60.



Satz von Euler (Savary):

$$\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r_1}\right) \cos \varphi = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R_1} = \pm \frac{1}{D_w}$$

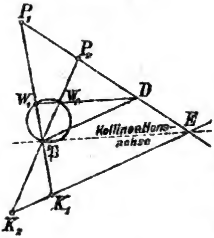
oder:

$$\varrho z = r^2.$$

Die erste Gleichung (zwischen R, R_1, D_w) ermöglicht die Berechnung von D_w, d. h. die Aufsuchung des Wendepols $\mathfrak{P}_0$, sobald die Polbahnen gegeben sind, und damit die Verzeichnung des Wendekreises.

Sind **zwei Punktbahnen oder zwei Hüllbahnen gegeben**, so ergiebt die Benutzung der Konstruktion Abbild. 58 den Wendekreis am bequemsten, wie folgt (Abbild. 61): Es seien P_1 und P_2 die beiden die Punktbahnen beschreibenden Punkte bezw. Krümmungsmittelpunkte der Hüllkurven, K_1 und K_2 die Krümmungsmittelpunkte der Punktbahnen bezw. Hüllbahnen.

Abbild. 61.



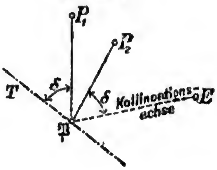
Ziehe $P_1 P_2$ und $K_1 K_2$. Beide schneiden sich in E. Ziehe $\mathfrak{P} D \parallel KE$ und durch D eine Parallele zu $\mathfrak{P} E$. Diese schneidet $P_1 K_1$ und $P_2 K_2$ in den Wendepunkten W_1 und W_2. Der Wendekreis geht dann durch $\mathfrak{P}$, W_1 und W_2.

Der Wendekreis der umgekehrten Bewegung heifst **Rückkehrkreis.** Er ist kongruent dem Wendekreis und bezügl. der Polbahntangente symmetrisch zu diesem gelegen. Die Hüllbahnen, deren Krümmungsmittelpunkte auf dem Rückkehrkreise liegen, werden augenblicklich von den Hüllkurven in Wendepunkten berührt. Im **Rückkehrpol,** demjenigen Punkte des Rückkehrkreises, welcher dem Pole auf dem Durchmesser gegenüberliegt, schneiden sich alle Geraden der bewegten Ebene, die ihre Hüllbahnen in Rückkehrpunkten (Spitzen) berühren; die letzteren selbst liegen auf dem Rückkehrkreise.

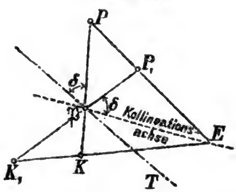
γ. Konstruktion von Bobillier.

Die Gerade $\mathfrak{P} E$ in Abbild. 61 heifst Kollineationsachse. Ein Normalstrahl $\mathfrak{P} P_2$ bildet mit dieser denselben Winkel δ, wie der zweite $\mathfrak{P} P_1$ mit der Polbahntangente $\mathfrak{P} T$. Hierauf stützt sich die Bobilliersche Konstruktion, um zu einem beliebigen Punkte P den Krümmungsmittelpunkt K zu finden (Abbild. 63). Gegeben die

Abbild. 62.



Abbild. 63.



Polbahntangente $\mathfrak{P} T$, Punkt P_1 und der zugeordnete Krümmungsmittelpunkt K_1. Trage $\measuredangle \delta = \measuredangle T \mathfrak{P} P$ von $P_1 \mathfrak{P}$ ab, ziehe PP_1 und verbinde E mit K_1, so schneidet EK_1 auf $P\mathfrak{P}$ den Punkt K ab.

2. Geschwindigkeitsverhältnisse der starren Ebene.

Die **Geschwindigkeit** v jedes Punktes P steht senkrecht zum Normalstrahl $\mathfrak{P}P = r$ und ist:

$$v = r\omega,$$

worin ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Ebene bedeutet.

Für den mit dem Pole $\mathfrak{P}$ zusammenfallenden Punkt ist $v = 0$.

Die Geschwindigkeit u, mit welcher der Pol auf der festen Polbahn fortschreitet, die **Wechselgeschwindigkeit**, ist gleich und gleichgerichtet mit der Geschwindigkeit des Wendepoles $\mathfrak{P}_0$:

$$u = \omega D_w. \qquad (D_w = \text{Wendekreisdurchmesser.})$$

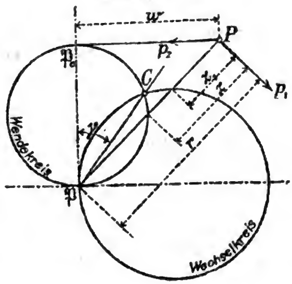
Die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten (d. h. der um 90° gedrehten Geschwindigkeiten) bilden ein dem Punktsystem der Ebene ähnliches und ähnlich liegendes System mit dem Pole $\mathfrak{P}$ als Aehnlichkeitspunkt, (z. B. für eine Gerade eine parallele Gerade).

3. Beschleunigungsverhältnisse der starren Ebene.

α. Wende- und Wechselkreis. Beschleunigungspol.

Die Punkte des Wendekreises erfahren keine Normalbeschleunigung. Diejenigen Punkte, für welche die Tangentialbeschleunigung gleich Null ist, liegen auf einem zweiten Kreise, dem **Wechselkreise** (Abbild. 64), dessen Mittelpunkt auf der Polbahntangente liegt und dessen Durchmesser $= \frac{u\omega}{\varepsilon} = \frac{\omega^2}{\varepsilon} D_w$. Hierin ist $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ = Winkelbeschleunigung.

Abbild. 64.



Für den Schnittpunkt C beider Kreise, den **Beschleunigungspol** (nicht für den Pol), ist die Totalbeschleunigung gleich Null.

Der Beschleunigungspol liegt im Schnittpunkte des Wendekreises mit demjenigen Normalstrahl, der mit der Polbahnnormale den Winkel γ bildet, für welchen

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

β. **Die Total-Beschleunigung p eines beliebigen Systempunktes** ergiebt sich (Abbild. 64):

1. als Resultierende der Normalbeschleunigung $p_n = z\omega^2$ und der Tangentialbeschleunigung . . . . . $p_t = z_1 \varepsilon = z_1 \frac{d\omega}{dt}$, worin z und z_1 die Entfernungen des Punktes P von dem Wende- und dem Wechselkreis bedeuten; oder

2. als Resultierende einer Beschleunigung $p_1 = r\varepsilon$ senkrecht zum Normalstrahl und einer nach dem Wendepol $\mathfrak{P}_0$ hin gerichteten Beschleunigung $p_2 = w\omega^2$, wo w den Abstand des Punktes P von $\mathfrak{P}_0$ bedeutet. (Der Pol $\mathfrak{P}$ erfährt daher die Beschleunigung $D_w \omega^2$ nach $\mathfrak{P}_0$ hin); oder

3. dem Abstande des Punktes P vom Beschleunigungspol C proportional und mit PC den Winkel γ (für den $\operatorname{tg}\gamma = \varepsilon : \omega^2$) bildend; im Abstande 1 von C erfährt ein Punkt die Beschleunigung $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Die Endpunkte der Beschleunigungen von Punkten, welche einer **Geraden** angehören, liegen auf einer Geraden.

II. STATIK STARRER KÖRPER.

A. Kräfte und Kräftepaare.

a. Grundsätze.

1. Die Wirkung einer Kraft P (Kraft = Ursache der Geschwindigkeitsänderung einer Masse) ist bestimmt durch deren Gröfse und Richtung und die Lage des Angriffspunktes. — Eine Kraft ist mithin zeichnerisch darstellbar durch eine Strecke (Linie von bestimmter Richtung und Gröfse).

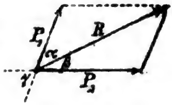
2. Die Wirkung einer Kraft (nach aufsen) ändert sich nicht durch Verschiebung der Kraft in ihrer Richtung.

3. Eine Kraft R von solcher Gröfse, Richtung und Lage, dafs sie die Wirkung einer Anzahl von Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ ersetzt, heifst Resultierende oder Mittelkraft von $P_1, P_2, P_3 \ldots$, jene Kräfte heifsen Komponenten oder Seitenkräfte.

4. Eine Anzahl von Kräften $P_1, P_2 \ldots$ ist im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkung (nach aufsen) gleich Null ist.

b. Kräfte, welche in einem Punkte angreifen.

Abbild. 65.



1. Die Mittelkraft R zweier in einem Punkte angreifenden Kräfte P_1 und P_2 ist der Gröfse und Richtung nach die Diagonale des aus P_1 und P_2 gebildeten Parallelogramms.

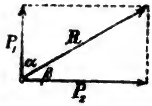
(Parallelogramm der Kräfte.)

Es ist (Abbild. 65):

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1\,P_2 \cos\gamma}\,;$$

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = P_2 : P_1 : R.$$

Abbild. 66.

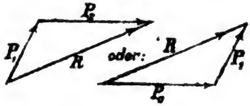


Für $\gamma = 90^0$ (Abbild. 66) ist:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{P_1}{R}, \quad \cos\beta = \frac{P_2}{R}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{P_1}{P_2}.$$

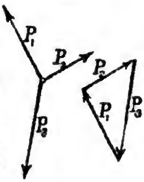
Abbild. 67.

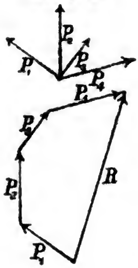


Zeichnerisch findet sich R am bequemsten mittelst des Kräfte-Dreiecks (Abbild. 67): P_1 und P_2 werden ihrer Gröfse und Richtung nach an einander abgetragen; die Schlufslinie, welche den Kräftezug schliefst, stellt die Mittelkraft R dar.

Umgekehrt läfst sich jede Kraft R in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegen, welche sich in R schneiden und in einer durch R gehenden Ebene liegen, indem man über R ein beliebiges Dreieck verzeichnet. Die beiden hinzugefügten Seiten ergeben die Seitenkräfte P_1 und P_2.

Abbild. 68. Abbild. 69.





Drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 sind nur dann im Gleichgewicht, wenn sie in einer Ebene liegen, sich in einem Punkte schneiden und zu einem Kräftedreieck vereinigen lassen, welches in demselben Sinne durchlaufen wird (Abbild. 68).

2. Die Mittelkraft R mehrerer in einem Punkte angreifenden Kräfte P_1, P_2, P_3 ... ist der Gröfse und Richtung nach die Schlufsseite des Polygons, dessen Seiten die Kräfte P_1, P_2, P_3 ... der Gröfse und Richtung nach darstellen. Kräftepolygon. (Abbild. 69.)

(Allgemein gültig, auch für Kräfte im Raume, welche in einem Punkte angreifen.)

Liegen die Kräfte in einer Geraden, so ist R die algebraische Summe der Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$.

Befinden sich mehrere in einem Punkte angreifende Kräfte im Gleichgewicht, so lassen sie sich zu einem geschlossenen Kräftepolygon zusammensetzen.

Rechnerisch ergiebt sich die Mittelkraft, wie folgt. Man zerlegt jede Kraft P_1, P_2, $P_3 \ldots$ nach drei rechtwinkligen Koordinatenachsen in:

$$X_1 = P_1 \cos\alpha_1, \quad Y_1 = P_1 \cos\beta_1, \quad Z_1 = P_1 \cos\gamma_1,$$
$$X_2 = P_2 \cos\alpha_2, \quad Y_2 = P_2 \cos\beta_2, \quad Z_2 = P_2 \cos\gamma_2 \ldots,$$

(α_1, β_1, γ_1 bedeuten die Winkel, welche P_1 mit der x-Achse, der y-Achse und z-Achse bildet, α_2, β_2, γ_2 entsprechend für P_2, α_3, β_3, γ_3 entsprechend für $P_3 \ldots$), bildet die algebraische Summe aller X_i, Y_i bezw. Z_i:

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i \quad (i = 1, 2, 3 \ldots)$$

und erhält die Mittelkraft:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Für die Winkel α, β, γ, welche R mit den Achsen bildet, gilt:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

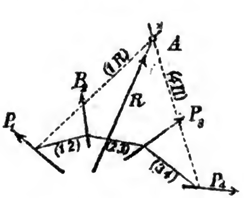
Liegen sämtliche Kräfte in einer Ebene, so ist in obigen Formeln $Z = 0$ zu setzen.

Sind die Kräfte im Gleichgewicht, so folgt aus $R = 0$ die Bedingung: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

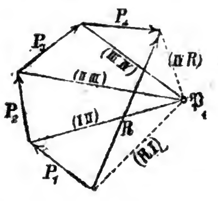
c. Kräfte in einer Ebene.

1. Die **Mittelkraft R mehrerer in der Ebene zerstreut liegenden Kräfte** P_1, P_2, $P_3 \ldots$ (Abbild. 70) findet sich der Gröfse und Richtung nach wie unter **b. 2.** S. 153 als Schlufsseite des Kräftepolygons.

Abbild. 70.



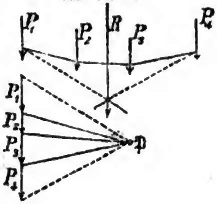
Abbild. 71.



Den Angriffspunkt A von R erhält man am bequemsten mittelst des Seilpolygons (Abbild. 70), indem man parallel zu dem Polstrahl (I II) im Kräfteplan (Abbild. 71, worin Pol $\mathfrak{P}$ beliebig an-

genommen) Linie (12) zwischen P_1 und P_2 zieht, desgl. (23) ‖ (II III); (34) ‖ (III IV) u. s. w. und schliefslich (1 R) ‖ (I R) zum Schnitt bringt mit (4 R) ‖ (IV R).

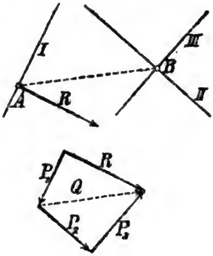
Abbild. 72.



2. Die **Mittelkraft paralleler Kräfte** ist gleich der algebraischen Summe der Einzelkräfte. Den Angriffspunkt der Mittelkraft erhält man wie oben mittelst des Seilpolygons, Abbild. 72 (bezw. rechnerisch mit Hülfe der Sätze über statische Momente; s. S. 160).

3. Mehrere in einer Ebene liegende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sich die Kräfte zu einem geschlossenen Kräftepolygon vereinigen lassen und zwischen den Kraftrichtungen ein geschlossenes Seilpolygon gezeichnet werden kann.

Abbild. 73 und 74.



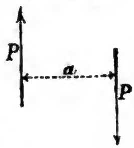
4. Eine Kraft R läfst sich in drei Seitenkräfte zerlegen, welche mit R in einer gemeinsamen Ebene liegen und deren Richtungen und Lagen vorgeschrieben sind, wie aus Abbild. 73 ersichtlich. Gegeben R, Richtung I, II, III. Bringe R zum Schnitt mit I in A, desgl. II und III in B, ziehe AB. Zerlege R nach I und AB in P_1 und Q, verschiebe Q nach B und zerlege Q dort in P_2 und P_3. Ausführung s. Abbild. 74.

d. Kräftepaare.

1. Erklärungen.

α. Zwei parallele, entgegengesetzt gerichtete und gleich grofse Kräfte heifsen ein **Kräftepaar** (Drehpaar, Drehkraft). Sie besitzen k e i n e M i t t e l k r a f t und ihre Wirkung besteht in einer Drehbewegung (genauer in der Aenderung der Winkelgeschwindigkeit einer Drehbewegung: vergl. S. 174 u. f.).

Abbild. 75.



β. Das Produkt Pa = Kraft × senkrechter Abstand der beiden Kräfte (Hebelarm) heifst (statisches) **Moment** des Kräftepaares. (Abbild. 75.)

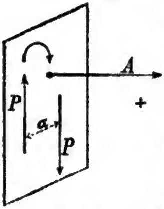
Die Momente von Kräftepaaren mit entgegengesetztem Drehsinn sind mit verschiedenen Vorzeichen in Rechnung zu setzen.

γ. Trägt man das Moment auf einer Geraden ab, welche senkrecht zur Ebene des Kräftepaares steht, so nennt man diese Strecke die **Achse** des Kräftepaares. Die Achsen sind hierbei stets nach

einer solchen Richtung abzutragen, dafs, von ihrem Endpunkte aus gesehen, das Kräftepaar im Sinne der Uhrzeigerbewegung dreht. (Abbild. 76.)

2. Ersatz eines Kräftepaares durch ein anderes.

Abbild. 76.



α. Ein Kräftepaar kann in seiner Ebene beliebig verschoben, sowie in jede dazu parallele Ebene versetzt werden, oder, was hiermit gleichbedeutend, die Achse eines Kräftepaares kann beliebig parallel zu sich verschoben werden.

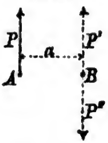
β. Zwei Kräftepaare sind gleichwertig, wenn sie bei gleichem Drehsinn und parallelen Ebenen dasselbe Moment besitzen (d. h. wenn ihre Achsen gleich sind).

Ist der Drehsinn verschieden, so halten zwei Kräftepaare einander das Gleichgewicht, falls bei gleich grofsem Moment ihre Ebenen parallel sind.

3. Kräftepaare in parallelen Ebenen ergeben ein resultierendes Kräftepaar, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Paare und dessen Ebene zur Ebene der ursprünglichen Momente parallel ist.

4. Kräftepaare in beliebigen Ebenen lassen sich wie Kräfte, die an einem Punkte angreifen (vergl. S. 153) mit Hülfe ihrer Achsen zusammensetzen, indem man die Achsen parallel bis zu einem gemeinsamen Anfangspunkte verschiebt. Resultierende Achse gleich der Schlufsseite des aus den einzelnen Achsen gebildeten Polygons: Achsenpolygon. (Rechnerische Bestimmung vergl. b. 2. S. 154.)

Abbild. 77.



5. Parallelverschiebung einer Kraft. Eine Kraft P läfst sich von dem Angriffspunkte A (Abbild. 77) parallel zu sich nach B verschieben, indem man in B zwei mit P gleich grofse, entgegengesetzt gerichtete Kräfte anbringt.

Als Ersatz für die Kraft P erhält man dann eine ihr gleiche und gleichgerichtete Kraft P' in B und ein Kräftepaar PP'', dessen Moment $= Pa$.

Umgekehrt lassen sich eine Kraft P und ein Kräftepaar, die in derselben Ebene liegen, zu einer resultierenden Kraft zusammensetzen, welche sich durch eine Parallelverschiebung von P in dieser Ebene ergiebt. Gröfse und Richtung der Verschiebung sind dadurch bestimmt, dafs durch die Verschiebung ein Kräftepaar erzeugt wird, welches dem ursprünglichen das Gleichgewicht hält.

Ein Kräftepaar und eine zu dessen Ebene senkrechte Kraft lassen sich **nicht** vereinigen.

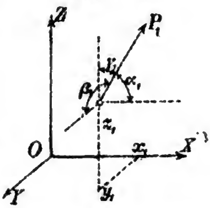
e. Kräfte im Raume.

Mehrere an einem Körper angreifende Kräfte können zu einer Einzelkraft, welche in einem beliebigen Punkte O des Körpers

angreift, und einem Kräftepaar zusammengesetzt werden. Man verschiebe alle Kräfte nach O und setze sie hier nach S. 153 zu einer Mittelkraft zusammen; die bei der Verschiebung nach **d. 5.** S. 156 hinzukommenden Kräftepaare vereinige man zu einem resultierenden Kräftepaare nach **d. 4.** Die Gröfse und Richtung der Mittelkraft R ist von der Wahl des Punktes O unabhängig.

Zerlegt man das Kräftepaar nach einer Ebene senkrecht zu R und einer solchen durch R gehend, so ist das Moment des ersteren Paares konstant, das zweite läfst sich durch Parallelverschiebung von R zu Null machen. Das resultierende Paar (dessen Achse mit R zusammenfällt) ist dann ein Minimum, diese ausgezeichnete Linie, in welche R fällt, heifst Centralachse. Besitzen die Kräfte eine Mittelkraft und ein Kräftepaar, so können dieselben auf unendlich viele Arten durch zwei zu einander windschiefen Kräfte ersetzt werden.

Abbild. 78



Rechnerisch ergeben sich die Mittelkraft R und das Kräftepaar wie folgt (Abbild. 78):

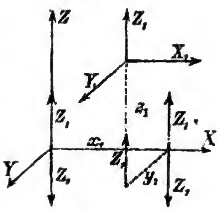
Lege durch O ein rechtwinkliges Koordinatensystem, zerlege jede Kraft $P_1 P_2 \ldots$ nach den Richtungen der drei Achsen in $X_1 = P_1 \cos\alpha_1$, $Y_1 = P_1 \cos\beta_1$, $Z_1 = P_1 \cos\gamma_1 \ldots$, verschiebe X_1 parallel zur z-Achse nach der xy-Ebene, in dieser parallel nach der x-Achse, desgl. Y_1 nach der yz-Ebene, in dieser nach der y-Achse, entsprechend Z_1 nach der xz-Ebene und hierauf nach der z-Achse; in gleicher Weise verfahre mit P_2, $P_3 \ldots$. Es ergeben dann die Seitenkräfte nach den drei Achsen die Mittelkräfte:

$$X = \Sigma X_i = \Sigma P_i \cos\alpha_i; \qquad Y = \Sigma Y_i = \Sigma P_i \cos\beta_i;$$
$$Z = \Sigma Z_i = \Sigma P_i \cos\gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots)$$

Die durch Verschieben der Kräfte nach den Achsen erzeugten Kräftepaare ergeben, um die x-Achse, y-Achse und z-Achse drehend, die Momente (vergl. Abbild. 79):

$$\left.\begin{aligned} L &= \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i); \\ M &= \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i); \\ N &= \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3 \ldots)$$

Abbild. 79.



Die drei Kräfte X, Y und Z geben die Mittelkraft:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildend:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Die drei Kräftepaare ergeben ein resultierendes Paar:

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

dessen Achse mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν bildet:

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Die Kräfte haben nur eine Mittelkraft, wenn:

$$XL + YM + ZN = 0 \text{ ist;}$$

nur ein resultierendes Paar, wenn:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0 \text{ ist.}$$

Für ein ebenes Kräftesystem in der xy-Ebene ist:

$$L = 0; \quad M = 0; \quad Z = 0 \quad \text{und} \quad G = N.$$

Die Mittelkraft paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Einzelkräfte. (Die Bestimmung des Angriffspunktes der Mittelkraft s. S. 155.)

f. Gleichgewicht der Kräfte im Raume.

Ein Körper befindet sich unter der Einwirkung beliebiger Kräfte P_1, P_2, P_3 .... im Gleichgewicht, wenn weder eine Mittelkraft, noch ein resultierendes Kräftepaar vorhanden ist, d. h. wenn mit Rücksicht auf oben:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0;$$
$$L = 0; \quad M = 0; \quad N = 0.$$

Für Kräfte in einer Ebene, der xy-Ebene, beschränken sich die obigen Gleichungen auf:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad N = 0.$$

(Vergl. auch S. 154.)

g. Princip der virtuellen Verrückungen.

Denkt man sich einem System von beliebig verbundenen Punkten eine mit seiner Natur verträgliche unendlich kleine Lagenänderung erteilt, so heifst eine solche eine **virtuelle Bewegung** oder **Verrückung**. Beschreibt dabei der Punkt m (Abbild. 80) unter der Einwirkung der Kraft P einen unendlich kleinen Weg mn, den man als gerade Linie betrachten kann, so nennt man mn die **virtuelle Verrückung** des Punktes m, die Projektion $mq = \delta p$ die **nach der Richtung von P genommene virtuelle Verrückung** und das Produkt $P \cdot \delta p$ die **virtuelle Arbeit** von P.

Abbild. 80



Die virtuelle Arbeit einer Kraft ist gleich der Summe der virtuellen Arbeiten ihrer Seitenkräfte.

Wenn beliebige Kräfte an einem beliebigen System von Punkten sich das Gleichgewicht halten, so ist für jede virtuelle Verrückung des Systems die Summe der virtuellen Arbeiten der dasselbe angreifenden Kräfte gleich Null;

und umgekehrt:

Wenn für jede virtuelle Bewegung des Systems die Summe der virtuellen Arbeiten der dasselbe angreifenden Kräfte gleich Null ist, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht.

Dieses Princip läfst sich durch die Gleichung darstellen:

$$\Sigma[P\,\delta p] = \Sigma[X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z] = 0,$$

wenn δx, δy, δz die virtuellen Koordinatenänderungen der Angriffspunkte der Kräfte bezeichnen.

Ist das Massensystem nicht starr, sondern aus m materiellen Punkten bestehend, deren relative Lage zu einander dadurch bestimmt ist, dafs zwischen ihren Koordinaten n Gleichungen: $f_1 = 0$, $f_2 = 0 \ldots f_n = 0$ bestehen, so erhält man mittelst des obigen Princips die $3m$ Gleichgewichtsbedingungen, wie folgt.

Man eliminiert aus den $3m$ Gleichungen:

$$X_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0,$$

$$Y_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_k} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial y_k} = 0,$$

$$Z_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_k} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial z_k} = 0$$

(für k der Reihe nach $1, 2 \ldots m$ gesetzt)

die unbestimmten Koefficienten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, in welchen Gleichungen X_k, Y_k, Z_k die Seitenkräfte der in den Punkten x_k, y_k, z_k angreifenden äufseren Kräfte bedeuten. Die so erhaltenen $(3m - n)$ Gleichungen stellen zusammen mit den n Bedingungsgleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0 \ldots$ die Gleichgewichtsbedingungen dar.

Wenn $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ das vollständige Differential einer Funktion der Koordinaten ist, so ist diese Funktion für den Gleichgewichtszustand ein Maximum oder Minimum, je nachdem das Gleichgewicht ein labiles oder stabiles ist.

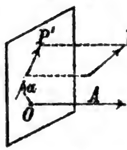
Bei der Benutzung aller Sätze und Gleichungen unter A., sowie B. a. u. b. sind die Widerstände (Reaktionen) fester Stützpunkte als äufsere Kräfte einzuführen.

B. Statische Momente.

a. Momente von Kräften bezogen auf eine Gerade.

1. Moment einer Kraft P bezogen auf eine Gerade A (Abbild. 81) ist das Produkt aus der Projektion P' der Kraft P auf eine zur Geraden senkrechte Ebene und dem Abstande a des Durchdringungspunktes O der Geraden mit der Ebene von der Projektion P' der Kraft (= dem kürzesten Abstande der Kraft von der Geraden). Die Momente sind positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem, von der positiven Richtung der Achse aus gesehen, die Kraft P' um O im Sinne der Uhrzeigerbewegung oder entgegengesetzt dreht.

Abbild. 81.

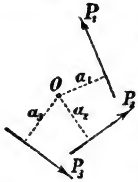


2. Das statische Moment einer Mittelkraft bezogen auf eine beliebige Gerade ist gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte bezogen auf dieselbe Gerade.

Befinden sich beliebige Kräfte im Gleichgewicht, so ist die Summe der statischen Momente bezogen auf jede Gerade gleich Null.

3. Für Kräfte, welche in einer Ebene liegen (Abbild. 82), wählt man vorteilhaft die Gerade senkrecht zur Ebene. Dann ist das statische Moment einer Kraft P bezogen auf die Gerade oder kurz auf den Punkt O gleich dem Produkte der Kraft P mal dem Abstande a (Hebelarm) des Punktes O von P.

Abbild. 82.

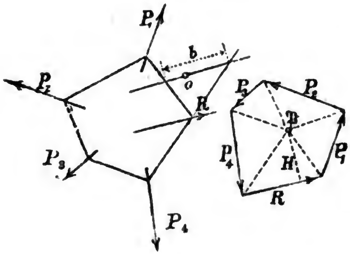


Auch hier gilt Satz 2: Das statische Moment der Mittelkraft bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte bezogen auf denselben Punkt. — Befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht, so ist die algebraische Summe der statischen Momente bezogen auf jeden Punkt der Ebene gleich Null. (Anwendung dieses Satzes bei dem Ritterschen Verfahren; vergl. Statik der Baukonstruktionen.)

4. Zeichnerische Ermittlung der statischen Momente.

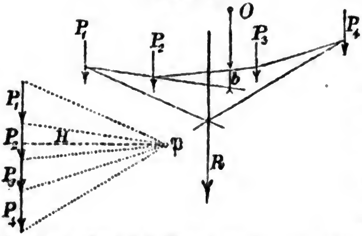
α. Liegen die Kräfte in einer Ebene und wird das statische Moment der Mittelkraft von P_1 bis P_4, bezogen auf den Punkt O (Abbild. 83), gesucht, so verzeichne man Kräfte- und Seilpolygon für den beliebigen Pol 𝔓 (vergl. S. 154) und ziehe durch O zur Mittelkraft R eine Parallele. Schneiden alsdann auf dieser die beiden äufseren Seilpolygonseiten die Strecke b ab, und ist die Entfernung des Poles 𝔓 von R, die Polentfernung $= H$, so ergiebt sich das Moment:

Abbild. 83.



$$M = bH.$$

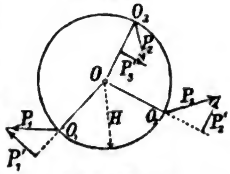
Abbild. 84.



Das Moment der Mittelkraft beliebig vieler Kräfte ist gleich dem Produkte aus Polentfernung und der Strecke, welche auf einer durch den Momentenpunkt O gehenden Parallelen zur Mittelkraft von denjenigen Seilpolygonseiten abgeschnitten wird, durch deren Schnittpunkt die Mittelkraft dieser Kräfte geht. Für Parallelkräfte ist H konstant. In Abbild. 84 ist z. B. das Moment der Kraft P_1 bezogen auf O gleich bH.

β. Liegen die Kräfte in einer Ebene, so gilt auch folgendes Verfahren (Abbild. 85). Schlage mit dem beliebigen Halbmesser H um den Momentenpunkt O einen Kreis, welcher die Kraftrichtungen in O_1, O_2 ... schneidet. Ziehe die Halbmesser OO_1, OO_2 ... und fälle von den Endpunkten der Kräfte P_1, P_2 ... die Lote P'_1, P'_2, P_3 ... auf die Halbmesser. Die Summe der Lote (wobei der Sinn der Drehung zu beachten) ergiebt, mit H multipliziert, das gesuchte statische Moment.

Abbild. 85.



b. Momente von Kräften bezogen auf eine Ebene.

1. **Moment einer Kraft bezogen auf eine Ebene** ist das Produkt aus der Kraft und der Entfernung ihres Angriffspunktes von der Ebene.

2. Für **parallele Kräfte** ist das Moment der Mittelkraft bezogen auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der Momente der Seitenkräfte bezogen auf dieselbe Ebene.

3. Dreht man parallele Kräfte unter Beibehaltung ihrer Angriffspunkte so, daſs sie parallel bleiben, so geht auch die Mittelkraft stets durch denselben Punkt, den **Mittelpunkt der parallelen Kräfte.**

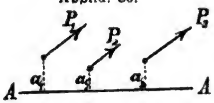
Für die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Mittelpunktes folgen nach 2. die Gleichungen:

$$x_0 \Sigma P = \Sigma P x; \quad y_0 \Sigma P = \Sigma P y; \quad z_0 \Sigma P = \Sigma P z,$$

worin P_1, P_2 ... die parallelen Kräfte, $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$ ... die Koordinaten ihrer Angriffspunkte bedeuten.

4. Liegen die **parallelen Kräfte in einer Ebene** (Abbild. 86), so wählt man vorteilhaft die Ebenen senkrecht zur Ebene der Kräfte. Die Entfernungen der Angriffspunkte von P_1, P_2, P_3 ... von der Ebene sind dann durch die Entfernungen a_1, a_2, a_3 ... von der Schnittachse AA gegeben.

Abbild. 86.



Auch hier gilt für den Mittelpunkt der parallelen Kräfte bezogen auf jede beliebige Gerade in der Ebene die Gleichung:

$$a_0 \Sigma P = \Sigma P a,$$

worin a_0 den Abstand des Mittelpunktes der parallelen Kräfte von der Geraden bedeutet.

c. Schwerpunkt.

1. Allgemeine Sätze.

1. Die an den einzelnen Massenteilchen eines Körpers angreifenden Schwerkräfte bilden ein System von parallelen Kräften, deren Mittelkraft, das Gesamtgewicht des Körpers, stets durch denselben

Punkt, den Mittelpunkt der parallelen Kräfte (vergl. **b.** 3. S. 161), den **Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt** geht, in welche Lage man den Körper auch bringen möge.

2. Für die Bestimmung des Schwerpunktes gelten die nämlichen Sätze wie a. S. 161 angegeben:

Die Summe der statischen Momente der einzelnen Massenteile bezogen auf eine beliebige Ebene ist gleich dem Momente der ganzen Masse bezogen auf dieselbe Ebene (= Produkt von Masse mal Abstand des Schwerpunktes von der Ebene).

Die Summe der statischen Momente der Massenteile bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Ebene (Schwerebene) ist gleich Null.

3. Bedeuten

x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines Massenteilchens von der Masse m_1 und dem Gewichte g_1,

x_2, y_2, z_2 die Koordinaten eines Massenteilchens von der Masse m_2 und dem Gewichte g_2,

x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes,

$M = \Sigma m$ die ganze Masse,

$G = \Sigma g$ das Gesamtgewicht des Körpers, so gilt:

$$x_0 M = \Sigma xm; \quad y_0 M = \Sigma ym; \quad z_0 M = \Sigma zm \text{ oder}$$
$$x_0 G = \Sigma xg; \quad y_0 G = \Sigma yg; \quad z_0 G = \Sigma zg.$$

Dieselben Gleichungen bleiben bestehen, wenn $m_1, m_2 \ldots$ die Massen von Körpern (Flächen oder Linien) und $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots$ die Koordinaten ihrer Schwerpunkte bedeuten.

4. Für homogene Körper gelten die Gleichungen:

$$x_0 V = \int x\,dV; \quad y_0 V = \int y\,dV; \quad z_0 V = \int z\,dV,$$

worin V den Gesamtrauminhalt des Körpers und x, y, z die Koordinaten des Raumelementes dV bedeuten.

Entsprechend gilt für Flächen, welche gleichmäfsig mit Masse belegt gedacht werden:

$$x_0 F = \int x\,dF; \quad y_0 F = \int y\,dF; \quad z_0 F = \int z\,dF,$$

worin F die ganze Fläche, x, y, z die Koordinaten des Flächenelementes dF bedeuten.

Ebenso gilt für Linien, die gleichmäfsig mit Masse belegt sind:

$$x_0 s = \int x\,ds; \quad y_0 s = \int y\,ds; \quad z_0 s = \int z\,ds,$$

worin s die ganze Länge der Linie, x, y, z die Koordinaten des Linienelementes ds bedeuten.

5. Hat eine Linie, eine Fläche oder ein Körper eine Symmetrieebene, Symmetrieachse oder einen Mittelpunkt, so liegt darin der Schwerpunkt.

S bedeutet in den nachfolgenden Abbildungen stets den Schwerpunkt.

2. Schwerpunkt von Linien.

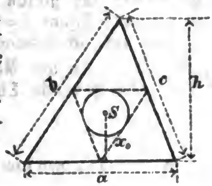
1. **Gerade Strecke.** S liegt im Mittelpunkte der Strecke.

2. **Dreiecksumfang.** (Abbild. 87.) S liegt im Mittelpunkte eines Kreises, welcher demjenigen Dreieck eingeschrieben ist, dessen Ecken in die Mitten der Dreieckseiten a, b, c fallen.

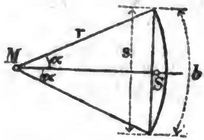
Der senkrechte Abstand x_0 des Schwerpunktes von a ist:

$$x_0 = \frac{b+c}{a+b+c}\,\frac{h}{2}.$$

Abbild. 87.



Abbild. 88.



3. **Parallelogramm.** S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen.

4. **Kreisbogen.** (Abbild. 88.)

$$MS = \frac{r\,s}{b} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

Halbkreisbogen: $MS = \dfrac{2r}{\pi} = 0{,}6366\,r.$

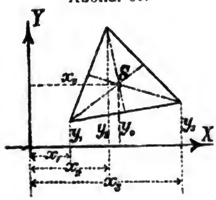
3. Schwerpunkt von Flächen.

1. **Dreieck.** (Abbild. 89.) S ist der Durchschnitt der Mittellinien und liegt, von irgend einer Seite als Grundlinie genommen, in $\frac{1}{3}$ der Höhe.

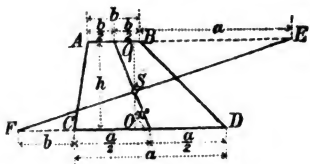
$$x_0 = \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \qquad y_0 = \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

2. **Parallelogramm.** S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen.

Abbild. 89.



Abbild. 90.

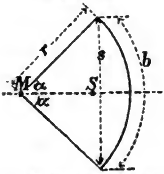


3. **Trapez.** (Abbild. 90.) Mache $BE = a$, $CF = b$, ziehe EF. Dieselbe schneidet die Mittellinie in S. Es ist:

$$OS = \frac{a+2b}{a+b}\,\frac{h}{3}; \qquad O_1S = \frac{2a+b}{a+b}\,\frac{h}{3}.$$

4. **Kreisausschnitt.** (Abbild. 91.)

Abbild. 91.



$$MS = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}\,\frac{r\,s}{b}.$$

Halbkreis: $MS = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi} = 0{,}4244\,r.$

Viertelkreis: $MS = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,r = 0{,}6\,r.$

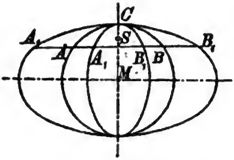
Sextant: $MS = \frac{2\,r}{\pi} = 0{,}6366\,r.$

5. **Kreisabschnitt.** Bezeichnungen wie in Abbild. 88 a. v. S., F = Inhalt des Abschnittes:

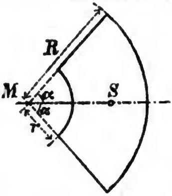
$$MS = \frac{s^3}{12\,F} = \frac{2}{3}\,\frac{r^3\sin^3\alpha}{F} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

6. **Ellipsenabschnitt** $A_1\,B_1\,C_1$ (Abbild. 92). Der Schwerpunkt fällt mit dem Schwerpunkte desjenigen Kreisabschnittes ABC zusammen, welchen die Sehne von einem Kreise abschneidet, dessen Durchmesser die zur Sehne senkrechte Hauptachse der Ellipse ist.

Abbild. 92.



Abbild. 93.



7. **Ringstück.** (Abbild. 93.)

$$MS = \frac{2}{3}\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

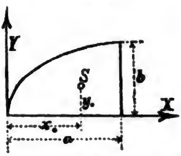
Halbkreisförmiges Ringstück: $MS = \frac{4}{3\pi}\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$

8. **Parabelfläche.**

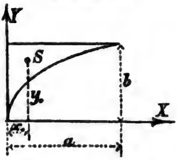
(Abbild. 94) $x_0 = \frac{3}{5}\,a;$ $y_0 = \frac{3}{8}\,b.$

(Abbild. 95) $x_0 = \frac{3}{10}\,a;$ $y_0 = \frac{3}{4}\,b.$

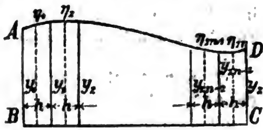
Abbild. 94.



Abbild. 95.



Abbild. 96.



9. **Fläche** $ABCD$ (Abbild. 96) begrenzt von einer beliebigen Kurve AD, der Abscissenachse BC und zwei Endordinaten AB

(= Ordinatenachse) und CD. Zerlege die Fläche in eine **gerade** Anzahl Streifen von gleicher Breite h, so sind (mit Rücksicht auf die Simpsonsche Regel. S. 129) die Koordinaten ξ_0, η_0 des Schwerpunktes S:

$$\xi_0 = h\frac{1\cdot 4y_1+2\cdot 2y_2+3\cdot 4y_3+4\cdot 2y_4+\cdots(2n-2)2y_{2n-2}+(2n-1)4y_{2n-1}+2ny_{2n}}{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}}$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\,\frac{y_0^2+4y_1^2+2y_2^2+4y_3^2+\cdots+2y_{2n-2}^2+4y_{2n-1}^2+y_{2n}^2}{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}}$$

10. **Kugelzone oder -Kalotte.** S liegt in der Mitte der Höhe.

11. **Beliebige Fläche auf der Halbkugel.** Ist F die Fläche, die eine beliebige in sich zurückkehrende Linie auf der Halbkugel begrenzt, F' ihre Projektion auf die die Halbkugel abschliefsende Ebene, x_0 der Abstand des Schwerpunktes der Fläche F von der letzteren, r der Kugelhalbmesser, so ist:

$$x_0 = \frac{F'}{F}\,r.$$

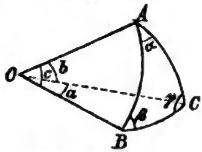
12. **Mantel der Pyramide oder des geraden Kegels.** S liegt in der Verbindungslinie des Schwerpunktes der Grundfläche mit der Spitze, um $\frac{1}{3}h$ von der Grundfläche entfernt.

13. **Mantel des geraden Kegelstumpfes.** Sind die Halbmesser der oberen und unteren Endfläche r und R, so ist der Schwerpunktsabstand von der letzteren:

$$x_0 = \frac{h}{3}\,\frac{R+2r}{R+r}.$$

14. **Kugeldreieck** (Abbild. 97). Ist x_1 der Schwerpunktsabstand des Kugeldreiecks von der Ebene OBC, x_2 der von OAC und x_3 von OAB, so ist:

Abbild. 97.



$$x_1 = \frac{a - b\cos\gamma - c\cos\beta}{\alpha+\beta+\gamma-\pi}\,\frac{r}{2};$$

$$x_2 = \frac{b - c\cos\alpha - a\cos\gamma}{\alpha+\beta+\gamma-\pi}\,\frac{r}{2};$$

$$x_3 = \frac{c - a\cos\beta - b\cos\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-\pi}\,\frac{r}{2}.$$

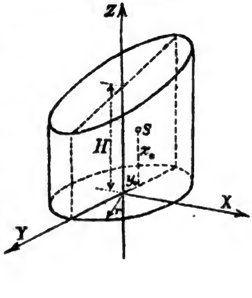
4. Schwerpunkt von Körpern.

1. **Prisma und Cylinder.** S liegt in der Mitte der Verbindungslinie zwischen den Schwerpunkten der Endflächen.

2. **Schief abgeschnittener Kreiscylinder.** Es sei (Abbild. 98):

die yz-Ebene die Symmetrieebene,
H die Länge der Achse,
α der Neigungswinkel der schiefen Schnittebene gegen die Grundebene,
r der Halbmesser des Grundkreises,

Abbild. 98.



so ist:
$$y_0 = \frac{1}{4}\frac{r^2 \operatorname{tg}\alpha}{H};$$
$$z_0 = \frac{H}{2} + \frac{1}{8}\frac{r^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{H}.$$

3. **Pyramide und Kegel.** S liegt in der Schwerpunktsachse im Abstande $\frac{1}{4}h$ von der Grundfläche.

4. **Abgestumpfte Pyramide.** Sind A und B die Endflächen, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Ebene A:
$$x_0 = \frac{h}{4}\frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B}.$$

5. **Abgestumpfter Kegel.** Sind R und r die Halbmesser der Endflächen, dann ist der Abstand des Schwerpunktes von der ersteren:
$$x_0 = \frac{h}{4}\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

6. **Obelisk** (Abbild. 34 auf S. 130). Der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ab ist:
$$x_0 = \frac{h}{2}\frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b_1}.$$

7. **Kugelausschnitt.** Bezeichnungen wie in Abbild. 91 S. 164; h die Höhe der Kalotte:
$$MS = x_0 = \frac{3}{8}(1 + \cos\alpha)\, r = \frac{3}{8}(2r - h).$$
Halbkugel: $x_0 = \frac{3}{8}r$.

Halbe Hohlkugel: $x_0 = \frac{3}{8}\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$.

8. **Kugelabschnitt.** Bezeichnungen wie in Abbild. 88 a. S. 163.
$$MS = x_0 = \frac{3}{4}\frac{(2r - h)^2}{3r - h},$$
wo h die Pfeilhöhe des Abschnittes ist. Diese Formel gilt auch für den Abschnitt desjenigen Umdrehungsellipsoids, dessen Drehungsachse gleich dem Durchmesser der Kugel ist. Der Abstand von der Fläche des Schnittkreises mit dem Halbmesser ϱ ist:
$$x_1 = \frac{h}{2}\frac{h^2 + 2\varrho^2}{h^2 + 3\varrho^2} = \frac{h}{4}\frac{4r - h}{3r - h}.$$

9. **Umdrehungsparaboloid.** Ist die Achse der erzeugenden Parabel die Umdrehungsachse; h der Abstand des Scheitels von der Endfläche, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche:
$$x_0 = \frac{1}{3}h.$$

10. **Dreiachsiges Ellipsoid:**

Gleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Für einen Oktanten ist:
$$x_0 = \frac{3}{8}a; \qquad y_0 = \frac{3}{8}b; \qquad z_0 = \frac{3}{8}c.$$

11. **Beliebiger Körper** (vergl. Simpsonsche Regel S. 129). Die Formel für ξ_0 in 9. S. 164 gilt auch näherungsweise für den Abstand des Schwerpunktes eines Körpers von einer Ebene, welche den Körper begrenzt oder berührt, wenn man ihn durch Ebenen, die der ersten parallel sind, in eine gerade Anzahl von Stücken gleicher Dicke h zerlegt und in die Formel statt y_m den Flächeninhalt des entsprechenden Schnittes einsetzt.

Ist der allgemeine Ausdruck für die Gröfse eines Parallelschnittes y eine Funktion zweiten Grades in bezug auf seinen Abstand von einer Ebene (wie in den Fällen 4. 3 bis 8), so ist die Formel genau richtig, und es brauchen nur die beiden äufseren und ein mittlerer Parallelschnitt in Rechnung gezogen zu werden.

5. Schwerpunkts-Ermittlung durch Zeichnung.

1. **Von Linien und Flächen** findet man den Schwerpunkt durch Zerlegung in Elemente, deren Schwerpunktslage bekannt ist. Die Gröfse jedes Elementes betrachtet man als Kraft, die im Schwerpunkte des Elementes angreift. Mittelst Kräfte- und Seilpolygon sucht man die Mittelkräfte dieser Kräfte für zwei beliebig gewählte Richtungen. Der Schnittpunkt der beiden Mittelkräfte ergiebt den Schwerpunkt. Zur Prüfung der Genauigkeit empfiehlt es sich, die Konstruktion aufserdem für eine dritte Richtung durchzuführen.

2. **Körper** zerlege man entsprechend in Teilkörper und setze die Gewichte als Parallelkräfte zusammen, indem man letztere auf zwei Koordinatenebenen projiziert und in diesen wie unter 1. verfährt.

C. Trägheitsmomente.

a. Allgemeine Eigenschaften der Trägheitsmomente.

1. Unter dem **Trägheitsmomente eines materiellen Körpers** bezogen auf eine gewisse Achse versteht man die Summe der Produkte aus den Massenteilchen dM und den Quadraten ihrer Entfernungen r von der Achse: $J = \int r^2 dM$.

Das Trägheitsmoment ist zugleich die Masse, die man in der Entfernung 1 von der Drehachse anbringen müfste, um dasselbe Arbeitsvermögen zu erhalten, welches der gegebene Körper besitzt. (Es ist die auf die Entfernung 1 reduzierte Masse.)

Besteht ein Körper (Fläche, Linie) aus mehreren Teilen, so ist sein Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Teile, bezogen auf dieselbe Achse.

Schreibt man das Trägheitsmoment:

$$J = Mi^2,$$

worin M die gesamte Masse des Körpers bedeutet, so heifst i der **Trägheitsarm** der Masse M.

2. Trägt man auf jeder der durch einen Punkt gehenden Achsen eines Körpers eine Strecke auf, umgekehrt proportional dem zu dieser

Achse gehörigen Trägheitsarm, so liegen sämtliche Endpunkte auf dem **Trägheitsellipsoid**, dessen Hauptachsen die **Hauptträgheitsmomente** entsprechen. Sind die **Centrifugalmomente** bezogen auf drei Koordinatenebenen gleich Null, also

$$\int xy\,dM = \int xz\,dM = \int yz\,dM = 0,$$

so fallen die Hauptachsen dieses Ellipsoides, die Trägheitshauptachsen, mit den Koordinatenachsen zusammen und umgekehrt:

Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Achsen die Trägheitshauptachsen sind, besitzen die Centrifugalmomente den Wert Null.

Hat ein Körper eine Symmetrieebene, so ist jede Normale zu derselben eine Trägheitshauptachse. Hat ein Körper eine Symmetrieachse, so ist diese eine der drei Hauptachsen für jeden ihrer Punkte.

Fällt der Schwerpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen, so heifst das Trägheitsellipsoid: **Centralellipsoid; seine** Hauptachsen werden **freie Achsen** genannt.

3. Sind die Hauptträgheitsmomente für einen beliebigen Punkt gleich A, B, C, so ist das **Trägheitsmoment für eine beliebige Achse** durch diesen Punkt, welche die Winkel α, β, γ mit den Hauptachsen bildet:

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

4. Trägheitsmomente für parallele Achsen.

Ist J_s das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Drehachse, J das Trägheitsmoment bezogen auf eine andere Achse, die im Abstande a mit jener parallel ist, so ist:

$$J = J_s + Ma^2.$$

Sind J_1 und J_2 die Trägheitsmomente für parallele Schwerachsen zweier Körper, so findet man das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Körpers für eine durch seinen Schwerpunkt gehende, parallele Achse aus der Formel:

$$J = J_1 + J_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}a^2,$$

wenn a die Entfernung der Schwerpunkte der beiden Massen M_1 und M_2 von einander bedeutet.

5. Einen homogenen Körper vorausgesetzt, versteht man unter dem **Trägheitsmomente des geometrischen Körpers** bezogen auf eine Achse die Summe der Produkte aus den Raumteilchen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Achse; entsprechende Bedeutung haben die **Trägheitsmomente von** (homogen gedachten) **Flächen** und **Linien.**

6. Trägheitsmomente ebener Gebilde.

1. Unter **äquatorialem Trägheitsmoment** eines ebenen Gebildes versteht man sein Trägheitsmoment bezogen auf eine in der Ebene des Gebildes liegende Achse,

unter **polarem Trägheitsmoment** dasjenige, bezogen auf eine zur Ebene des Gebildes **senkrechte** Drehachse.

2. Das polare Trägheitsmoment eines Gebildes ist gleich der Summe zweier äquatorialen Trägheitsmomente, bezogen auf zwei beliebige, sich in der Polarachse rechtwinklig schneidende Achsen.

3. Trägt man auf jeder der durch einen Punkt gehenden Achsen eines ebenen Gebildes eine Strecke ab umgekehrt proportional dem Trägheitsarm des entsprechenden äquatorialen Trägheitsmomentes, so liegen sämtliche Endpunkte auf der **Trägheitsellipse**, deren Hauptachsen die beiden Hauptträgheitsmomente entsprechen. Diejenige der beiden Hauptachsen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum wird, bezeichnet man als erste, die andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, als zweite Hauptachse.

4. Nennt man die Trägheitsarme der beiden Hauptträgheitsmomente a und b, so nimmt die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung der Trägheitsellipse

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = k^2$$

die einfachste Gestalt

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

an, wenn man $k = ab$ setzt.

Bei dieser Annahme ist der Trägheitsarm des auf eine beliebige Achse bezogenen Trägheitsmomentes gleich dem Abstande der Achse von einer zu ihr parallelen Tangente an die Trägheitsellipse. Die Halbachsen sind die Trägheitsarme a und b.

5. Sind J_x und J_y die äquatorialen Trägheitsmomente für zwei zu einander rechtwinklige (Koordinaten-) Achsen, so ergiebt sich der Winkel φ_0 zwischen der Abscissenachse und den Hauptachsen aus der Gleichung: $$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\int xy\,dF}{J_y - J_x}.$$

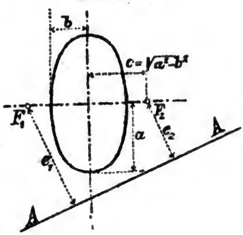
6. Sind die Hauptträgheitsmomente für einen Punkt A und B, so ist das **Trägheitsmoment für eine beliebige Achse** durch diesen Punkt, welche den Winkel φ mit der ersten Hauptachse bildet,

$$J = A \cos^2\varphi + B \sin^2\varphi.$$

Fällt der Schwerpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen, so heifst die Trägheitsellipse **Centralellipse**.

7. Trägt man auf der ersten Hauptachse (der kleinen Achse) der Centralellipse vom Schwerpunkte aus nach beiden Seiten die der Entfernung der Brennpunkte der Centralellipse vom Mittelpunkte gleiche Länge $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ab, so heifsen die Endpunkte F_1 und F_2 (Abbild. 99) **Fixpunkte des Querschnitts.** Die Trägheitsellipsen dieser Punkte sind Kreise vom Halbmesser a.

Abbild. 99.



Mittelst der Fixpunkte findet sich das Trägheitsmoment J bezogen auf eine beliebige Achse AA (Abbild. 99, S. 169):

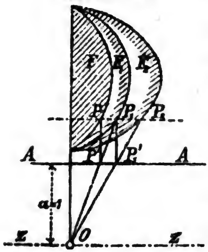
$$J = F(a^2 + e_1 e_2),$$

worin F die Fläche des Querschnitts, e_1 und e_2 die Abstände der beiden Fixpunkte F_1 und F_2 von der Achse bedeuten.

b. Zeichnerische Bestimmung der Trägheitsmomente.

1. Verfahren von Nehls.

Abbild. 100.



Ziehe zur Achse ZZ (Abbild. 100), für welche das Trägheitsmoment der Fläche F gesucht wird, eine Parallele AA im Abstande $a = 1$. Lege weiter durch jeden Punkt P der Begrenzungslinie von F eine Parallele zu ZZ, fälle das Lot PP' auf AA, ziehe $OP'P_1$, fälle das Lot $P_1 P_1'$ und ziehe $OP_1'P_2$. Die Punkte P_1 und P_2 bestimmen je eine Kurve, welche die Flächen F'_1 und F_2 begrenzen.

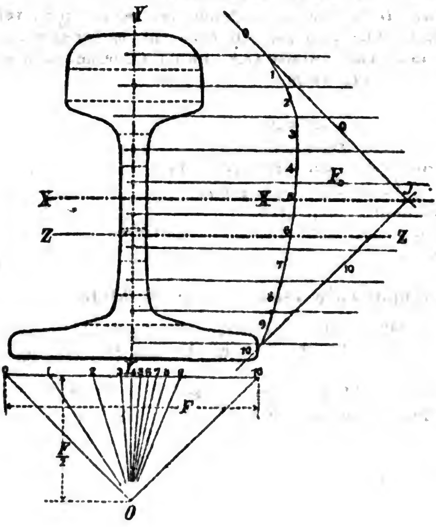
Es ist dann das Trägheitsmoment von F bezogen auf ZZ:

$$J = F_2,$$

während F_1 das statische Moment von F bezogen auf ZZ darstellt.

2. Verfahren von Mohr.

Abbild. 101.

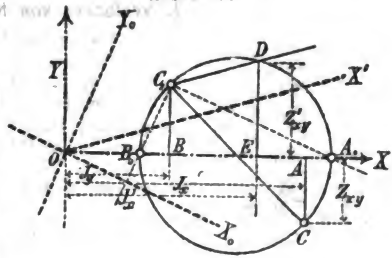


Man zerlegt die Querschnittsfläche parallel der Achse ZZ (Abbild. 101), bezüglich welcher das Trägheitsmoment gesucht wird, in eine genügende Anzahl von Streifen, trägt die Flächeninhalte als Längen 0 1, 1 2 . . . 9 10 auf einer zur Achse parallelen Geraden auf und faſst diese Flächen als Kräfte auf, die in den Schwerpunkten der Streifen angreifen. Zeichnet man nun mit der Polentfernung

$$\frac{F}{2} = \frac{\overline{0\ 10}}{2}$$

(wobei F die Gesamtfläche) Kraft- und Seilpolygon, so giebt der Schnitt J der äufsersten Polygonseiten einen Punkt der Schwerachse XX, und die von diesen Polygonseiten und dem Seilpolygon gebildete Fläche F'_0 liefert mit F multipliziert das Trägheitsmoment bezogen auf die zur Achse ZZ parallele Schwerachse, also $J_x = F \cdot F_0$. Aus J_x läfst sich dann nach **a. 4.** S. 168 das gesuchte J_z leicht finden.

Abbild. 102.



3. Sind die Trägheitsmomente J_x und J_y für zwei zu einander rechtwinklige Achsen, J_z für eine dritte unter 45° gegen die x-Achse geneigte Achse ermittelt, so lassen sich die **Trägheitsmomente für ein neues Achsenkreuz**, das denselben Anfangspunkt besitzt, wie folgt, durch Zeichnung finden*) (Abbild. 102).

Man bestimme das Centrifugalmoment Z_{xy} aus der Gleichung:

$$Z_{xy} = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) - J_z.$$

Auf der x-Achse trage man von O aus die Strecken $OA = J_x$, $OB = J_y$ ab, errichte in A das Lot $AC = Z_{xy}$ im Sinne der negativen y, in B das Lot $BC_1 = Z_{xy}$ im Sinne der positiven y, verbinde C mit C_1 und zeichne über CC_1 als Durchmesser einen Kreis. Zieht man dann zu der neuen Achse OX' durch C_1 eine Parallele und fällt vom Schnittpunkte D mit dem Kreise auf OX das Lot DE, so ist

$$OE = J'_x,$$
$$ED = Z'_{xy}.$$

J'_y findet man am besten aus der Beziehung:

$$J'_x + J'_y = J_x + J_y.$$

Die Linien C_1B_0 und C_1A_0 geben die Richtungen der Hauptachsen OX_0 bezw. OY_0, OA_0 und OB_0 die Gröfsen der Hauptträgheitsmomente an.

c. Trägheitsmomente verschiedener Gebilde.

(Ausführlichere Angaben über Trägheitsmomente üblicher Querschnittsformen s. im vierten Abschnitt unter IV., sowie in Abteil. II, Abschnitt Materialienkunde.)

Im folgenden bedeutet M die Gesamtmasse des Gebildes. Der Zeiger bei J giebt die Achse an, auf welche das Trägheitsmoment sich bezieht.

---

*) S. Müller-Breslau, Graphische Statik, II. Aufl., S. 37 u. f.

Abbild. 103.



1. Kreislinie (Abbild. 103):

$$J_0 = M r^2.$$

Abbild. 104.



2. Kreisfläche (Abbild. 104):

Polares Trägheitsmoment: $J_0 = M \frac{r^2}{2}$;

Aequatoriales Trägheitsmoment:

$$J_x = M \frac{r^2}{4} = \frac{J_0}{2}.$$

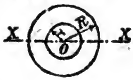
Abbild. 105.



3. Kreisringfläche:

(Abbild. 105) Polares Trägh.-Mom.: $J_0 = M \frac{R^2 + r^2}{2}$;

Abbild. 106.



(Abbild. 106) Aequatoriales Trägheitsmoment:

$$J_x = M \frac{R^2 + r^2}{4} = \frac{J_0}{2}.$$

4. Gerade Strecke von der Länge l, deren einer Endpunkt auf der Drehachse x liegt und welche mit der Achse den Winkel α bildet:

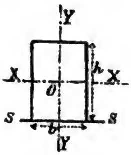
$$J_x = M \frac{(l \sin \alpha)^2}{3}.$$

Für $\alpha = 90^0$ (die Strecke steht senkrecht zur Achse):

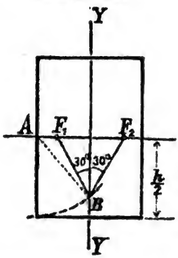
$$J_x = M \frac{l^2}{3}.$$

5. Rechteckige Platte (Abbild. 107):

Abbild. 107.



Abbild. 108.



$$J_S = M \frac{h^2}{3}; \quad J_x = M \frac{h^2}{12};$$

$$J_y = M \frac{b^2}{12}.$$

Polares Trägheitsmoment:

$$J_0 = M \frac{b^2 + h^2}{12}.$$

Für eine beliebige Achse ergiebt sich das äquatoriale Trägheitsmoment am bequemsten mittelst der Fixpunkte F_1 und F_2 nach a. 6. 7. S. 169 u. 170.

F_1 und F_2 findet man nach Abbild. 108, indem man $AB = \frac{1}{2} h$ macht, und BF_1 und BF_2 unter 30^0 gegen YY zieht.

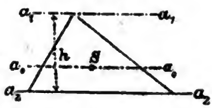
6. Dreieckige Platte (Abbild. 109):

Achse $a_1 a_1$ durch die Spitze: $J_1 = M\frac{h^2}{2}$.

„ $a_0 a_0$ „ den Schwerpunkt: $J_0 = M\frac{h^2}{18}$.

„ $a_2 a_2$ „ die Grundlinie: $J_2 = M\frac{h^2}{6}$.

Abbild. 109.



7. Für eine **beliebige Fläche** ***ABCD*** (s. Abbild. 96 a. S. 164) sind die Trägheitsmomente bezogen auf die x- und y-Achse annähernd (entsprechend der Simpsonschen Regel (s. S. 129):

$$J_x = \tfrac{1}{3} h (y_0^3 + 4y_1^3 + 2y_2^3 + 4y_3^3 + \cdots + 4y^3_{2n-1} + y^3_{2n})$$

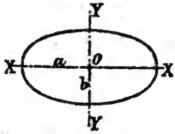
$$J_y = \tfrac{1}{3} h^3 (1^2 \cdot 4y_1 + 2^2 \cdot 2y_2 + 3^2 \cdot 4y_3 + 4^2 \cdot 2y_4 + \cdots + (2n-1)^2 \cdot 4y_{2n-1} + (2n)^2 y_{2n}).$$

8. Elliptische Platte (Abbild. 110):

$$J_x = M\frac{b^2}{4}; \quad J_y = M\frac{a^2}{4};$$

$$J_0 = M\frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Abbild. 110.

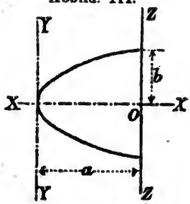


9. Parabolische Platte (Abbild. 111):

$$J_x = M\frac{b^2}{5}; \qquad J_y = M\frac{3}{7}a^2;$$

$$J_z = M\frac{8}{35}a^2; \qquad J_0 = M\left(\frac{b^2}{5} + \frac{8}{35}a^2\right).$$

Abbild. 111.



10. Normales Parallelopipedon (Abbild. 112):

$$J_z = M\frac{a^2 + b^2}{3}.$$

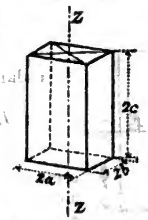
11. Normaler Kreiscylinder bezogen auf die Drehachse:

$$J = M\frac{r^2}{2}.$$

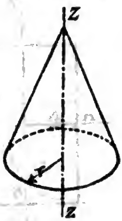
12. Normaler Kreiskegel (Abbild. 113):

$$J_z = M\frac{3}{10}r^2.$$

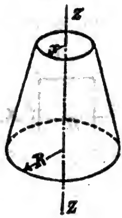
Abbild. 112.



Abbild. 113.



Abbild. 114.



13. Abgestumpfter Kegel (Abbild. 114):

$$J_z = M\frac{3}{10}\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

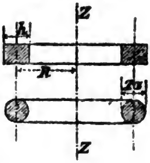
14. Ring (Abbild. 115). Querschnitt rechteckig . . . . $J_z = M(R^2 + \frac{1}{4}h^2)$.
" kreisförmig oder elliptisch: $J_z = M(R^2 + \frac{3}{4}a^2)$.

15. Kugelabschnitt von der Höhe h, Kugelhalbmesser $= r$; Trägheitsmoment bezogen auf die Symmetrieachse:

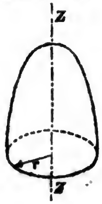
$$J = M\frac{2}{3}h\left(r - \frac{5}{12}h + \frac{1}{30}\frac{h^2}{3r - h}\right)$$
$$= M\frac{2r^2 - 1{,}5\,rh + 0{,}3h^2}{3r - h}h.$$

Kugel und Halbkugel: $J = M\frac{2}{5}r^2$.

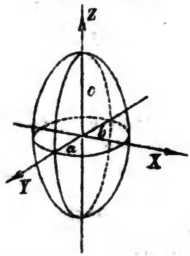
Abbild. 115.



Abbild. 116.



Abbild. 117.



16. Umdrehungsparaboloid (Abbild. 116): $J_z = M\frac{r^2}{3}$.

17. Ellipsoid (Abbild. 117):

$$J_z = M\frac{a^2 + b^2}{5}; \qquad J_y = M\frac{a^2 + c^2}{5}; \qquad J_x = M\frac{b^2 + c^2}{5}.$$

III. DYNAMIK STARRER KÖRPER.

A. Erklärungen, Maſse und Grundgesetze.

1. Kraft und Masse.

Die Gröſse einer **Kraft** P als Ursache der Beschleunigung p einer frei beweglichen Masse m ist dem Produkte pm proportional. Man wählt bei allen Maſssystemen die Einheiten von Kraft, Masse und Beschleunigung so, daſs

$P = mp$; **Kraft = Masse × Beschleunigung.**

Unter dem Einfluſs des Gewichtes G, der Anziehungskraft der Erde, erfährt jeder Körper die Beschleunigung g des freien Falles (s. S. 142), so daſs zwischen G, g und der Masse m ebenfalls die Beziehung besteht

$$G = mg;$$

Gewicht = Masse × Beschleunigung durch die Schwere.

Da an demselben Orte g für alle Körper gleich ist, so sind die Massen den Gewichten der Körper proportional.

Im technischen Maſssysteme*) sind als Grundeinheiten gewählt:

Einheit der Länge = 1 m, **Einheit der Zeit** = 1 Sek., **Einheit der Kraft** = 1 kg = dem Gewichte von 1 l reinem Wasser bei 4° C unter dem Breitengrade von Paris.**)

Hiernach ergiebt sich als **Einheit der Masse** die Masse eines Körpers vom Gewichte = g kg.

2. Arbeitsvermögen.

Arbeitsvermögen einer bewegten Masse, lebendige Kraft, kinetische oder aktuelle Energie L heiſst das halbe Produkt aus der Masse m und dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit:

$$L = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Die Einheit des Arbeitsvermögens ist = 1 mkg (Meterkilogramm). Besitzen die einzelnen Massenteile eines Körpers verschiedene Geschwindigkeiten, so ist L die Summe der Produkte, über alle Elemente ausgedehnt:

$$L = \Sigma \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Das **Arbeitsvermögen einer um eine feste Achse sich drehenden Masse** beträgt demnach:

$$L = \tfrac{1}{2} J\omega^2,$$

wenn J das Trägheitsmoment der Masse, bezogen auf die Drehachse (vergl. S. 167) und ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung bedeutet.

Das **Arbeitsvermögen einer beliebig sich bewegenden Masse** läſst sich als Summe:

$$L = \tfrac{1}{2} Mv_0^2 + \tfrac{1}{2} J\omega^2$$

ausdrücken, worin M die ganze Masse, v_0 die Geschwindigkeit, mit welcher der Schwerpunkt sich bewegt, ω die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das System augenblicklich um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse sich dreht, und J das auf diese Achse bezogene Trägheitsmoment bedeutet.

3. Bewegungsgröſse und Antrieb der Kraft.

Bewegungsgröſse einer bewegten Masse heiſst das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit $= mv$.

---

*) Vergl. auch vierzehnter Abschnitt, Elektrotechnik: Absolutes Maſssystem.

**) Die Angabe des Breitengrades fällt fort, wenn wie üblich, das Kilogramm zur Messung der Masse benutzt wird; diese Angabe fehlt daher in der deutschen Maſs- und Gewichtsordnung.

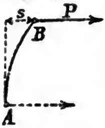
Antrieb einer Kraft heifst das Produkt aus Kraft und Zeit ihrer Einwirkung $= Pt$ bezw. $= \int P dt$.

4. Arbeit.

Das Produkt aus einer Kraft P und dem von einem materiellen Punkte in der Richtung der Kraft zurückgelegten Weg s heifst die von der Kraft geleistete **mechanische Arbeit:**

$$A = Ps.$$

Abbild. 118.



Die Weglänge s ist als positive Gröfse in Rechnung zu setzen, wenn die Projektion des Weges auf die Kraftrichtung im Sinne der Kraftrichtung durchlaufen wird, im entgegengesetzten Falle als negative Gröfse.

Steht die Kraft senkrecht zur Wegrichtung, so ist die geleistete Arbeit gleich Null.

Wechselt während der Bewegung die Kraftrichtung, so ist in jedem Augenblick die Projektion des Wegelementes ds auf die Kraftrichtung zu nehmen. Bedeutet φ den Winkel zwischen P und ds, so ergiebt sich:

$$A = \int P ds \cos\varphi,$$

das Integral über den ganzen Weg ausgedehnt.

Wirken mehrere Kräfte $P_1, P_2 \ldots$ auf einen Körper, so ist die Arbeit die Summe der Produkte aus den Kräften und den Projektionen der Wegelemente auf die Kraftrichtungen:

$$A = \Sigma Ps.$$

Einheit der Arbeit ist das Meterkilogramm (mkg).

1 mkg = 0,1569 preufs. Fufspfd. = 0,1383 engl. Fufspfd. = 0,1770 österreich. Fufspfd.

5. Leistung.

Leistung, Arbeitstärke oder **Effekt** heifst die in einer Sekunde geleistete Arbeit:

$$E = \frac{Ps}{t} = Pv = \text{Kraft mal Geschwindigkeit,}$$

letztere gemessen in der Kraftrichtung.

Einheit der Arbeitstärke ist das Sekunden-Meterkilogramm.

Als technische Einheit gilt auch die **Pferdestärke** = 75 Sek.-mkg = 1 PS = 477,93 preufs. Sek.-Fufspfd. = 542,47 engl. Sek.-Fufspfd. = 423,68 österreich. Sek.-Fufspfd.

1	alte	preufs.	Pferdestärke	= 480	preufs.	Sek.-Fufspfd.
1	„	engl.	„	= 550	engl.	„ „
1	„	österreich.	„	= 430	österr.	„ „

Wird eine bestimmte Leistung = N Pferdestärken dadurch erzielt, dafs ein Kräftepaar, dessen Moment = M_d mkg beträgt, um eine feste Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω entsprechend n Umdrehungen i. d. Min. dreht, so besteht zwischen M_d, N und n die Gleichung:

$$M_d = \frac{75\,N}{\omega} = \frac{60 \cdot 75}{2\pi}\frac{N}{n} = 716{,}19726\,\frac{N}{n}\ \text{mkg.}$$

Für die Umrechnung von ω aus n gilt die Beziehung:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 0{,}1047\,n,$$

wobei die Tafel auf S. 178 benutzt werden kann.

Tafel für die Berechnung des Drehmomentes M_d aus dem Leistungsquotienten $\frac{N}{n}$.

$\frac{N}{n}$	M_d mkg.	$\frac{N}{n}$	M_d mkg.	$\frac{N}{n}$	M_d mkg.	$\frac{N}{n}$	M_d mkg.
0,005	3,581	0,1	71,62	1,1	787,82	2,5	1790,49
0,01	7,162	0,2	143,24	1,2	859,44	3,0	2148,59
0,02	14,324	0,3	214,86	1,3	931,06	3,5	2506,69
0,03	21,486	0,4	286,48	1,4	1002,68	4	2864,79
0,04	28,648	0,5	358,10	1,5	1074,30	5	3580,99
0,05	35,810	0,6	429,72	1,6	1145,92	6	4297,18
0,06	42,972	0,7	501,34	1,7	1217,54	7	5013,38
0,07	50,134	0,8	572,96	1,8	1289,16	8	5729,58
0,08	57,296	0,9	644,58	1,9	1360,78	9	6445,78
0,09	64,458	1,0	716,20	2,0	1432,39	10	7161,97

6. Gesetz der mechanischen Arbeiten.

Die mechanische Arbeit, welche bei der Bewegung eines materiellen Körpers von der Mittelkraft aller auf ihn einwirkenden äußeren Kräfte geleistet wird, ist gleich der Summe aller derjenigen mechanischen Arbeiten, welche von den einzelnen Kräften dabei geleistet werden.

(Dieser Satz enthält als besondere Fälle alle Sätze unter II. A., da für das Gleichgewicht die Mittelkraft, und daher auch deren Arbeit in jedem Augenblicke gleich Null ist.)

Bezeichnet man die Seitenkräfte einer Kraft P nach drei Koordinatenachsen mit X, Y, Z, die Koordinatenänderungen bei Verschiebung des Angriffspunktes um ds mit dx, dy, dz und den Winkel zwischen ds und P mit α, so gilt demnach für die Elementararbeit:

$$P\,ds\cos\alpha = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

7. Gleichwertigkeit von Arbeitsvermögen und mechanischer Arbeit.

(Princip der lebendigen Kraft.)

Der Zuwachs an Arbeitsvermögen, welchen ein bewegtes System erfährt, wenn es aus einer Lage in eine andere übergeht,

Winkelgeschwindigkeit (ω) aus Umdrehungszahl (n) i. d. Min.*)

Werte von $\omega = \frac{2\pi n}{60} = 0,1047\,n$.

$n = 9,549\,\omega$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\omega =$	0,1047	0,2094	0,3142	0,4189	0,5236	0,6283	0,7330	0,8378	0,9425
10	1,0472	1,1519	1,2566	1,3614	1,4661	1,5708	1,6755	1,7802	1,8850	1,9897
20	2,0944	2,1991	2,3038	2,4086	2,5133	2,6180	2,7227	2,8274	2,9322	3,0369
30	3,1416	3,2463	3,3510	3,4558	3,5605	3,6652	3,7699	3,8746	3,9794	4,0841
40	4,1888	4,2935	4,3982	4,5029	4,6077	4,7124	4,8171	4,9218	5,0265	5,1313
50	5,2360	5,3407	5,4454	5,5501	5,6549	5,7596	5,8643	5,9690	6,0737	6,1785
60	6,2832	6,3879	6,4926	6,5973	6,7021	6,8068	6,9115	7,0162	7,1209	7,2257
70	7,3304	7,4351	7,5398	7,6445	7,7493	7,8540	7,9587	8,0634	8,1681	8,2729
80	8,3776	8,4823	8,5870	8,6917	8,7965	8,9012	9,0059	9,1106	9,2153	9,3201
90	9,4248	9,5295	9,6342	9,7389	9,8437	9,9484	10,053	10,158	10,263	10,367
100	10,472	10,577	10,681	10,786	10,891	10,996	11,100	11,205	11,310	11,414
110	11,519	11,624	11,729	11,833	11,938	12,043	12,147	12,252	12,357	12,462
120	12,566	12,671	12,776	12,881	12,985	13,090	13,195	13,299	13,404	13,509
130	13,614	13,718	13,823	13,928	14,032	14,137	14,242	14,347	14,451	14,556
140	14,661	14,765	14,870	14,975	15,080	15,184	15,289	15,394	15,499	15,603
150	15,708	15,813	15,917	16,022	16,127	16,232	16,336	16,441	16,546	16,650
160	16,755	16,860	16,965	17,069	17,174	17,279	17,383	17,488	17,593	17,698
170	17,802	17,907	18,012	18,117	18,221	18,326	18,431	18,535	18,640	18,745
180	18,850	18,954	19,059	19,164	19,268	19,373	19,478	19,583	19,687	19,792
190	19,897	20,001	20,106	20,211	20,316	20,420	20,525	20,630	20,735	20,839
200	20,944	21,049	21,153	21,258	21,363	21,468	21,572	21,677	21,782	21,886
210	21,991	22,096	22,201	22,305	22,410	22,515	22,619	22,724	22,829	22,934
220	23,038	23,143	23,248	23,353	23,457	23,562	23,667	23,771	23,876	23,981
230	24,086	24,190	24,295	24,400	24,504	24,609	24,714	24,819	24,923	25,028
240	25,133	25,237	25,342	25,447	25,552	25,656	25,761	25,866	25,970	26,075
250	26,180	26,285	26,389	26,494	26,599	26,704	26,808	26,913	27,018	27,122
260	27,227	27,332	27,437	27,541	27,646	27,751	27,855	27,960	28,065	28,170
270	28,274	28,379	28,484	28,588	28,693	28,798	28,903	29,007	29,112	29,217
280	29,322	29,426	29,531	29,636	29,740	29,845	29,950	30,055	30,159	30,264
290	30,369	30,473	30,578	30,683	30,788	30,892	30,997	31,102	31,206	31,311
300	31,416	31,521	31,625	31,730	31,835	31,940	32,044	32,149	32,254	32,358
310	32,463	32,568	32,673	32,777	32,882	32,987	33,091	33,196	33,301	33,406
320	33,510	33,615	33,720	33,824	33,929	34,034	34,139	34,243	34,348	34,453
330	34,558	34,662	34,767	34,872	34,976	35,081	35,186	35,291	35,395	35,500
340	35,605	35,709	35,814	35,919	36,024	36,128	36,233	36,338	36,442	36,547
350	36,652	36,757	36,861	36,966	37,071	37,176	37,280	37,385	37,490	37,594
360	37,699	37,804	37,909	38,013	38,118	38,223	38,327	38,432	38,537	38,642

*) Z. B.: $n = 40$, $\omega = 4,1888$; $n = 327$, $\omega = 34,243$.

ist gleich der von den wirkenden Kräften geleisteten mechanischen Arbeit.

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v_1^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma A = \Sigma X dx + \Sigma Y dy + \Sigma Z dz.$$

(Vergl. S. 193: Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft.)

B. Bewegung eines materiellen Punktes.

Die bei der Bewegung eines materiellen Punktes gültigen Sätze sind bereits unter A., bezw. unter I. Geometrische Bewegungslehre erledigt.

a. Geradlinige Bewegung.

Soll ein materieller Punkt sich in einer Geraden bewegen, so müssen die auf den Punkt wirkenden Kräfte eine Mittelkraft P in Richtung der Geraden ergeben.

Ist in jeder Lage des materiellen Punktes die Kraft P als Funktion des Weges, der Geschwindigkeit oder der Zeit bekannt, so ergiebt sich aus der Beziehung:

$$p = \frac{P}{m}$$

die Beschleunigung, mittelst welcher, wie u. I., S. 138 angegeben, die einzelnen Gröfsen gefunden werden können.

Beispiele für die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes.

1. Fall mit Rücksicht auf den Luftwiderstand.

Unter der Annahme, der Luftwiderstand W sei dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional*) ($W = mg\, v^2 : k^2$, worin k diejenige Geschwindigkeit bedeutet, für welche $W = G = mg$ wird), ergiebt sich:

1) für den Fall eines Körpers aus der Höhe h:

die Endgeschwindigkeit: $$v = k\sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}}$$

und die Falldauer: $$t = \frac{k}{g}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{v}{k} = \frac{k}{g}\ln\left\{e^{\frac{gh}{k^2}} + \sqrt{e^{\frac{2gh}{k^2}} - 1}\right\}$$
$$= \frac{k}{g}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{gh}{k^2} + \mathfrak{Sin}\,\frac{gh}{k^2}\right);$$

2) wenn ein Körper mit der Geschwindigkeit c nach oben geworfen wird:

die Steighöhe: $$h_1 = \frac{k^2}{2g}\ln\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right)$$

und die Steigdauer: $$t_1 = \frac{k}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k};$$

---

*) Vergl. u. VII. Mechanik der Gase u. Dämpfe. F.

kommt er in derselben Wagerechten wieder an, so besitzt er die Endgeschwindigkeit: $v_1 = \dfrac{c}{\sqrt{1+\dfrac{c^2}{k^2}}}$.

Die Geschwindigkeit k in m i. d. Sek. ergiebt sich aus der Formel:

$$k^2 = \frac{2 g^2 m}{\zeta \gamma F} = \frac{2 g G}{\zeta \gamma F}$$ (vergl. VII. Mechanik der Gase und Dämpfe, F.),

worin F die senkrecht zur Bewegungsrichtung genommene gröfste Querschnittsfläche des Körpers in qm,
γ das Gewicht von 1 cbm Luft (= 1,293 kg),
m die Masse des Körpers, G das Gewicht in kg,
ζ einen von der Gestalt des Körpers abhängigen Erfahrungskoefficienten, (für kugelförmige Körper = 0,5) bedeuten.

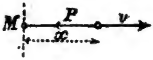
Für eine Eisenkugel vom Halbmesser r (in m) wird z. B.

$$k = 550 \sqrt{r} \text{ m i. d. Sek.}$$

2. Geradlinige Schwingung.

Bewegung eines materiellen Punktes unter Einwirkung einer Kraft, welche dem Abstande von einem festen Anziehungsmittelpunkte M (s. Abbild. 119) proportional ist.

Abbild. 119.



Im Abstande x von M sei $P = cx$, die Geschwindigkeit im Punkte $M = v_m$. Dann folgt für die Geschwindigkeit v (nach S. 177. 7.).

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_m^2}{2} = \int_0^x - P \, . \, dx = - \int_0^x c x \, . \, dx = \frac{- c x^2}{2}.$$

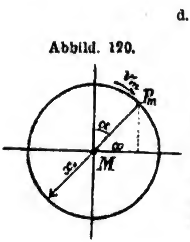
Hieraus ergiebt sich: $v = \sqrt{v_m^2 - \dfrac{c}{m} x^2}$.

Für $x_0 = \sqrt{\dfrac{m}{c}} \, v_m$ wird $v = 0$, der Punkt kehrt um (x_0 = Schwingungsweite).

Mit x_0 wird $v = v_m \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2} = \dfrac{dx}{dt}$, hieraus $dt = \dfrac{dx}{v_m \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2}}$

d. i.: $t = \dfrac{x_0}{v_m} \arcsin \dfrac{x}{x_0}$ oder:

Abbild. 120.



$$x = x_0 \sin \frac{v_m t}{x_0}.$$

Beschreibt man um M mit x_0 einen Kreis (Abbild. 120) und läfst einen Punkt P_m dessen Umfang mit konstanter Geschwindigkeit v_m durchlaufen, so beschreibt der Halbmesser in der Zeit t den Winkel $\alpha = \dfrac{v_m t}{x_0}$; daher ist die Schwingungsbewegung als Projektion einer Kreisbewegung aufzufassen.

Die Schwingungsdauer T (Hin- oder Rückgang) ist

$$T = \frac{x_0}{v_m} \pi = \pi \sqrt{\frac{m}{c}} \text{ (also von } x_0 \text{ unabhängig).}$$

b. Freie krummlinige Bewegung.

1. Der materielle Punkt von der Masse m besitze zur Zeit t die Koordinaten x, y, z und die Geschwindigkeit v mit den Komponenten nach den drei Achsen v_x, v_y und v_z. Die Mittelkraft der angreifenden Kräfte sei P, ihre Seitenkräfte nach den drei Achsen seien X, Y, Z.

X erteilt m nach der Richtung der x-Achse die Beschleunigung:

$$p_x = \frac{X}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

desgl. Y nach der y-Achse: $$p_y = \frac{Y}{m} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

" Z " " z-Achse: $$p_z = \frac{Z}{m} = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen die Bewegung des Punktes nach den drei Achsenrichtungen. (Für die Bewegung in einer Ebene, der xy-Ebene, fällt die dritte Gleichung fort.)

Zerlegt man P nach der Tangente der Bahn und nach der Hauptnormale in:

P_t = Tangentialkraft und **P_n = Normal- oder Centripetalkraft,**

so erteilt P_t der Masse die Tangentialbeschleunigung:

$$p_t = \frac{P_t}{m} = \frac{dv}{dt},$$

und P_n die Normalbeschleunigung:

$$p_n = \frac{P_n}{m} = \frac{v^2}{\varrho} \quad (\varrho = \text{Krümmungshalbmesser der Bahn}).$$

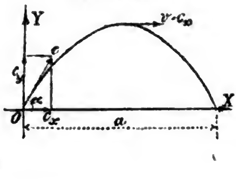
Beispiele für die freie krummlinige Bewegung eines materiellen Punktes.

1. Wurfbewegung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Vom Punkte O aus (Abbild. 121) wird ein materieller Punkt unter dem Winkel α gegen die Wagerechte OX mit der Anfangsgeschwindigkeit c aufwärts geworfen. Der Punkt beschreibt eine Parabel mit lotrechter Achse, deren Scheitelgleichung:

$$x^2 = 2\frac{c_x^2}{g}y = 2\frac{(c\cos\alpha)^2}{g}y.$$

Abbild. 121.



Bewegungsgleichungen:

$$p_x = 0; \quad v_x = c_x; \quad x = c_x t.$$

$$p_y = -g; \; v_y = c_y - gt; \; y = c_y t - \frac{gt^2}{2}.$$

Aus den beiden Gleichungen für x und y folgt durch Elimination von t die Gleichung der Parabel. Geschwindigkeit v zur Zeit t:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 - 2c_y gt + g^2t^2}.$$

Nach S. 177 u. 178 findet sich v aus:

$$\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mc^2 = -mgy \text{ zu } v = \sqrt{c^2 - 2gy}.$$

Für den **Scheitelpunkt** ist $v'_y = c_y - gt' = 0$, daher $t' = \frac{c_y}{g}$;

$$x' = \frac{c_x c_y}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}; \qquad y' = \frac{c_y^{\,2}}{2g} = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Die Wurfweite a wird ein Maximum für $\alpha = 45^0$:

$$a = \frac{c^2}{g}.$$

Soll in der Entfernung a ein Punkt getroffen werden, so mache man

$$\sin 2\alpha = \frac{ga}{c^2}.$$

2. Wurfbewegung mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Bezeichnungen wie unter 1. Ueber die Größe k s. S. 180.

Vorausgesetzt ist ein so kleiner Winkel α, daſs für den Bogen näherungsweise die wagerechte Projektion gesetzt werden kann.

Zur Zeit t ist in diesem Falle:

$$x = \frac{k^2}{g} \ln\left(1 + \frac{gc_x}{k^2} t\right); \qquad t = \frac{k^2}{gc_x}\left(e^{\frac{gx}{k^2}} - 1\right).$$

$$y = x\left\{\operatorname{tg}\alpha + \frac{k^2}{2c_x^2}\right\} - \frac{k^4}{gc_x^2}\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right).$$

Für den Scheitelpunkt ist:

$$x' = \frac{k^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{c_x c_y}{2k^2}\right) \quad (t' \text{ und } y' \text{ wie oben}).$$

Die Wurfweite a wird erreicht mit einem Winkel α, welcher sich bestimmt aus:

$$\sin 2\alpha = \frac{k^4}{2gc^2 a}\left(e^{\frac{2ga}{k^2}} - \frac{2g}{k^2} a - 1\right).$$

2. Potential- oder Kräftefunktionen.

Wenn die Seitenkräfte X, Y, Z der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kraft nach den drei Koordinatenachsen solche Funktionen der Koordinaten x, y, z sind, daſs sie sich als die partiellen Ableitungen einer Funktion $U = f(x, y, z)$ nach x, y, z darstellen lassen, wenn also

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

geschrieben werden kann, so nennt man die Funktion U die **Potential- oder Kräftefunktion.**

Die bei einer beliebigen Verschiebung geleistete Arbeit A ergiebt sich damit

$$A = \int dA = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} (X dx + Y dy + Z dz) = \int_{U_0}^{U_1} dU = U_1 - U_0,$$

oder nach S. 177 u. 178 die Zunahme an Arbeitsvermögen:

$$\tfrac{1}{2} m v_1^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = U_1 - U_0.$$

Der Bedingung $U = f(x, y, z) = U_1$ bezw. $U = U_0$ entspricht je eine Fläche, eine **Niveaufläche** oder **Fläche gleichen Potentials.** Bei der Verschiebung des materiellen Punktes von einer Fläche nach der anderen auf beliebigem Wege wird stets dieselbe Arbeit geleistet bezw. das gleiche Arbeitsvermögen gewonnen. So lange der Punkt in derselben Niveaufläche bleibt, behält er dieselbe Geschwindigkeit bei, bei seiner Verschiebung ist keine Arbeit erforderlich. Die in einem Punkte wirksame Kraft ist stets senkrecht zu der Niveaufläche. Die Seitenkraft nach einer beliebigen Richtung ist gleich der partiellen Ableitung von U nach dieser Richtung.

Eine Potentialfunktion besteht z. B. immer, wenn die wirkende Kraft eine anziehende oder abstofsende Kraft ist, welche von einem festen Punkte O ausgeht und eine Funktion des Abstandes r von diesem Punkte ist.

Bedeutet $P = f(r)$ die nach O gerichtete Kraft, so ist:

$$U = \int f(r)\, dr.$$

Eine Potentialfunktion besteht auch dann, wenn die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft P die Mittelkraft mehrerer Kräfte P_1, P_2 .... ist, von denen jede von einem festen Punkte ausgeht und eine Funktion des Abstandes von diesem Punkte ist.

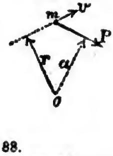
Beispiel: Für einen aufserhalb der Erdkugel im Abstande x vom Erdmittelpunkte befindlichen materiellen Punkt von der Masse m ist

$$U = \frac{m g r^2}{x} \quad (r = \text{Erdhalbmesser}).$$

8. Princip der Flächen.*)

Bewegt sich ein materieller Punkt in einer Ebene (Abbild. 122), so ist in jedem Augenblicke das statische Moment der auf die Masse m wirkenden Kraft P bezogen auf einen beliebigen Punkt O der Ebene gleich der Geschwindigkeit, mit welcher das statische Moment**) der Bewegungsgröfse wächst:

Abbild. 122.



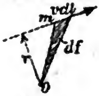
$$Pa = \frac{d(mvr)}{dt}.$$

*) Die Erweiterung dieses Princips auf ein Massensystem s. S. 188.

**) Die auf S. 159 u. f. gegebenen Erklärungen und Sätze bleiben sinngemäfs bestehen, wenn für Kraft überall Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Bewegungsgröfse gesetzt wird.

Bezeichnet man mit f (Abbild. 123) die vom Fahrstrahl Om beschriebene Fläche, so ist deren Differential:

Abbild. 123.



$$df = \frac{v\,dt \cdot r}{2}, \quad \text{also } mvr = 2m\frac{df}{dt} \text{ und}$$

$$\frac{d\,(mvr)}{dt} = 2m\frac{d^2f}{dt^2}.$$

$\frac{df}{dt}$ heifst **Flächengeschwindigkeit**,

$\frac{d^2f}{dt^2}$ **Flächenbeschleunigung**.

Der obige Satz lautet demnach:

$$Pa = 2\,m\frac{d^2f}{dt^2}, \text{ oder:}$$

Das statische Moment der Kraft ist gleich der Flächenbeschleunigung multipliziert mit $2\,m$.

Für eine **Centralbewegung**, für welche die Kraft durch einen festen Punkt O geht, ist, bezogen auf diesen Punkt, $a = 0$ und daher

$$Pa = 2m\frac{d^2f}{dt^2} = 0 \text{ d. h. } \frac{d^2f}{dt^2} = 0;$$

die Flächenbeschleunigung ist gleich Null, die Flächengeschwindigkeit konstant; in gleichen Zeiten beschreibt der Fahrstrahl gleiche Flächen. (Für die Planetenbewegung stellt dieser Satz das erste Keplersche Gesetz dar.)

c. Unfreie Bewegung eines materiellen Punktes.

1. Bewegung eines Punktes, der an eine Kurve gebunden ist.

Die Aufgabe ist auf diejenige unter **b.** zurückgeführt, wenn man den Widerstand der Bahn als äufsere Kraft zu den wirksamen Kräften hinzufügt. Der Bahnwiderstand läfst sich in zwei Seitenkräfte, N senkrecht zur Bahn und N_t tangential zu ihr zerlegen. N_t ist entweder gleich Null (Führung in der Kurve durch einen Mechanismus) oder (bei Führung auf materieller Bahn) abhängig von dem Normalwiderstand N der Bahn und zwar diesem proportional

$$N_t = \mu N.$$

(S. u. IV. Techn. Mechanik, S. 198.)

Der Normalwiderstand N findet sich wie folgt: Man zerlege die Kraft P, welche gegen die Bahntangente unter dem Winkel φ geneigt sei, nach der Bahntangente und normal dazu in $P_1 = P\cos\varphi$ und $P_2 = P\sin\varphi$. N mufs dann mit P_2 eine Mittelkraft ergeben, welche in die Richtung des Krümmungshalbmessers ϱ der Bahn fällt und gleich ist der **Centripetalkraft**

$$P_n = m\frac{v^2}{\varrho}.$$

Kennt man N, so ergiebt sich die Tangentialkraft:

$$P_t = mp_t = m\frac{dv}{dt} = P_1 - N_t = P_1 - \mu N = P\cos\varphi - \mu N.$$

Ist $N_t = 0$, so ergiebt sich unmittelbar:

$$P_t = mp_t = P\cos\varphi.$$

Zur Bestimmung der Bewegung bedarf es dann der vorherigen Ermittlung von N nicht. Unter der Voraussetzung $N_t = 0$ empfiehlt sich die Benutzung der Gleichung S. 179 oben. Diese ergiebt, falls X, Y, Z die Seitenkräfte von P nach den drei Koordinatenachsen sind, die Gleichung:

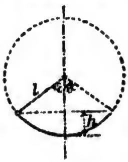
$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

da N keine Arbeit leistet.

Beispiele für die Bewegung eines Punktes auf einer Kurve.

1. Einfaches Kreispendel.

Abbild. 124.



Ein materieller Punkt schwinge an einem gewichtslosen Faden von der Länge l im Kreise, Abbild. 124. Es bedeute:

α den halben Ausschlagwinkel,

h die Steig- bezw. Fallhöhe des schwingenden Punktes, so ist die Schwingungszeit zwischen zwei Durchgängen durch die Lotrechte, d. i. die Dauer einer einfachen Schwingung:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right]$$

oder auch:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2l} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \cdots\right].$$

Bei sehr kleinem α ist annähernd:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

also die Dauer der Schwingung unabhängig von der Gröſse des Ausschlags. Die Länge des Sekundenpendels ist hiernach für 50° nördl. Breite:

$$l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}9938 \text{ m} \doteq 38 \text{ preuſs. Zoll.}$$

Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte ist $v = \sqrt{2gh}$, daher

die Spannung N des Fadens, an welchem die schwingende Masse m hängt, im tiefsten Punkte am gröfsten, u. zw.:

$$N = mg + m\frac{v^2}{l} = mg\frac{l+2h}{l}.$$

Ist $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, so wird die Spannung gleich Null in einer Höhe $\frac{2}{3}(h-l)$ über dem Aufhängungspunkte; ist die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte $\geq \sqrt{5lg}$, so durchläuft die schwingende Masse den ganzen Kreis mit einer den Faden spannenden Kraft N, die im höchsten Kreispunkt ≥ 0, im tiefsten jedoch $\geq 6\,mg$ ist.

2. Beim **Cykloiden-Pendel** bewegt sich der Punkt auf einer Cykloide und es ist die Dauer einer einfachen Schwingung genau:

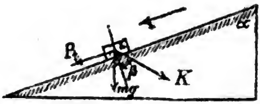
$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

wo r der Halbmesser des erzeugenden Kreises ist. (Vergl. S. 107.) Die Dauer einer Schwingung ist demnach vollständig unabhängig von der Schwingungsweite, daher heifst die Cykloide tautochron.

Die Cykloide hat weiter die Eigenschaft, dafs auf ihr ein Körper in der kürzesten Zeit von einem ihrer Punkte zu einem tiefer gelegenen herabfällt, wenn ihre Grundlinie wagerecht liegt. (Brachystochrone.)

3. **Fall auf schiefer Ebene** (Abbild. 125).

Abbild. 125.



Mit denselben Bezeichnungen wie u. 1. S. 184 ergiebt sich:

$$P_1 = mg\cos\alpha - K\sin\beta$$
$$P_2 = mg\sin\alpha + K\cos\beta.$$

Da wegen der Bewegung auf einer Geraden $P_n = 0$ sein mufs, so ist $N = -P_2 = -(mg\sin\alpha + K\cos\beta)$ und $P_t = P_1 - \mu P_2 = mg\cos\alpha - K\sin\beta - \mu(mg\sin\alpha + K\cos\beta)$.

Daraus folgt die Beschleunigung für die Abwärtsbewegung:

$$p = p_t = \frac{P_t}{m} = g(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \frac{K}{m}(\sin\beta + \mu\cos\beta)$$

und für die Aufwärtsbewegung:

$$p = -g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) + \frac{K}{m}(\sin\beta - \mu\cos\beta).$$

2. Bewegung eines Punktes, der an eine Fläche gebunden ist.

Das Verfahren ist demjenigen unter 1. entsprechend. Zerlege P in P_1 und P_2 nach der Tangentialebene und der Normale zur Fläche. Die Bewegung erfolgt dann in demjenigen Normalschnitt, dessen Ebene durch P_1 und P_2 bestimmt ist. Für ϱ ist der

Krümmungshalbmesser dieses Normalschnittes in Rechnung zu setzen. Im übrigen wie u. 1.

Beispiel. Centrifugalpendel (Kegelpendel). Bezeichnet:

α den Neigungswinkel des Fadens gegen die Lotrechte,
h die Pendelhöhe, d. h. den Abstand des festen Drehpunktes von der Drehebene des Massenpunktes,
r den Halbmesser der kreisförmigen Bahn des letzteren,
v die Geschwindigkeit des Massenpunktes,
m seine Masse,

so ist in der Gleichgewichtslage des Pendels:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{rg}; \qquad h = g\frac{r^2}{v^2};$$

die Dauer eines Umlaufes: $T = 2\pi\frac{r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$,

und die Fadenspannung: $S = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}$.

C. Bewegung eines Systems von Massen.

a. Allgemeine Grundsätze.

Aufser den hier angeführten Grundsätzen gelten alle unter III. A. S. 175 u. f. bereits erledigten Sätze.

1. D'Alemberts Princip.

Mit Hülfe des d'Alembertschen Princips läfst sich jede Aufgabe der Dynamik auf eine statische zurückführen.

Ein System materieller Punkte befinde sich in beliebiger Bewegung. Irgend ein Massenteilchen von der Masse m habe die Koordinaten x, y, z. Unter dem Einflufs sämtlicher Kräfte, sowohl der äufseren als auch der inneren erfährt m eine Beschleunigung, deren Komponenten nach den drei Koordinatenachsen $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$ betragen. Wäre das Massenteilchen frei, so entspräche dieser Beschleunigung eine Kraft, deren Komponenten sein würden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}; \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}; \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Fügt man diese, den Beschleunigungen der einzelnen materiellen Punkte entsprechenden Kräfte in entgegengesetzten Richtungen hinzu, so stehen die letzteren (die Massendrücke) mit den wirklich vorhandenen Kräften im Gleichgewicht.

Bezeichnet man die Seitenkräfte der auf das Massenteilchen einwirkenden Kräfte (ausschliefslich der von den Verbindungen her-

rührenden) nach den drei Achsen mit X, Y, Z, so drückt sich der obige Satz durch die Gleichungen aus:

$$\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0;\ \Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0;\ \Sigma\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0,$$

bezw. mit Hülfe des Princips der virtuellen Verrückungen (s. S. 158):

$$\Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

wenn δx, δy, δz die Koordinatenänderungen bei einer virtuellen Bewegung des Systems bezeichnen. — Diese Gleichung kann als Grundgleichung der Mechanik betrachtet werden, indem sie in allgemeinster Form alle Fälle der Bewegung und des Gleichgewichts eines beliebigen Systems von materiellen Punkten als besondere Fälle einschliefst.

Nennt man die Mittelkräfte aus den wirklich vorhandenen Kräften und den Massendrücken die verlorenen Kräfte, so läfst sich das obige Princip auch wie folgt ausdrücken:

An einem von beliebigen Kräften bewegten Systeme von Massen stehen die verlorenen Kräfte unter Einflufs der Verbindungen fortwährend im Gleichgewicht.

2. Bewegung des Schwerpunktes.

Der Schwerpunkt eines Systems von materiellen Punkten bewegt sich in jedem Augenblicke so, als ob er die Masse des ganzen Systems enthielte und in ihm alle parallel mit sich verschobenen **äufseren** Kräfte angriffen.

Im besonderen folgt hieraus das Gesetz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes:

Der Schwerpunkt eines Systems, auf welchen nur innere Kräfte wirken, bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Befindet sich z. B. der Schwerpunkt in Ruhe, so vermögen innere Kräfte ihn nicht zu verschieben.

3. Princip der Flächen.

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Summe der auf eine beliebige Gerade bezogenen statischen Momente der Bewegungsgröfsen $\Sigma\mathfrak{m}$ zunimmt, ist in jedem Augenblicke gleich der Summe der statischen Momente ΣM der wirkenden (äufseren) Kräfte bezogen auf dieselbe Gerade:

$$\frac{d\Sigma\mathfrak{m}}{dt} = \Sigma M.$$

Gehen im besonderen alle auf ein System wirkenden äufseren Kräfte durch denselben Punkt (oder wirken überhaupt keine äufseren Kräfte), so ist die Summe der statischen Momente der Bewegungs-

größen bezogen auf jede durch diesen Punkt gehende Gerade während der ganzen Bewegung konstant.

Oder in anderer Form:

Wenn man unter obiger Voraussetzung die Flächen, welche die von dem Punkte nach allen materiellen Punkten gezogenen Fahrstrahlen beschreiben, auf eine beliebige Ebene projiziert und einzeln mit der Masse des betreffenden Teilchens multipliziert, so ist die Summe dieser Produkte der während der Bewegung verflossenen Zeit proportional.

Schneiden die sämtlichen Kräfte eine Gerade, so ist die obige Summe nur dann der Zeit proportional, wenn man die Flächen auf eine zur Geraden senkrechte Ebene projiziert.

b. Bewegung eines starren Körpers.

1. Bewegung eines freien Körpers.

Jede Bewegung eines starren Körpers läßt sich, wie bereits S. 145 erörtert, zurückführen: 1) auf eine Drehbewegung um eine Achse und 2) auf eine gleichzeitige fortschreitende Bewegung in der Richtung dieser Achse.

Durch Parallel-Verlegung der Drehachse bis zum Schwerpunkt des Körpers erhält man 1) eine Drehung um eine Schwerachse und 2) eine fortschreitende Bewegung schief zur Drehachse. Diesen beiden Bewegungen entsprechen eine im Schwerpunkte angreifende Einzelkraft und ein um eine Schwerachse drehendes Kräftepaar.

Die Größe der **Beschleunigung p_s des Schwerpunktes** ergiebt sich nach S. 188 zu:

$$p_s = \frac{R}{m},$$

worin R die Mittelkraft aller äußeren Kräfte und m die Gesamtmasse des Körpers bedeutet. Das resultierende Kräftepaar erzeugt eine **Winkelbeschleunigung** $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ um eine Achse, welche mit der Achse des Kräftepaares im allgemeinen einen Winkel bildet und nur dann mit dieser zusammenfällt, wenn die Achse des Kräftepaares eine Trägheitshauptachse*) des Körpers ist. In diesem Falle findet sich:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

worin $\mathfrak{M}$ das resultierende Kräftepaar, J das Trägheitsmoment bezogen auf die Drehachse bedeutet.

Bei allgemeiner Lage des Kräftepaares findet man die Achse der Winkelbeschleunigung, wenn man an das Centralellipsoid parallel zur Ebene des Kräftepaares eine Berührungsebene legt und den

*) S. S. 168.

Berührungspunkt mit dem Schwerpunkte verbindet. Die Verbindungslinie ist dann die gesuchte Achse.

Zerlegt man das Kräftepaar nach den drei Trägheitshauptachsen in L, M, N und sind A, B, C die Hauptträgheitsmomente, so ergiebt sich:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\left(\frac{L}{A}\right)^2 + \left(\frac{M}{B}\right)^2 + \left(\frac{N}{C}\right)^2}.$$

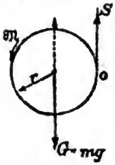
(Ueber die Gröfse des Arbeitsvermögens eines beliebig sich bewegenden Körpers s. S. 175.)

Beispiele.

1. Um einen Cylinder von der Masse m und dem Halbmesser r (Abbild. 126) ist ein Faden geschlungen; unter dem Einflufs der Schwere rollt der Cylinder herab. Fadenspannung $= S$.

Im Schwerpunkte greift die Mittelkraft $R = G - S$ an, der Versetzung von S nach dem Schwerpunkte entspricht ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = rS$. Hieraus folgt:

Abbild. 126.



die Beschleunigung des Schwerpunktes $p_s = \frac{R}{m}$

und die Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{rS}{m\frac{r^2}{2}} = \frac{2S}{rm}$.

Soll Rollen um O stattfinden, so mufs O in Ruhe sein, d. h.

$p_s t - r\varepsilon t = 0$ oder $\frac{R}{m} = r\frac{2S}{rm}$ d. h. $R = 2S$ sein; hieraus:

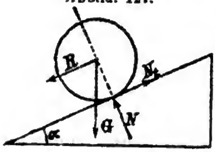
$$S = \tfrac{1}{3}G; \quad R = \tfrac{2}{3}G; \quad p_s = \frac{2}{3}\frac{G}{m} = \frac{2}{3}g; \quad \varepsilon = \frac{2}{3}\frac{g}{r}.$$

Sinkt der Cylinder um h, so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes am Schlusse $v_1 = \sqrt{2p_s h} = \sqrt{2\tfrac{2}{3}gh}$, die Zeitdauer des Herabsinkens $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{p_s}} = \sqrt{\frac{3h}{g}}$, die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \varepsilon t_1 = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{h}{3g}}$ und das Arbeitsvermögen:

$$Gh = \frac{v_1^2}{2}m + \frac{\omega_1^2}{2}J = \frac{2}{3}ghm + \frac{1}{2}\,\frac{4}{r^2}\,\frac{h}{3g}\,\frac{mr^2}{2} = mgh.$$

2. Ein Cylinder von der Masse m rollt eine schiefe Ebene herunter (Abbild. 127). Normalwiderstand der Bahn $= N$, tangentialer Bahnwiderstand $= N_t$. Es ist $N = G\cos\alpha$, $N_t \gtreqless \mu N$. (Vergl. S. 198.)

Abbild. 127.



$$R = G\sin\alpha - N_t; \qquad \mathfrak{M} = N_t r;$$

$$p_s = \frac{G\sin\alpha - N_t}{m} = g\sin\alpha - \frac{N_t}{m};$$

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{2N_t r}{mr^2} = \frac{2N_t}{mr}.$$

Fall I. Für den Stützpunkt mufs, so lange reines Rollen stattfinden soll:

$p_s t - \varepsilon r t = 0$ sein, d. i. $g\sin\alpha - \frac{N_t}{m} = \frac{2N_t}{mr}r = \frac{2N_t}{m}$;

$$N_t = \tfrac{1}{3}G\sin\alpha; \text{ oder}$$

$$N_t = \tfrac{1}{3}G\sin\alpha < \mu N = \mu G\cos\alpha \text{ d. i. } \operatorname{tg}\alpha < 3\mu.$$

Dann wird:

$$R = \frac{2}{3}\,G\sin\alpha;\qquad p_s = \frac{2}{3}\,g\sin\alpha \quad\text{und}\quad \varepsilon = \frac{2}{3}\,\frac{g\sin\alpha}{r},$$

Fall II. Ist $\operatorname{tg}\alpha > 3\mu$, so erfolgt gleichzeitiges Rollen und Gleiten.
Es wird $N_t = \mu N = \mu G\cos\alpha;\qquad R = G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha.$

$$p_s = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);\qquad \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{2\mu G\cos\alpha}{mr} = \frac{2\mu g\cos\alpha}{r}.$$

Für die Bewegung eines Cylinders auf wagerechter Bahn ($\alpha = 0$) lautet die Bedingung reinen Rollens: Zugkraft $Z < 3\mu G$.

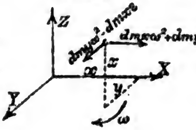
2. Bewegung eines Körpers um einen festen Drehpunkt.

Man versetze die angreifenden Kräfte nach dem festen Punkte. Die resultierende Einzelkraft wird dort von dem Widerstande des Stützpunktes im Gleichgewicht gehalten. Das resultierende Kräftepaar, welches durch die Verschiebung der Kräfte entsteht, erzeugt eine Winkelbeschleunigung ε, deren Achse und Gröfse genau wie u. 1. bestimmt werden kann; an Stelle der Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt treten diejenigen für den festen Punkt.

3. Bewegung eines Körpers um eine feste Drehachse.

Die z-Achse des Koordinatensystems (Abbild. 128) sei die Drehachse. Zu einer Zeit t sei die Winkelgeschwindigkeit ω, die Winkelbeschleunigung ε. Zerlegt man das nach Verlegung der äufseren Kräfte in den Koordinatenanfangspunkt resultierende Kräftepaar $\mathfrak{M}$ in ein solches $\mathfrak{M}_1$, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse steht und ein zweites $\mathfrak{M}_2$, dessen Ebene durch die Achse geht, so bringt allein $\mathfrak{M}_1$ die Winkelbeschleunigung: $\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}_1}{J}$ hervor. Das zweite Kräftepaar $\mathfrak{M}_2$ erzeugt lediglich Pressungen auf die Drehachse, ebenso wie die Seitenkräfte X, Y, Z der äufseren Kräfte nach den drei Achsen.

Abbild. 128.



Die von den Lagern auf die Achse in Richtung der drei Koordinatenachsen auszuübenden Pressungen ergeben sich mit Benutzung des d'Alembertschen Princips zu:

$$X_0 = X + \omega^2\!\int dm\cdot x + \varepsilon\!\int dm\cdot y = X + \omega^2 m x_0 + \varepsilon m y_0;$$
$$Y_0 = Y + \omega^2\!\int dm\cdot y - \varepsilon\!\int dm\cdot x = Y + \omega^2 m y_0 - \varepsilon m x_0;$$
$$Z_0 = Z.$$

(m die ganze Masse, x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes.)

X_0 und Y_0 schneiden die Drehachse in einem Abstande z_1 bezw. z_2 vom Koordinatenanfangspunkt:

$$z_1 = \frac{1}{X_0}\left[M + \omega^2\!\int xz\,dm + \varepsilon\!\int yz\,dm\right],$$
$$z_2 = \frac{1}{Y_0}\left[L + \omega^2\!\int yz\,dm - \varepsilon\!\int xz\,dm\right],$$

worin M und L die Momente der äufseren Kräfte bezogen auf die y- und x-Achse bedeuten.

Geht die Drehachse durch den Schwerpunkt, so fallen die Glieder mit x_0 und y_0 fort; ist die Drehachse eine Trägheitshauptachse des Körpers, so sind die Integrale gleich Null, und sind aufserdem die äufseren Kräfte gleich Null, d. h. bewegt sich der Körper nur vermöge der Trägheit, so sind X und Y gleich Null und die Achse ist eine freie Achse.

Beispiel.

Das **physische Pendel** (vergl. S. 185). Das Pendel besitzt dieselbe Schwingungsdauer wie ein einfaches Pendel, dessen Länge

$$l = \frac{J}{m e},$$

wobei J das Trägheitsmoment der schwingenden Masse m in bezug auf die Drehachse und e den Schwerpunktsabstand der Masse von der Drehachse bedeutet. — Die Gerade, welche durch den Reduktionspunkt (Schwingungsmittelpunkt) im Abstande l von der Aufhängungsachse parallel dieser gedacht wird, heifst Schwingungsachse.

Die Beziehungen zwischen Aufhängungs- und Schwingungsachse sind reciprok, d. h. die Schwingungszeit ist dieselbe, mag man das Pendel in der einen oder anderen von beiden aufhängen. — Der Schwerpunkt des Körpers liegt stets zwischen Aufhängungs- und Schwingungsachse.

Man benutzt das physische Pendel zur **Bestimmung des Trägheitsmomentes** von unregelmäfsig zusammengesetzten Körpern oder Querschnitten. Bezeichnet man hierzu mit n die Anzahl der einfachen Schwingungen i. d. Min., so ist das auf die Drehachse bezogene Trägheitsmoment eines solchen Körpers oder Querschnitts:

$$J = g \frac{60^2}{\pi^2} \frac{m e}{n^2} = \psi \frac{m e}{n^2}.$$

Bezieht man das Trägheitsmoment auf die Schwerachse, so wird daraus:

$$J_s = \psi \frac{m e}{n^2} - m e^2.$$

Hierin ist für **cm** als Einheit: $\psi = 357830$.

Das Trägheitsmoment sich drehender Maschinenteile (Trommeln, Riemenscheiben, Schwungräder) bestimmt man nach Kohn*) besser, wie folgt.

Man lege um den Körper ein Band, belaste die beiden Enden durch verschiedene Gewichte G_1 und G_2, beobachte für eine Zeitdauer t die von beiden Gewichten zurückgelegten Wegstrecken s, mache einen zweiten Versuch, indem man von G_1 ein Gewicht a fortnimmt und zu G_2 legt und erhält für t den Weg s_1. Dann ist das Trägheitsmoment:

$$J = \left[\frac{t^2 a}{s_1 - s} - \frac{G_1 + G_2}{g}\right] r^2,$$

wenn r den äufseren Halbmesser der Trommel u. s. w. bedeutet.

*) Civilingenieur, 1890 S. 525.

c. Bewegung eines Systems materieller Punkte.

Die allgemeinen Sätze s. S. 174 u. f. und S. 187 u. f.

Das gesamte **Arbeitsvermögen** eines Systems von Massen setzt sich zusammen aus dem Arbeitsvermögen, welches der Schwerpunktsbewegung entspricht, und dem Arbeitsvermögen, welches der relativen Bewegung, bezogen auf den Schwerpunkt, entspricht. Wirken auf das System nur innere Kräfte ein, so bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig, bezw. er bleibt in Ruhe, wenn er anfangs in Ruhe war. Besteht für die inneren Kräfte eine Potentialfunktion U, wie es z. B. der Fall ist, wenn alle inneren Kräfte als abstofsende oder anziehende Kräfte nur Funktionen des Ortes sind, so gilt für die Aenderung des Arbeitsvermögens die Gleichung:

$$\Sigma \frac{m c_1^2}{2} - \Sigma \frac{m c_0^2}{2} = U_1 - U_0.$$

Kehren alle Massen wieder in ihre Anfangslage zurück, so wird $U_1 = U_0$, d. h.:

$$\Sigma \frac{m c_1^2}{2} = \Sigma \frac{m c_0^2}{2};$$

es nimmt auch das Arbeitsvermögen wieder den ursprünglichen Wert an.

(Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft oder Energie.)

D. Der Stofs.

Diejenige gerade Linie, welche zur gemeinsamen Berührungsebene zweier sich stofsenden Körper im Berührungspunkte senkrecht gedacht wird, nennt man Stofslinie.

Befinden sich die Schwerpunkte der Körper in dieser Linie, so heifst der Stofs ein **centrischer** oder **Centralstofs**, im anderen Falle ein **excentrischer Stofs**. Sind die Bewegungsrichtungen beider Schwerpunkte mit der Stofslinie parallel, so heifst der Stofs **gerade**, im anderen Falle **schief**.

a. Gerader, centrischer Stofs.

Zwei Massen M_1 und M_2 mit den gleich gerichteten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 treffen auf einander. Zwischen v_1 und v_2 und den Geschwindigkeiten nach dem Stofse, c_1 und c_2, besteht dann die Beziehung: $M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2$.

1. Vollkommen unelastischer Stofs.

Die beiden Massen bewegen sich nach dem Stofs mit der gemeinsamen Geschwindigkeit:

$$c = c_1 = c_2 = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}.$$

Der Verlust an Arbeitsvermögen beträgt

$$L = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2)^2.$$

2. Vollkommen elastischer Stofs.

Der Arbeitsverlust ist gleich Null. Die Geschwindigkeiten nach dem Stofse betragen:

$$c_1 = \frac{(M_1 - M_2) v_1 + 2 M_2 v_2}{M_1 + M_2}; \qquad c_2 = \frac{(M_2 - M_1) v_2 + 2 M_1 v_1}{M_1 + M_2}.$$

Für $v_2 = 0$ wird:

$$c_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} v_1; \qquad c_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} v_1$$

Ist $M_1 = M_2$, so wird $c_1 = v_2$, $c_2 = v_1$.

3. Unvollkommen elastischer Stofs.

Beträgt für beide Körper der Elasticitätskoefficient α, so ist:

$$c_1 = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2 - M_2 (v_1 - v_2) \sqrt{\alpha}}{M_1 + M_2},$$

$$c_2 = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2 + M_1 (v_1 - v_2) \sqrt{\alpha}}{M_1 + M_2},$$

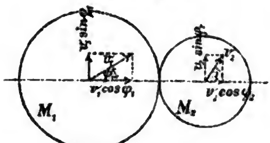
$$L = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - \alpha).$$

Der Elasticitätskoefficient α findet sich $\alpha = h_1 : h$, worin h_1 diejenige Höhe bezeichnet, bis zu welcher eine Kugel aus dem betreffenden Stoff zurückprallt, wenn man sie aus der Höhe h niederfallen läfst. Die Gröfse von α hängt wesentlich ab von der Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel auftrifft, d. h. von h. Im Mittel ist für Elfenbein $\alpha = (\frac{8}{9})^2$, für Stahl und Kork $\alpha = (\frac{5}{9})^2$, für Glas $\alpha = (\frac{15}{16})^2$.

b. Schiefer, centrischer Stofs.

Man zerlege v_1 und v_2 in die Geschwindigkeiten $v'_1 = v_1 \cos \varphi_1$ und $v''_1 = v_1 \sin \varphi_1$ bezw. $v'_2 = v_2 \cos \varphi_2$ und $v''_2 = v_2 \sin \varphi_2$ nach der Richtung der Stofslinie und senkrecht dazu. Die beiden letzteren Geschwindigkeiten v''_1 und v''_2 bleiben, falls von der Reibung abgesehen wird, ungeändert; v'_1 und v'_2 ändern sich nach den Regeln des geraden, centrischen Stofses in c'_1 und c'_2; c'_1 und c'_2 ergeben mit v''_1 bezw. v''_2 die Geschwindigkeiten nach dem Stofse.

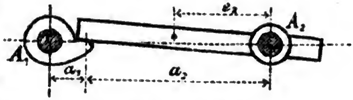
Abbild. 129.



c. Gerader, excentrischer Stofs.

Zwei um parallele Achsen A_1 und A_2 (Abbild. 180) sich drehende Körper treffen mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zusammen.

Abbild. 180.



Die Trägheitsmomente der beiden Körper, bezogen auf die Drehachsen, seien $m_1 k_1^2$ bezw. $m_2 k_2^2$. Es gelten alsdann die Formeln für den geraden centrischen Stofs (s. S. 193), wenn man statt der Massen die auf den Stofspunkt reduzierten Massen

$$\frac{m_1 k_1^2}{a_1^2} \text{ bezw. } \frac{m_2 k_2^2}{a_2^2}$$

einführt. Soll die Stofswirkung auf eine Achse z. B. A_2 vermieden werden, so müssen Stofspunkt und Drehpunkt A_2 in derselben Beziehung zu einander stehen, wie Schwingungsmittelpunkt und Aufhängungspunkt beim physischen Pendel (s. S. 192), d. h. es mufs $a_2 = \frac{k_2^2}{e_2}$ sein, wenn e_2 den Schwerpunktsabstand von der Drehachse bedeutet.

d. Schiefer, excentrischer Stofs.

Man zerlege, wie unter **b.**, die Geschwindigkeiten nach der Stofslinie und senkrecht dazu. Nur die ersteren beiden Komponenten sind bei der Benutzung der Formeln unter **c.** in Rechnung zu setzen.

Beispiele für den vollkommen unelastischen Stofs.

1. Einrammen von Pfählen. *)

Bedeutet Q das Gewicht des Rammbärs in kg,
q " " " Pfahls in kg,
h die Fallhöhe des Rammbärs in m,
s die Strecke, um welche der Pfahl beim letzten Schlage eindringt, in m,
W den Widerstand auf dem Wege s in kg,

so ergiebt sich $W = Q + q + \frac{h}{s} \frac{Q^2}{Q + q}$.

Die gröfste zulässige Belastung P des Pfahls ist $P = W : n$, wobei n etwa $= 4$ zu setzen ist.

Der Arbeitsverlust bei einem Schlage beträgt:

$$L = \frac{Qq}{Q + q} h = \frac{q}{Q + q} Q h,$$

ist also bei einer bestimmten, aufgewandten Arbeit Qh um so kleiner, je gröfser Q im Verhältnis zu q ist.

*) Praktische Angaben s. Abschnitt Hochbau. H. Gründungen.

2. Wirkung der Fallhämmer.

Bedeutet Q das Hammergewicht in kg, q das Gewicht von Ambos und Schmiedestück in kg, so ergiebt sich der Widerstand gegen das Zusammenpressen W in kg, bei einer Zusammendrückung s und der Fallhöhe h, beides in m:

$$W = \frac{q}{Q+q} \frac{Qh}{s}.$$

Die nützlich geleistete Formänderungsarbeit ist also um so gröfser, je kleiner Q im Verhältnis zu q ist.

IV. TECHNISCHE MECHANIK.

A. Widerstandskräfte.

a. Widerstände fester Stützpunkte.

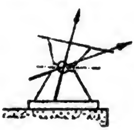
Die Widerstände fester Stützen (Stützendrücke, Reaktionen), die bei der Untersuchung des Gleichgewichtes als äufsere Kräfte zu behandeln sind, treten in der Regel als Unbekannte auf. Genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Stützendrücke, so heifst das System **statisch bestimmt**, im anderen Falle **statisch unbestimmt**; es können die Stützendrücke alsdann nur mit Hülfe von Bedingungen, welche sich aus der elastischen Formänderung des Körpers ergeben, gefunden werden.

Die Art der Lagerung bestimmt entweder:

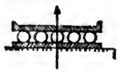
1) nur den Angriffspunkt des Stützendruckes (nicht Richtung); gesucht Gröfse und Richtung, entsprechend zwei Bedingungen.

Beispiel: Kipplager (Abbild. 131);

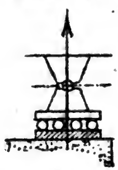
Abbild. 131.



Abbild. 132.



Abbild. 133.



2) oder nur die Richtung (nicht den Angriffspunkt); gesucht Angriffspunkt und Gröfse, entsprechend zwei Bedingungen.

Beispiel: Rollenlager (Abbild. 132);

3) oder Angriffspunkt und Richtung; gesucht Gröfse, entsprechend einer Bedingung.

Beispiel: Rollenkipplager (Abbild. 133).

4) oder endlich weder Angriffspunkt noch Richtung, entsprechend drei Bedingungen.

1. Ein fester Stützpunkt.

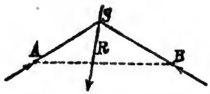
Die Bedingung des Gleichgewichtes ist erfüllt, wenn die Mittelkraft der äufseren Kräfte durch den festen Punkt geht. Nur möglich durch eine Lagerung wie unter 1). Der Gegendruck der Stütze ist gleich der Mittelkraft, jedoch entgegengesetzt gerichtet. Das Gleichgewicht heifst **stabil** oder **labil**, je nachdem das bei einer Aenderung der Lage des Körpers entstehende Kräftepaar den Körper in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückzuführen oder weiter daraus zu entfernen sucht; es heifst **indifferent**, wenn die neue Lage ebenfalls eine Gleichgewichtslage ist.

2. Zwei feste Stützpunkte.

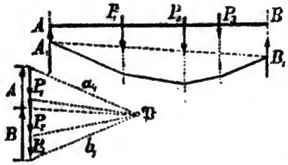
Gleichgewicht nur möglich, wenn die Mittelkraft R der äufseren Kräfte durch die Verbindungslinie der beiden Stützpunkte geht.

Die Stützendrücke A und B müssen sich in R schneiden (Abbild. 134). A und B sind bestimmt, so bald der Schnittpunkt S auf R durch die Art der Lagerung festgestellt ist; z. B. wenn die Richtung von A oder B gegeben, oder wenn A und B parallel zu

Abbild. 134.



Abbild. 135.



R sind. Im letzteren Falle ergeben sich A und B mit Hülfe der statischen Momente (s. S. 160) oder eines Kräfte- und Seilpolygons (Abbild. 135), indem man zur Schlufslinie $A_1 B_1$, der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Stützendruckrichtungen mit den beiden Seilpolygonlinien, welche den äufsersten, die Mittelkraft einschliefsenden Polstrahlen a_1 und b_1 parallel sind, im Kräfteplan durch den Pol $\mathfrak{P}$ eine Parallele zieht.

Diese zerlegt die Mittelkraft R $(= \Sigma P)$ in A und B.

3. Drei feste Stützpunkte.

Gleichgewicht findet stets statt, wenn die drei Lagerungen im ganzen sechs Bedingungen entsprechen; z. B. für drei Stützen, welche nur den Angriffspunkt bestimmen.

4. Bei Stützung in mehr als drei Punkten

sind die Stützendrücke nicht statisch bestimmbar. Die durch die äufsersten Stützpunkte gelegten Geraden sind Dreh- oder Kippkanten. Die Stabilität ist gesichert, sobald die Mittelkraft der angreifenden Kräfte innerhalb der durch die Drehkanten begrenzten Fläche bleibt. Die Stabilität, bezogen auf eine Kippkante, ist um so gröfser, je gröfser das statische Moment des Körper-Gewichtes, bezogen auf die Drehkante, das sogen. **Stabilitätsmoment,** des Körpers ist. Die zur Ueberführung des Körpers in eine labile Gleichgewichtslage erforderliche Arbeit heifst dynamisches Stabilitätsmoment. Sie beträgt $A = Gh$, wenn der Schwerpunkt des Körpers vom Gewichte G um die Strecke h gehoben werden mufs.

b. Widerstände stützender Flächen.

1. Flächenstützung.

Ein Körper, welcher mit einem zweiten in Berührung ist, vermag auf diesen einen Gegendruck von beliebiger Gröfse auszuüben, dessen Richtung jedoch von der Berührungsnormale beider Flächen höchstens um einen bestimmten Winkel ϱ_0 abweicht. Der Winkel ϱ_0, der **Reibungswinkel der Ruhe** oder **Grenzwinkel der Reibungsstützung,** hängt von der Rauhigkeit der Oberflächen ab. Durch Zerlegung der gesamten Stützkraft in zwei Seitenkräfte nach der Berührungsnormale und der Tangentialebene erhält man die normale und die tangentiale Stützkraft N bezw. N_t, von welchen N_t die Tangential- oder Reibungsstützung bewirkt und, wie aus obigem folgt, stets $\leqq N \operatorname{tg} \varrho_0 \leqq N \mu_0$ ist, wenn mit $\mu_0 = \operatorname{tg} \varrho_0$ der **Koefficient der Reibungsstützung** oder **Reibungskoefficient der Ruhe** bezeichnet wird (s. Tafel S. 199). — Würde die Mittelkraft der äufseren Kräfte um mehr als den Grenzwinkel ϱ_0 von der Normale abweichen, so könnte die Widerstandskraft der stützenden Fläche den Gleichgewichtszustand nicht herbeiführen; die beiden Flächen würden sich relativ zu einander bewegen. Im anderen Falle ist die erweckte Stützkraft stets von der gleichen Gröfse und Richtung wie die angreifende Kraft.

2. Reibungswiderstand.

Findet zwischen zwei Körperoberflächen, welche mit dem Normaldruck N gegen einander geprefst werden, eine Relativbewegung statt, so ist jederzeit ein der stattfindenden Bewegung entgegenwirkender Widerstand, der sogen. **Reibungswiderstand,** zu überwinden.

Berühren sich die Körper in einer endlichen Fläche (z. B. niedere Elementenpaare), so ist die Relativbewegung eine rein gleitende, der Reibungswiderstand die sogen. **gleitende Reibung;** erfolgt die Berührung in einer Linie (z. B. höhere Elementenpaare), so kann die Bewegung sowohl gleitend, wie rollend um die Berührungslinie sein (die letztere Bewegung erzeugt die **rollende** oder **wälzende**

Reibung); bei Berührung in einem Punkte unterscheidet man aufser der gleitenden und rollenden Bewegung noch die praktisch unwichtige bohrende Bewegung um die Normale.

α. Gleitende Reibung.

Die Gröfse des Reibungswiderstandes W ist in erster Linie abhängig von dem Normaldruck N und der Beschaffenheit der Oberflächen, ferner von dem auf die Flächeneinheit ausgeübten Drucke, der Geschwindigkeit der Reibungsbewegung und der Temperatur.

Schreibt man
$$W = \mu N,$$
so heifst μ der **Reibungskoefficient** (der Bewegung).

Die Mittelkraft von W und N bildet mit der Normale stets den Winkel ϱ, den **Reibungswinkel**, für welchen
$$\operatorname{tg} \varrho = \mu.$$

Tafel der Reibungskoefficienten μ und μ_0.

1. Für niedrige Flächendrucke (0,96 bis 1,37 kg f. d. qcm) **nach Morin, Hoppe u. A.** (μ = **konst.**)

Reibende Körper.	Lage der Fasern *).	Reibungskoefficient der Bewegung μ. trocken.	wenig fettig.	geschmiert.	mit Wasser.	Ruhe μ_0. trocken.	wenig fettig.	geschmiert.	mit Wasser.
Metall auf Metall.									
Bronze auf Bronze .	—	0,20	—	—	—	—	—	—	—
Bronze auf Gufseisen	—	0,21	—	—	—	—	—	—	—
„ auf Schweifseisen	—	—	0,16	—	—	—	—	—	—
Gufseisen auf Gufseisen oder Bronze	—	—	0,15	—	0,31	—	0,16	—	—
Schweifseisen a. Gufseisen oder Bronze	—	0,18	—	—	—	0,19	—	—	—
Schweifseisen auf Schweifseisen . . .	—	0,44	—	—	—	—	0,13	—	—
Verschied. Körper.									
Gufseisen auf Eiche .	=	0,49	0,19	(trock. Seife)	0,22	—	—	—	0,65
Schweifseisen a. Eiche	=	—	—	0,08 (Talg)	0,26	—	—	0,11 (Talg)	0,65
Messing auf Eiche .	=	—	—	—	—	0,62	—	—	—
Eiche auf Eiche . . .	=	0,48	—	0,16	(Seife)	0,62	—	0,44	(trock. Seife)
	╫	0,34	—	—	0,25	0,54	—	—	0,71
	⊥	0,19	—	—	—	0,43	—	—	—

*) Es bedeutet =, dafs die Bewegung in der Richtung der Fasern beider Körper, ╫, dafs sie normal gegen die Fasern des gleitenden Körpers erfolgt und ⊥, dafs sich Hirnholz auf Langholz in der Faserrichtung des letzteren bewegt

Reibende Körper.	Lage der Fasern*)	Reibungskoefficient der Bewegung μ. trocken.	wenig fettig.	geschmiert.	mit Wasser.	Ruhe μ_0. trocken	wenig fettig.	geschmiert.	mit Wasser.
Holz a. Eiche (Mittel)	=	0,38	—	—	—	0,53	—	—	—
Rindsleder auf Eiche	Leder flach	—	—	—	—	0,61	—	—	—
	hohe Kante	0,33	—	—	0,29	0,43	—	—	0,79
Lederriemen auf Eichentrommel . .	=	0,27	—	—	—	0,47	—	—	—
— auf Gußeisen . .	flach	0,56	—	—	0,36	0,28	—	—	0,38
Rindsleder als Kolbenliderung	—	—	—	—	—	—	—	0,12 (Oel, Seife)	0,62
Hanfseil auf Eiche .	=	0,52	—	—	—	0,80	—	—	—**)
Schleifstein, mittelhart mit Stahl- und Schweißeisen, Umfangsgeschw. 3 bis 6 m	—	—	—	—	0,8 bis 1,0	—	—	—	—
— hart, Umfangsgeschwind. 6 bis 10 m	—	—	—	—	0,3 bis 0,5	—	—	—	—
Steine oder Ziegel auf Ziegel	—	glatt bearbeitet . . .				0,53—0,73		(trocken)	
Desgl.	—	mit frischem Mörtel . .				0,50—0,70		—	—
Steine auf Schweißeisen	—	—	—	—	—	0,45	—	—	—
Steine auf Hirnholz	—	—	—	—	—	0,64	—	—	—
Steine auf Holz i. Mittel	—	—	—	—	—	0,60	—	—	—
Mauerwerk auf Beton	—	—	—	—	—	0,76	—	—	—
Mauerwerk auf gewachs. Boden . . .	—	trocken und hart . . .				0,65	—	—	—
Desgl.	—	mittel				0,45	—	—	—
Desgl.	—	naß und lettig				0,30	—	—	—
Eiche, Weißbuche u. Pockholz auf poliertem Granit oder poliertem Messing (nach Hoppe) . . .	‡	—	—	—	—	—	—	—	0,53
	=	—	—	—	—	—	—	—	0,49 (Pockholz 0,40)

*) S. vorige Seite. **) Vergl. S. 215.

2. Für höhere Flächendrucke, nach Rennie.

Druck in kg f. d. qcm.	Reibungskoefficienten der Bewegung μ. Schweißeisen auf Schweißeisen.	Gußeisen auf Schweißeisen.	Stahl auf Gußeisen.	Messing auf Gußeisen.	Bemerkung.
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157	Die Oberflächen wurden geschmiert und dann abgewischt, so daſs **keine dazwischen befindliche Schmiere** die innige Berührung hindern konnte.
13,08	0,250	0,275	0,300	0,225	
15,75	0,271	0,292	0,333	0,219	
18,28	0,285	0,321	0,340	0,214	
20,95	0,297	0,329	0,344	0,211	
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215	
26,22	0,350	0,351	0,351	0,206	
27,42	0,376	0,363	0,353	0,205	
31,50	0,395	0,365	0,354	0,208	
34,10	0,403	0,366	0,356	0,221	
36,77	0,409	0,366	0,357	0,223	
39,37	Flächen	0,367	0,358	0,233	
42,18	angegriffen.	0,367	0,359	0,234	
44,58	—	0,367	0,367	0,235	
47,25	—	0,376	0,403	0,233	
49,92	—	0,434	Flächen	0,234	
55,12	—	Flächen	angegriffen.	0,232	
57,65	—	angegriffen.	—	0,273	

Reibungskoefficienten für besondere, praktische Fälle.

1. **Triebwerke** (Zapfenreibung) $\mu = 0,02$.
desgl. (Gesamtreibungswiderstand) $\mu = 0,05$.

2. Eiserne **Radreifen** auf trockenen eisernen **Schienen**, nach Poirée.
(Eisenbahnwagen von 3400 bis 8400 kg Gewicht):

Geschwindigkeit in m i. d. Sek.	4,6	7,3	8,8	14,3	20	22
Reibungskoefficient . μ =	0,209	0,206	0,171	0,145	0,136	0,112

3. Guſseiserne **Bremsklötze** an stählernen **Radreifen**, nach Galton:

Geschwindigkeit in m i. d. Sek.:	Beginn	2,1	4,4	11,1	20,1	26,8
Reibungskoefficient . . . μ =	0,330	0,273	0,242	0,166	0,127	0,074

4. Stählerne **Radreifen** auf **Stahlschienen**, nach Galton:

Geschwindigkeit in m i. d. Sek.:	Beginn	3,1	15,2	26,8
Reibungskoefficient . . . . μ =	0,242	0,088	0,065	0,027

5. **Wasserdruck-Hebezeuge.** Nach Versuchen von Lang.
1) **Bronze- oder Pockholz-Schieber auf Bronze.**

μ ist konstant bei langsamer, wechselseitiger Bewegung und bei Flächendrucken von 2 bis 100 Atm.

Schieber unausgesetzt gefettet . . . . $\mu = 0,06$.
„ mittelst zahlreicher Nuten vom Wasser benetzt $\mu = 0,10$.
„ trocken laufend und knurrend . . . . . . μ bis 0,30.

2) **Stopfbüchsen** mit Hanf, Baumwolle oder Lederstulp gedichtet. μ konstant bei Wasserpressungen zwischen 1 und 50 Atm., u. zw. unabhängig von der **Höhe** der Abdichtung.

Reibung in kg = μ × Wasserdruck in Atm. × Umfang der Dichtungsfläche.

α) **Baumwolle oder Hanf,** lose oder geflochten, in heifsem Talg getränkt, Kolben glatt, Büchse nicht fest angeprefst, also Packung noch elastisch, gewöhnliche Abmessungen — selbst noch nach Monaten . . . . $\mu = 0{,}06$ bis $0{,}11$;

β) Material desgl., schwierige Verpackung (schwere Stopfbüchse, ungünstige Lage u. s. w.) . . . . μ bis $0{,}25$;

γ) **Lederstulp-Dichtung,**

weiches Leder, gute Ausführung . . . $\mu = 0{,}03$ bis $0{,}07$;
hartes, stark lohgares Leder . . . . . $\mu = 0{,}10$ bis $0{,}13$;
ungünstige Anlage (rauher Kolben, schmutziges Wasser u. s. w.) . . μ bis $0{,}20$.

Weiteres s. fünfter Abschnitt, u. Stopfbüchsen.

6. **Koefficienten der Gesamt-Reibung μ für Strafsenfuhrwerke*).**

Chaussierte Strafse, mit Theer und Pech gedichtet	$\mu = 0{,}010$.
Asphaltstrafse oder vorzügliches Steinpflaster	$\mu = 0{,}013$.
Chaussierte Strafse, gewöhnl. Schotter, in vorzügl. Zustande	$\mu = 0{,}015$.
Gutes Holzpflaster	$\mu = 0{,}018$.
„ Steinpflaster	$\mu = 0{,}020$.
Chaussierte Strafse, in gutem Zustande	$\mu = 0{,}023$.
desgl., mit Staub u. s. w. bedeckt	$\mu = 0{,}028$.
Geringes Steinpflaster	$\mu = 0{,}033$.
Chaussierte Strafse, mit Schlamm, Gleisen bedeckt	$\mu = 0{,}035$.
Erdwege, sehr gute	$\mu = 0{,}045$.
Chaussierte Strafse von sehr geringer Beschaffenheit	$\mu = 0{,}050$.
Erdwege, gute bis schlechte	$\mu = 0{,}080$ bis $0{,}160$.

7. **Reibung von Schlitten** mit hölzernen Kufen auf glatten Holz- oder Steinbahnen.

Ungeschmiert	$\mu = 0{,}38$.
Geschmiert mit trockener Seife	$\mu = 0{,}15$.
desgl. mit Talg	$\mu = 0{,}07$.
Für Holzkufen auf Schnee und Eis	$\mu = 0{,}035$.
Für beschlagene Kufen auf Schnee und Eis	$\mu = 0{,}02$.

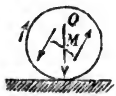
8. **Reibungskoefficient von Eisenbahnzügen.**

Für Eisenbahnwagen (auch Strafsenbahnwagen)	$\mu = 0{,}004$.
„ Lokomotiven	$\mu = 0{,}010$.

Genauere Angaben hierüber s. Abteil. II. Neunter Abschnitt, S. 30.

β. Rollende Reibung.

Abbild. 136.



1. Rollt ein Cylinder ohne zu gleiten auf einer ebenen Unterlage, gegen welche er mit der Kraft Q geprefst wird (Abbild. 136), so ist zur Erzielung der Drehung um den Stützpunkt ein **Kräftepaar** mit dem Moment

$$M = Qf$$

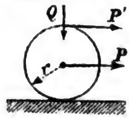
zu überwinden. Die Gröfse f, der Hebelarm oder Koefficient der rollenden Reibung, ist:

*) Handbuch d. Baukunde I. S. 552.

für Pockholz auf Pockholz . . . . $f = 0{,}047$ cm,
" Ulmenholz auf Pockholz . . . . $f = 0{,}081$ cm,
" Gufseisen auf Gufseisen . . . . $f = 0{,}046$ cm } Mittel
" " " Eisenbahnschienen . $f = 0{,}052$ cm } 0,05 cm.

2. **Beispiele.** Wird das Kräftepaar M überwunden z. B. durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft P (Abbild. 137) (und eine Reibungsstützkraft P), so gilt für P die Beziehung:

Abbild. 137.



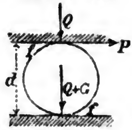
$$Pr = M = Qf.$$

Greift eine Kraft P' am Umfange diametral dem Stützpunkt gegenüber an, so gilt:

$$P' 2r = M = Qf.$$

Wird eine Last Q auf einer Walze fortgeschoben (Abbild. 138), und bedeutet f den Koefficienten der rollenden Reibung für Walze und Unterlage, f' für Walze und Last, G das Eigengewicht der Walze, so ist:

Abbild. 138.



$$Pd = M = Qf' + (Q + G)f.$$

Ein Cylinder vom Halbmesser r beginnt auf einer schiefen Ebene zu rollen, wenn das Steigungsverhältnis der letzteren $\operatorname{tg} \alpha = f : r$ ist.

B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse der Getriebe.

a. Allgemeines.

Bezeichnet Q den Nutzwiderstand eines Getriebes,
q den Weg, auf welchem derselbe wirkt,
P die wirkliche Betriebskraft,
p den Weg derselben, während Q den Weg q zurücklegt,

so heifst:

$$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{gesamte aufgewandte Arbeit}}$$ der **Wirkungsgrad** des Getriebes.

Bezeichnet P_0 die theoretische Betriebskraft, welche die Nutzlast Q ohne Vorhandensein der Reibungswiderstände im Gleichgewicht hielte, und Q_0 die theoretische Nutzlast, welche durch die wirkliche Betriebskraft bei reibungsloser Bewegung überwunden werden könnte, so ist auch:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_0}.$$

Ist für den Rückwärtsgang des Getriebes $\eta \leqq 0$, so heifst das Getriebe **selbstsperrend**; infolge der Reibungswiderstände ist eine Rückwärtsbewegung alsdann von selbst nicht möglich.

Besteht ein Getriebe aus mehreren Elementargetrieben mit den Wirkungsgraden $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$, so ist der Gesamtwirkungsgrad:

$$\eta = \eta_1 \, \eta_2 \, \eta_3 \ldots \ldots {}^{*}).$$

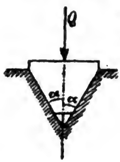
Das Verhältnis der Reibungsarbeit A_r zur Nutzarbeit A_n heifst **specifischer Arbeitsverlust** $\mathfrak{V} = A_r : A_n$. Mit $\mathfrak{V}$ ergiebt sich:

$$\eta = \frac{1}{1 + \mathfrak{V}}.$$

b. Keil.

1. Bewegung in Keilnuten.

Abbild. 139.



Wird ein Prisma in eine Keilnute vom Neigungswinkel $= 2\alpha$ durch die Kraft Q geprefst (Abbild. 139), so beträgt der bei der Bewegung längs der Achse des Prismas zu überwindende Reibungswiderstand:

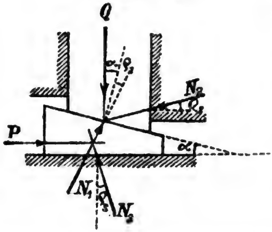
$$W = Q \frac{\mu}{\sin \alpha} = Q \mu'.$$

$$\left(\mu' = \frac{\mu}{\sin \alpha} = \begin{cases} \text{Reibungskoefficient für} \\ \text{Keilnutenbewegung.} \end{cases} \right)$$

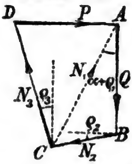
2. Keilkette.

Der Keil werde im Sinne der Kraft P verschoben (Abbild. 140); dadurch werde die Kraft Q überwunden. Die Stützendrücke N_1, N_2 und N_3, sowie P ergeben sich mittelst Zeichnung, wenn $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die entsprechenden Reibungswinkel bedeuten, nach Abbild. 141.

Abbild. 140.



Abbild. 141.



Ziehe AC unter $\alpha + \varrho_1$ gegen Q, $BC \parallel$ zu N_2 d. i. unter ϱ_2 gegen die Wagerechte; durch den Schnittpunkt C lege $CD \parallel N_3$ d. i. unter ϱ_3 gegen die Lotrechte. Die Wagerechte durch $A = AD$ ist alsdann $= P$. Rechnerisch folgt hiernach:

$$N_1 : Q = \cos \varrho_2 : \cos (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2),$$

$$P : N_1 = \sin (\alpha + \varrho_1 + \varrho_3) : \cos \varrho_3, \text{ hieraus}$$

$$P : Q = \frac{\cos \varrho_2 \sin (\alpha + \varrho_1 + \varrho_3)}{\cos \varrho_3 \cos (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)} \text{ z. B. für } \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$$

$$P = Q \operatorname{tg} (\alpha + 2\varrho).$$

---

*) Zeichnerische Ermittlung von η s.: „G. Herrmann, Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe“, Braunschweig 1879, F. Vieweg.

Wirkungsgrad: $\eta = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} (\alpha + 2\varrho)$.

Kraft P_1 zum Lösen des Keiles:

$$P_1 = Q \operatorname{tg} (2\varrho - \alpha);$$

Selbstsperrung, so lange $\alpha < 2\varrho$ bezw. $< \varrho_1 + \varrho_3$.

Für die Kette Abbild. 142 ergiebt sich z. B. (vergl. Abbild. 143):

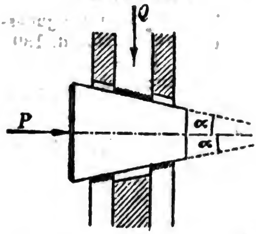
$$P = \frac{2\,Q \cos \varrho \sin (\alpha + \varrho)}{\cos (\alpha + 2\varrho)} = \frac{2\,Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)}{1 - \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)} \sim 2\,Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho).$$

$$P_1 \sim 2\,Q \operatorname{tg} (\varrho - \alpha).$$

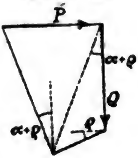
$$\eta = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} (\alpha + \varrho).$$

Selbstsperrung, so lange $\alpha < \varrho$ bezw. $2\,\alpha < \varrho_1 + \varrho_3$.

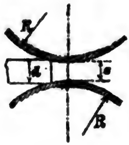
Abbild. 142.



Abbild. 143.



Abbild. 144.



3. Walzprozefs.

Zur Einleitung des Walzprozesses (Abbild. 144) mufs sein:

$$e \geqq d - 2\,R\,(1 - \cos \varrho).$$

Für Eisen mit $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0{,}1$ z. B.:

$$e \geqq d - 0{,}01\,R.$$

c. Zapfen.

1. Flächendruck und Reibungswiderstand.

Es bedeute: P den auf den Zapfen ausgeübten Druck in kg,
df ein Element der Zapfenoberfläche im Abstande y cm von der Drehachse, in qcm,
p den in df stattfindenden specifischen Normaldruck in kg f. d. qcm,
φ den Winkel der Normale auf df mit der Zapfenkraft P.

Alsdann ist:

das **Moment der Zapfenreibung** $M = \mu \int p\,df \cdot y$,

die Reibungsarbeit für 1 Umdrehung $A = 2\pi M$ cmkg,

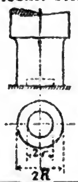
und, bei n Umdrehungen i. d. Min.:

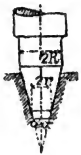
die Reibungsarbeit i. d. Sek. $E = \dfrac{2\pi\mu n}{60} \int p\,df \cdot y = \dfrac{\pi\mu n}{30} M$ cmkg.

Der **Flächendruck** p kann bei neuen Zapfen für alle df gleich angenommen, d. h. aus $p = P:f$ bestimmt werden, wenn f die Projektion der gedrückten Zapfenoberfläche auf eine zur Kraftrichtung senkrechte Ebene bezeichnet. Bei eingelaufenen Zapfen ergiebt sich p unter der Annahme, dafs die Abnutzung, in Richtung von P gemessen, für alle Flächenelemente df gleich sei, aus:

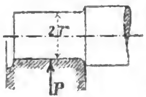
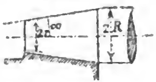
$p = \text{konst.}\,\frac{\cos\varphi}{y}$ unter Zuhülfenahme der Gleichung: $P = \int p\,df\cos\varphi = \text{konst.}\int\frac{\cos^2\varphi}{y}\,df.$

1. Stützzapfen. (Der Druck P wirkt in der Richtung der Achse.)

Zapfen.	Flächendruck p: neu.	Flächendruck p: eingelaufen. p	Flächendruck p: eingelaufen. p_{max}	Reibungsmoment M: neu.	Reibungsmoment M: eingelaufen.
Abbild. 145.  Ebene Ringfläche; Kammzapfen	$\frac{P}{\pi(R^2-r^2)}$	$\frac{P}{2\pi(R-r)y}$	$\frac{P}{2\pi(R-r)r}$	$\frac{2}{3}\mu P\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}$	$\frac{1}{2}\mu P(R+r)$
Voller ebener Zapfen	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2\pi R y}$	∞	$\frac{2}{3}\mu PR$	$\frac{1}{2}\mu PR$
Abbild. 146.  Kugel-Kalotte	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)}{\pi R^2\operatorname{tg}\varphi}$	∞	$\mu PR\frac{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$	$\mu PR\frac{\sin^2\alpha}{\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}$
Halbkugel	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2R^2\operatorname{tg}\varphi}$	∞	$\frac{\pi}{2}\mu PR$	$\frac{2}{\pi}\mu PR$

Abbild. 147.  Abgekürzter Kegel	$\frac{P}{\pi(R^2-r^2)}$	$\frac{P}{2\pi(R-r)y}$	$\frac{P}{2\pi(R-r)r}$	$\frac{2}{3}\mu P\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{2}\mu P\frac{R+r}{\sin\alpha}$
Voller Kegel	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2\pi R y}$	∞	$\frac{2}{3}\mu P\frac{R}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{2}\mu P\frac{R}{\sin\alpha}$

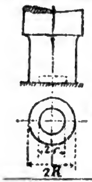
2. Tragzapfen. (Der Druck P wirkt normal zur Achse.)

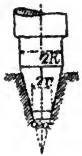
Zapfen.		Flächendruck p: neu.	eingelaufen. p	eingelaufen. p_{max}	Reibungsmoment M: neu.	eingelaufen.
Abbild. 148 	Cylindrisch, halb umschlossen	$\frac{P}{2rl}$	$\frac{4}{\pi}\frac{P}{2rl}\cos\varphi$	$\frac{4}{\pi}\frac{P}{2rl}$	$\frac{\pi}{2}\mu Pr$	$\frac{4}{\pi}\mu Pr=\mu_1 Pr$
	desgl. Druck auf den Lagerdeckel $=Q$	$\frac{P+2Q}{2rl}$	$\frac{4}{\pi}\frac{P+2Q}{2rl}\cos\varphi$	$\frac{4}{\pi}\frac{P+2Q}{2rl}$	$\frac{\pi}{2}\,4\,(P+2Q)\,r$	$\mu_1(P+2Q)\,r$
Abbild. 149. 	Abgekürzter Kegel	(Der Druck D in Richtung der Achse, welcher bei dem kegelförmigen Tragzapfen durch das Abgleitungsbestreben erzeugt wird, beträgt: $D=\frac{\pi}{2}P\,\mathrm{tg}\,\alpha$ bezw. $\frac{4}{\pi}P\,\mathrm{tg}\,\alpha$.)			$\frac{\pi}{3}\mu P\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{1}{\cos\alpha}$	$\frac{2}{\pi}\mu P\frac{R+r}{\cos\alpha}$
	Voller Kegel				$\frac{\pi}{3}\mu P\frac{R}{\cos\alpha}$	$\frac{2}{\pi}\mu P\frac{R}{\cos\alpha}$

Der **Flächendruck** p kann bei neuen Zapfen für alle df gleich angenommen, d. h. aus $p = P:f$ bestimmt werden, wenn f die Projektion der gedrückten Zapfenoberfläche auf eine zur Kraftrichtung senkrechte Ebene bezeichnet. Bei eingelaufenen Zapfen ergiebt sich p unter der Annahme, daſs die Abnutzung, in Richtung von P gemessen, für alle Flächenelemente df gleich sei, aus:

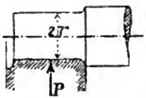
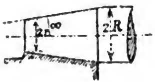
$$p = \text{konst.} \frac{\cos\varphi}{y} \text{ unter Zuhülfenahme der Gleichung: } \quad P = \int p\,df \cos\varphi = \text{konst.} \int \frac{\cos^2\varphi}{y}\,df.$$

1. Stützzapfen. (Der Druck P wirkt in der Richtung der Achse.)

Zapfen.	Flächendruck p: neu.	Flächendruck p: eingelaufen. p	eingelaufen. p_{max}	Reibungsmoment M: neu.	Reibungsmoment M: eingelaufen.
Abbild. 145.  Ebene Ringfläche; Kammzapfen	$\frac{P}{\pi(R^2 - r^2)}$	$\frac{P}{2\pi(R-r)y}$	$\frac{P}{2\pi(R-r)r}$	$\frac{2}{3}\mu P \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$	$\frac{1}{2}\mu P(R+r)$
Voller ebener Zapfen	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2\pi R y}$	∞	$\frac{2}{3}\mu P R$	$\frac{1}{2}\mu P R$
Abbild. 146.  Kugel-Kalotte	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P(\sin\alpha\cos\alpha + \alpha)}{\pi R^2 \operatorname{tg}\varphi}$	∞	$\mu P R \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$	$\mu P R \frac{\sin^2\alpha}{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}$
Halbkugel	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2 R^2 \operatorname{tg}\varphi}$	∞	$\frac{\pi}{2}\mu P R$	$\frac{2}{\pi}\mu P R$

Abbild. 147.  Abgekürzter Kegel	$\frac{P}{\pi(R^2-r^2)}$	$\frac{P}{2\pi(R-r)y}$	$\frac{P}{2\pi(R-r)r}$	$\frac{2}{3}\mu P\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{2}\mu P\frac{R+r}{\sin\alpha}$
Voller Kegel	$\frac{P}{\pi R^2}$	$\frac{P}{2\pi R y}$	∞	$\frac{2}{3}\mu P\frac{R}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{2}\mu P\frac{R}{\sin\alpha}$

2. Tragzapfen. (Der Druck P wirkt normal zur Achse.)

Zapfen.	Flächendruck p: neu.	Flächendruck p: eingelaufen. p	Flächendruck p: eingelaufen. p_{max}	Reibungsmoment M: neu.	Reibungsmoment M: eingelaufen.
Abbild. 148  Cylindrisch, halb umschlossen	$\frac{P}{2rl}$	$\frac{4}{\pi}\frac{P}{2rl}\cos\varphi$	$\frac{4}{\pi}\frac{P}{2rl}$	$\frac{\pi}{2}\mu Pr$	$\frac{4}{\pi}\mu Pr=\mu_1 Pr$
desgl. Druck auf den Lagerdeckel $=Q$	$\frac{P+2Q}{2rl}$	$\frac{4}{\pi}\frac{P+2Q}{2rl}\cos\varphi$	$\frac{4}{\pi}\frac{P+2Q}{2rl}$	$\frac{\pi}{2}4(P+2Q)r$	$\mu_1(P+2Q)r$
Abbild. 149.  Abgekürzter Kegel	(Der Druck D in Richtung der Achse, welcher bei dem kegelförmigen Tragzapfen durch das Abgleitungsbestreben erzeugt wird, beträgt: $D=\frac{\pi}{2}P\operatorname{tg}\alpha$ bezw. $\frac{4}{\pi}P\operatorname{tg}\alpha$.)			$\frac{\pi}{3}\mu P\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{1}{\cos\alpha}$	$\frac{2}{\pi}\mu P\frac{R+r}{\cos\alpha}$
Voller Kegel				$\frac{\pi}{3}\mu P\frac{R}{\cos\alpha}$	$\frac{2}{\pi}\mu P\frac{R}{\cos\alpha}$

Den Ausdruck $\mu_1 = \frac{4}{\pi}\mu = 1{,}273\,\mu$ bezeichnet man als **Zapfenreibungskoefficienten** und bestimmt ihn aus $M = \mu_1 P r$ unmittelbar durch Versuche.

$p = \frac{P}{2rl}$ nennt man den **mittleren Druck.** Es ist $p_m = \frac{\pi}{4} p_{max}$ bezw. $p_{max} = \frac{4}{\pi} p_m$.

Ein Zapfen ist um so vorteilhafter, je kleiner sein Reibungsmoment und je geringer seine Abnutzung ist.

Für die verschiedenen Zapfenformen ergiebt, unter der Voraussetzung, dafs der Druck P und der gröfste Halbmesser R gegeben sei, von den Stützzapfen der volle, ebene Zapfen das kleinste Reibungsmoment.

Die Abnutzung ist am geringsten bei dem vollen, ebenen Stützzapfen und dem cylindrischen Tragzapfen.

Anmerkung: Für die betrachteten Zapfenformen gelten die folgenden Sätze, sowohl für neue, als für eingelaufene Zapfen:

α) Wirkt auf einen konoidischen oder kegelförmigen Zapfen ein Druck P in der Richtung der Achse und ein Druck P_1 normal zur Achse, so ist das Gesamtmoment der Reibung so zu berechnen, als ob der Druck P lediglich auf den Zapfen als Stützzapfen wirkte, der Druck P_1 aber gar nicht vorhanden wäre.

Bei einem cylindrischen Zapfen mit ebener Endfläche sind dagegen die Reibungsmomente von P (für die ebene Endfläche als Stützzapfen) und von P_1 (für die Cylinderfläche als Tragzapfen) zu addieren.

β) Sind die beiden konoidischen oder kegelförmigen Tragzapfen einer liegenden Welle einander gleich und wirkt auf den einen der Zapfen der Druck P, auf den anderen der kleinere Druck P_1 normal zur Achse, so ist die Summe der Reibungsmomente beider Zapfen gleich dem Momente, welches sich für einen Zapfen ergeben würde, falls auf diesen der Druck $2\,P$ wirksam wäre.

Bei cylindrischen Zapfen ist $P + P_1$ statt $2\,P$ zu setzen.

Für die zeichnerische Behandlung kann die Zapfenreibung dadurch Berücksichtigung finden, dafs man den Lagergegendruck nicht durch die Zapfenachse gehen läfst, sondern berührend an einen Kreis, den (Zapfen-) Reibungskreis legt, dessen Halbmesser sich für den cylindrischen Tragzapfen zu $\sigma = \mu_1 r$ ergiebt, wenn r den Halbmesser des Zapfens, μ_1 den Zapfenreibungskoefficienten bedeutet.

2. Zapfenreibungskoefficienten μ_1.

α. nach Morin.

Reibende Körper.	Schmierung auf gewöhnl. Art.	Schmierung ununterbrochen.
Bronze auf Bronze . . .	0,10	—
desgl. „ Gußeisen . .	0,09	0,045 bis 0,052
Gußeisen auf Bronze . .	0,075	—
desgl. „ Gußeisen .	0,075	0,054
desgl. „ Pockholz. .	(0,10 fettig) 0,07	(0,28 mit Wasser) 0,090
Pockholz auf Pockholz . .	—	0,07
Schweißeisen auf Gußeisen oder Bronze	(0,25 wenig fettig) 0,07	0,054*)
Schweißeisen auf Pockholz	(0,19 fettig) 0,11	

β. nach Tower und Thurston.

Versuchsgegenstand: Stahlzapfen in Bronzeschale; $d = 102$, $l = 152$ mm wagerecht gelagert, einseitig belastet von oben, in Oelbad.

Oel-Art.	Reibungswiderstand W für Oelbad bei 1,6 m i. d. Sek. Umf.-geschw. und $p_m = 7$ bis 21,8 kg f. d. qcm. kg f. d. qcm Druckfläche.		Geschw. m i. d. Sek.	Mittl. Druck kg f. d. qcm p_m	μ_1.
Olivenöl . .	0,0460	Hieraus ergiebt sich: $\mu_1 = \frac{W}{p_m}$. (Vergl. unter γ. S. 210).	0,8	36,5	0,0008
Schmalzöl .	0,0458		1,06	„	0,0010
Rüböl. . .	0,0360		2,13	„	0,0015
Mineralfett .	0,0737		0,8 2,13	„ „	0,0010 0,0018
Wallratöl. .	0,0340		0,8 2,13	29,2 „	0,0015 0,0021
Mineralöl. .	0,0438		0,8 2,13	36,5 „	0,00123 0,00178
Mineralfett			2,13	7,0	0,014
Olivenöl und Schmalzöl			2,13	7,0	0,008

Bezüglich der Einwirkung verschiedener Schmierverfahren ermittelte Tower bei 150 Umdrehungen des obengenannten Zapfens für Rüböl (Umfangsgeschwindigkeit 0,8 m i. d. Sek.),**)

bei Oelbad und . . . $p_m = 18,5$ kg f. d. qcm : $\mu_1 = 0,00139$

„ Dochtschmierung und $p_m = 17,1$ kg f. d. qcm : $\mu_1 = 0,00980$

„ Reibekissen und . . $p_m = 19,1$ kg f. d. qcm : $\mu_1 = 0,00900$.

*) Nach Waltje und Rühlmann 0,02 bis 0,03.

**) S. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1885, S. 836 u. f.

Hiermit stimmt der von Kirchweger für Eisenbahnwagenachsen gefundene Wert $\mu_1 = 0{,}01$ (Schmierung: Reibekissen mit Dochtzuführung) überein.

γ. **Nach Browne***) folgt aus den Versuchen von Tower und Thurston:

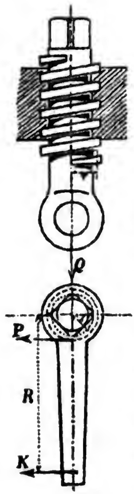
1. für vollkommen (durch Oelbad) **geschmierte Zapfen**:
Der Reibungskoefficient μ_1 ist bei mäfsigen Drucken und Geschwindigkeiten annähernd umgekehrt proportional dem Flächendrucke, d. h. die Reibung f. d. Flächeneinheit ist annähernd konstant; die Reibung wächst (bei gleichem Druck) mit der Gröfse der Reibungsfläche.

2. Bei der **trockenen** Reibung ist μ_1 konstant; die Reibung ist unabhängig von der Reibungsfläche.

3. Bei den Reibungsgeschwindigkeiten, wachsend von 0,05 bis 0,5 m i. d. Sek., vermindert sich μ_1. Bei ungefähr 0,5 m tritt ein Wechsel ein, und darüber hinaus wächst μ_1 mit der Quadratwurzel aus der Geschwindigkeit, bis 2 m Geschwindigkeit also um 100%.

4. Eine Temperatursteigerung innerhalb gewisser Grenzen (0° bis 40° C) hat eine Verminderung von μ_1 zur Folge u. zw. verändert sich μ_1 ungefähr umgekehrt proportional der Temperatur über dem Nullpunkte.

Abbild. 150.



d. Schraube.

1. Rechteck-Gewinde.

r = Halbmesser der mittleren Schraubenlinie,

h = Ganghöhe oder Steigung,

α = Steigungswinkel $\left(\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{2\pi r}\right)$.

1. **Gleichgewicht** besteht, so lange:

$$Q \operatorname{tg}(\alpha - \varrho_0) < P < Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho_0) = Q\,\frac{h + 2\pi r \mu_0}{2\pi r - \mu_0 h},$$

P senkrecht zur Achse im Abstande r von dieser angreifend gedacht.

Die Kraft K, gleichwertig mit P, am Hebelarm R angreifend, folgt (Abbild. 150) aus

$$Pr = KR.$$

Selbstsperrung tritt ein, wenn $\alpha \leqq \varrho_0$.

2. Für die **Bewegung** der Schraube (Abbild. 151) ist:

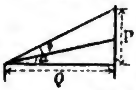
$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho) = Q\,\frac{h \pm 2\pi r \mu}{2\pi r \mp \mu h};$$

das + Zeichen gilt für die Bewegung entgegengesetzt der Richtung von Q, das — Zeichen für die Bewegung im Sinne von Q.

Wirkungsgrad: $\eta = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$,

bezw.: $\eta = \operatorname{tg}(\alpha - \varrho) : \operatorname{tg}\alpha$.

Abbild. 151.



η wird ein Maximum für $\alpha = 45^0 - \frac{1}{2}\varrho$; z. B für $\mu = 0{,}1$, $\eta_{max} = 0{,}81$ für $\alpha = 42^0$; da η nur für α bis $\sim 20^0$ stark zunimmt, so geht man meist nur bis $\alpha = 20^0$; hierfür wird $\eta = 0{,}74$. Bei Pressen, bei denen es auf grofse Kraftübersetzung ankommt wählt man α bis 3^0 herab, wofür $\eta = 0{,}27$ wird.

*) S. Engineer 1884. Bd. 58. S. 57 u. f.

2. Dreieck-Gewinde.

r = Halbmesser der mittleren Schraubenlinie,
h = Steigung oder Ganghöhe,
α = Steigungswinkel $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r}\right)$ der mittleren Schraubenlinie,
β = dem halben Kantenwinkel,
P und Q wie unter **1.**

1. **Gleichgewicht** besteht, so lange:

$$P < Q \frac{\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}+\mu_0}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}-\mu_0\operatorname{tg}\alpha}$$

und:

$$P > Q \frac{\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}-\mu_0}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}+\mu_0\operatorname{tg}\alpha}$$

Da α gegen β in der Regel klein ist, so ist sehr angenähert:

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta} = 1 : \cos\beta.$$

Bestimmt man ϱ'_0 aus $\operatorname{tg}\varrho'_0 = \mu_0 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, so mufs sein:

$$Q\operatorname{tg}(\alpha-\varrho'_0) < P < Q\operatorname{tg}(\alpha+\varrho'_0).$$

Selbstsperrung tritt ein, wenn $\alpha \leqq \varrho'_0$ ist.

2. Für die **Bewegung** ist:

$$P = Q \frac{\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}\pm\mu}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{g}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}\mp\mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

Bestimmt man ϱ' aus:

$$\operatorname{tg}\varrho' = \frac{\mu}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}}$$

oder sehr angenähert $= \frac{\mu\cos\beta}{\cos\alpha}$, so wird

$$P = Q\operatorname{tg}(\alpha\pm\varrho').$$

Wirkungsgrad: $\eta = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}(\alpha+\varrho')$
bezw.: $\eta = \operatorname{tg}(\alpha-\varrho') : \operatorname{tg}\alpha$.

Das + Zeichen gilt für Bewegung entgegengesetzt der Richtung von Q, das — Zeichen für Bewegung im Sinne von Q.

Für das Dreieckgewinde ist also, da $\varrho' < \varrho$, der Wirkungsgrau gröfser als für das Rechteckgewinde, für $\beta = 0$ ist η ein Minimum.

Z. B. $\alpha = 2^0 10'$; $\beta = 26^0 30'$; $\mu = 0{,}16$

Es wird:

$$\operatorname{tg}\varrho' = \frac{0{,}16 \cdot \cos 26^0 30'}{\cos 2^0 10'} = 0{,}143;\ \varrho' = 8^0 10'.$$

$$P = Q\operatorname{tg}(\alpha+\varrho') = 0{,}82\,Q;\quad \eta = 0{,}208.$$

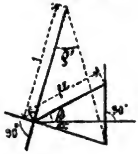
Für Rechteck-Gewinde wäre:

$$P = Q\operatorname{tg}(\alpha+\varrho) = 0{,}20\,Q;\quad \eta = 0{,}189.$$

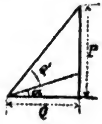
Selbstsperrung in beiden Fällen.

Durch Zeichnung ergiebt sich P, wie aus Abbild. 152 u. 153 ersichtlich, indem man zuerst ϱ' aufsucht.

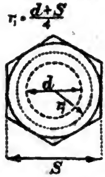
Abbild. 152.



Abbild. 153.



Abbild. 154.



3. Zum **Anziehen einer Mutter** ist ein Drehmoment auszuüben (Abbild. 154):

$$M = Pr + Q r_1 \mu' = [\mathrm{tg}\,(\alpha + \varrho') + 1{,}4\,\mu']\,Q r,$$

und zum **Lösen:**

$$M = [\mathrm{tg}\,(\varrho' - \alpha) + 1{,}4\,\mu']\,Q r,$$

wenn α, ϱ' und r die obige Bedeutung haben, für gewöhnliche Verhältnisse $r_1 = 1{,}4\,r$ gesetzt wird und μ' den Reibungskoefficienten zwischen Mutter und Unterlage bedeutet.

Für Deslisle-Gewinde*) und $\mu = 0{,}41$ (vergl. S. 201) wird $\varrho' = 20^0\,10'$. Setzt man auch $\mu' = 0{,}41$, so ist: $M = [\mathrm{tg}\,(20^0\,10' \pm \alpha) + 0{,}57]\,Q r$.

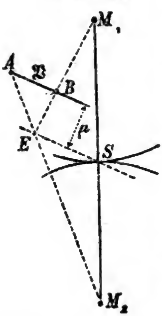
(M im Mittel $= 0{,}985\,Q r$ zum Anziehen, $0{,}890\,Q r$ zum Lösen.)

e. Zahnräder.

1. Stirnräder.

Bestimmung des verhältnismäfsigen Arbeitsverlustes $\mathfrak{V}$.

Abbild. 155.



Berühren sich zwei Profile in E und bedeuten ES die Berührungsnormale, M_1 und M_2 die Mittelpunkte der beiden Räder, so erhält man $\mathfrak{V}$ für die augenblickliche Stellung, wenn man zu ES im Abstande μ eine Parallele zieht. Die beiden Halbmesser $M_1 E$ und $M_2 E$ schneiden auf dieser eine Strecke AB ab, welche, in demselben Mafsstabe wie μ gemessen, den Wert von $\mathfrak{V}$ angiebt.

Für die üblichen Profilformen ist $\mathfrak{V}$ sehr annähernd den Längen der Eingriffbögen e**), gemessen von der Centrale $M_1 M_2$, proportional. Als Mittelwert von $\mathfrak{V}$ für den Eingriffbogen e_1 ergiebt sich daher (so lange nur ein Zahn im Eingriff ist), $\frac{1}{2}\,\mathfrak{V}_1$, wenn $\mathfrak{V}_1$ der dem Endpunkte des Eingriffbogens e_1 entsprechende Wert von $\mathfrak{V}$ bedeutet.

*) S. Fünfter Abschnitt, Maschinenteile.
**) Ebendaselbst.

Sind die Eingriffbögen vor und hinter der Centrale gleich, so ist dieser Wert unmittelbar als mittlerer verhältnismäfsiger Arbeitsverlust $\mathfrak{B}_m$ des Zahnrädergetriebes zu betrachten.

Sind die Eingriffbögen verschieden $= e_1$ und e_2, die den Endpunkten derselben entsprechenden Werte $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, so kann nach Grashof als Mittelwert gelten:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{\mathfrak{B}_1 e_1 + \mathfrak{B}_2 e_2}{2(e_1 + e_2)}.$$

Bedeuten z_1 und z_2 die Zähnezahlen der im Eingriff befindlichen Räder, t die Teilung derselben, $\tau_1 = \frac{e_1}{t}$, $\tau_2 = \frac{e_2}{t}$, $\tau = \tau_1 + \tau_2$ (Eingriffdauern), so findet sich auch:

$$\mathfrak{B} = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 + \tau_2} \sim \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\frac{\tau}{2}.$$

Beachtet man, dafs bei einer Eingriffdauer τ zwischen 1 und 2 abwechselnd 1 und 2 Zähne im Eingriff stehen, so erhält man für $\mathfrak{B}$ genauer:

$$\mathfrak{B} = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)(\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_1 - \tau_2 + 1)$$

$$\sim \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{\tau^2}{2} - \tau + 1\right) = \pi\mu\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right)\psi.$$

Das + Zeichen gilt für Vollräder, das — Zeichen für Hohlräder.
Im Mittel kann $\mu = 0{,}16$, $\pi\mu = 0{,}5$ gesetzt werden.

Für $\tau = 1$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
wird $\psi = 0{,}5$	0,505	0,520	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,905	1,0.

τ_1 und τ_2 sind für die gebräuchlichen Verhältnisse bei Cykloiden- und Evolventenverzahnung allein von den Zähnezahlen z_1 und z_2 abhängig und zwar für:

Cykloidenverzahnung:

$z_1 =$	7	10	15	20	30	40	50	∞
$\tau_1 =$	0,58	0,60	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,75

Evolventenverzahnung:

$z_1 =$	20	25	30	40	50	60	∞
$\tau_1 =$	0,84	0,90	0,92	0,97	0,99	1,02	1,24.

Ist die Zahnform gezeichnet, so empfiehlt sich das Verfahren unter II. A. a. im fünften Abschnitt, Maschinenteile.

Bei der **zeichnerischen** Bestimmung der Reibungsverluste in einem Getriebe läfst sich der Verlust durch Zahnreibung an einem Räderpaar dadurch berücksichtigen, dafs man die Richtung des Zahndruckes nicht durch den Berührungspunkt S der beiden Teilkreise legt, sondern durch einen Punkt S_1 der Centralen, welcher von S nach dem Mittelpunkte des getriebenen Rades hin um die Strecke $\xi = \mu \frac{\psi}{2} t$ verschoben ist.

2. Kegelräder.

Die Formeln unter 1. gelten auch hier, wenn man

$$\text{statt } \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \text{ setzt: } \sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{2\cos\varepsilon}{z_1 z_2}},$$

unter ε den Winkel verstanden, welchen die Achsen beider Räder mit einander bilden.

8. Schraubenräder.

Zu der eigentlichen Zahnreibung tritt noch die meist viel gröfsere Reibung hinzu, welche durch Gleiten der Zähne in ihrer Breitenrichtung entsteht. Bezeichnen γ und γ_1 die Neigungswinkel der beiden Schraubenräder, so ist der von der letztgenannten Gleitung herrührende verhältnismäfsige Arbeitsverlust:

$$\mathfrak{V}_s = \frac{\sin \gamma_1 \sin(\gamma + \varrho)}{\sin \gamma \sin(\gamma_1 - \varrho)} - 1.$$

Für den besonderen Fall der **Schraube ohne Ende** (mit $\gamma_1 = 90 - \gamma$) wird:

$$\mathfrak{V}_s = \frac{\operatorname{tg}(\gamma + \varrho)}{\operatorname{tg} \gamma} - 1 = \frac{1 + \frac{2\pi r}{t}\mu}{1 - \frac{t}{2\pi r}\mu} - 1,$$

wenn t die Teilung, r den mittleren Halbmesser der Schnecke. und μ den Koefficienten der gleitenden Reibung bedeutet.

Der Verlust durch Zahnreibung beträgt in diesem Falle

$\mathfrak{V}_z = \frac{\pi \mu}{z} \psi$ (z = Zähnezahl des Schraubenrades, ψ s. a. v. S.).

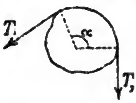
f. Zugorgane.

1. Kraftverhältnisse.

Ist ein Zugorgan (Riemen, Seil, Bremsband) um einen Cylinder geschlungen (Abbild. 156), so besteht Gleichgewicht zwischen den Kräften T_1 und T_2, so lange:

$$T_2 e^{-\mu_0 \alpha} \leqq T_1 \leqq T_2 e^{\mu_0 \alpha},$$

Abbild. 156.



worin α den Winkel zwischen den End-Normalen, μ_0 den Reibungskoefficienten der Ruhe bedeutet.

Die auf den Cylinder vermöge der Reibungsstützung auszuübende Umfangskraft $P = T - t$ beträgt daher im Maximum:

$$P = \frac{e^{\mu_0 \alpha}}{e^{\mu_0 \alpha} - 1} t = \frac{1}{e^{\mu_0 \alpha} - 1} T,$$

wenn mit T die gröfsere der beiden Zugspannungen, mit t die kleinere Zugspannung bezeichnet wird.

Für den Fall der Relativ-Bewegung zwischen Cylinder und Zugorgan ist $T = t\, e^{\mu \alpha}$ und der Reibungswiderstand am Umfange des Cylinders, bezw. am Zugorgan beträgt:

$$W = \frac{e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1} t = \frac{1}{e^{\mu \alpha} - 1} T,$$

worin μ der Koefficient der gleitenden Reibung ist.

Tafel der Werte $e^{\mu_0 \alpha}$. *)

Verhältnis des umspannten Bogens zum Umfang. $\frac{\alpha}{2\pi}=$	Gewöhnliche fette Riemen auf hölzernen Scheiben. $\mu_0=0,47$	Gewöhnliche fette Riemen auf eisernen Scheiben. $\mu_0=0,28$	Feuchte Riemen auf eisernen Scheiben. $\mu_0=0,38$	Sehr stark gefettete Riemen auf eisernen Scheiben. $\mu_0=0,12$	Hanfseile auf rauhem Holz. $\mu_0=0,5$	Hanfseile auf poliertem Holz. $\mu_0=0,33$	Eiserne Bremsbänder auf eisernen Scheiben. $\left.\begin{matrix}\mu_0\\ \mu\end{matrix}\right\}=0,18$
0,2	1,80	1,42	1,61	1,16	1,87	1,51	1,25
0,3	2,43	1,69	2,05	1,25	2,57	1,86	1,40
0,4	3,26	2,02	2,60	1,35	3,51	2,29	1,57
0,5	4,38	2,41	3,30	1,46	4,81	2,82	1,76
0,6	5,88	2,81	4,19	1,57	6,59	3,47	1,97
0,7	7,90	3,43	5,32	1,66	9,00	4,27	2,21
0,8	10,62	4,09	6,75	1,83	12,34	5,25	2,47
0,9	14,27	4,87	8,57	1,97	16,90	6,46	2,77
1,0	19,16	5,81	10,89	2,12	23,14	7,95	3,10
1,5	—	—	—	—	111,16	22,42	5,4
2,0	—	—	—	—	535,47	63,23	9,5
2,5	—	—	—	—	2575,97	178,52	17,0

2. Arbeitsverluste.

α. Durch Steifigkeit.

Der zur Biegung der Zugorgane beim Auflauf auf eine Trommel oder Rolle erforderliche Arbeitsaufwand setzt sich zusammen aus der zur elastischen Formänderung nötigen Arbeit und dem zur Ueberwindung der inneren Reibung nötigen Betrage an Arbeit. Der erste Teil wird beim Ablauf wieder gewonnen, der zweite geht verloren und ist zum zweitenmal zur Geradstreckung beim Ablauf zu leisten.

Die **Reibungssteifigkeit** kann dadurch berücksichtigt werden, dafs man statt des Hebelarmes R setzt:

für den Auflauf $R-\xi$
und „ „ Ablauf $R+\xi$ } worin:

nach Eytelwein für trockene Seile: $\xi = 0{,}093\, d^2$ (ξ und d in cm);

„ Weisbach für Hanfseile: $\xi = \left(0{,}019 + 0{,}027\frac{R}{Q}\right) d^2$

„ „ „ Drahtseile: $\xi = \left(0{,}027 + 0{,}102\frac{R}{Q}\right) d^2$ } (ξ, R und d in cm, Q in kg).

R = Halbmesser der Rolle oder Trommel, Q = Seilspannung.

Für eine Gliederkette ist:

$$\xi = \mu\frac{d}{2R+d} \sim \mu\frac{d}{2R},$$

worin $\mu = 0{,}2$ den Reibungskoefficienten der Kettenglieder und d die Ketteneisenstärke bedeutet. (Vergl. V. Abschnitt, Maschinenteile.)

*) Nach Morin; vergl. S. 199.

β. Durch Gleiten des Zugorganes auf den Rollen infolge der durch Aenderung der Spannung von der Auflauf- bis Ablaufstelle hervorgerufenen Dehnung.

Bei einem vollständigen Rollengetriebe mit treibender und getriebener Rolle beträgt der verhältnismäfsige Arbeits- bezw. Geschwindigkeitsverlust:

$$\mathfrak{B} = \frac{T_1 - t}{F} \varepsilon = \frac{P}{F} \varepsilon = \frac{P}{FE} = \frac{k}{E},$$

wenn P die abgesetzte Umfangskraft in kg,
F den Querschnitt des Zugorgans in qcm,
k die zu übertragende Kraft in kg f. d. qcm,
ε den Dehnungskoefficienten, bezw.
$E = \frac{1}{\varepsilon}$ den Elasticitätsmodul des Fadenmaterials in kg f. d. qcm (vergl. S. 304) bedeutet.

Werte von E*).

Für neue Lederriemen im Mittel	1250	kg f. d. qcm
„ gebrauchte Lederriemen im Mittel	2250	„
„ neue 50 bis 55 mm starke Seile aus Manillahanf, lose geschlagen	8000	„
„ neue 50 bis 55 mm starke Seile aus Manillahanf, hart geschlagen	9500	„
„ neue 50 bis 55 mm starke Seile aus badischem Schleifshanf, lose geschlagen	10 500	„
„ neue 50 bis 55 mm starke Seile aus badischem Schleifshanf, hart geschlagen	12 500	„
(„ neue 35 bis 40 mm starke Hanfseile scheinen um 20 % niedrigere Zahlen zulässig),		
„ neue Drahtseile im Mittel	700 000	„

Die für die Seile angegebenen Werte beziehen sich auf den thatsächlichen Seilquerschnitt (d. i. bei dem Drahtseil Summe der Querschnitte sämtlicher Drähte, reichlich 40 % von $\frac{\pi d^2}{4}$, bei dem Hanfseil Summe der Querschnitte der Litzen, etwa 60 % von $\frac{\pi d^2}{4}$). Zu beachten ist, dafs E nicht konstant ist, sondern mit wachsender Spannung zunimmt.

Es berechnet sich:

a) für neue Lederriemen mit $k = 12{,}5$ und $E = 1250$:
$$\mathfrak{B} = \frac{12{,}5}{1250} = 0{,}01 \text{ d. i. } 1\,\%,$$

b) für gebrauchte Lederriemen mit $k = 12{,}5$ und $E = 2250$:
$$\mathfrak{B} = \frac{12{,}5}{2250} = 0{,}0056 \text{ d. i. } 0{,}56\,\%,$$

c) für neue Hanfseile mit $k = 10$ und $E = 8000$:
$$\mathfrak{B} = \frac{10}{8000} = 0{,}00125 \text{ d. i. } 0{,}125\,\%.$$

d) für neue Drahtseile mit $k = 350$ und $E = 700\,000$:
$$\mathfrak{B} = \frac{350}{700\,000} = 0{,}0005 \text{ d. i. } 0{,}05\,\%.$$

Diese Werte verhalten sich wie:

20 : 11,2 : 2,5 : 1.

---

*) Nach Versuchen von Bach, s. Z. d. V. d. Ing. 1887, S. 221 u. f., S. 241 u. f., S. 891 u. f.

V. STATIK FLÜSSIGER KÖRPER.

1. Grundgesetz von Pascal.

Wird auf einen flüssigen Körper ein Druck ausgeübt, und bleibt ersterer dabei im Gleichgewicht, so pflanzt sich dieser Druck nach allen Richtungen gleichmäfsig fort. Jedes Teilchen der Flüssigkeit erleidet gleichen Druck.

2. Grundgleichungen von Euler.

Bezeichnet:

p den Druck auf die Flächeneinheit in einem Punkte P der Flüssigkeit,
x, y, z die Koordinaten von P,
X, Y, Z die Seitenkräfte der in P wirkenden, beschleunigenden Kraft nach den drei Koordinatenachsen,
g die Beschleunigung durch die Schwere,
γ das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit,

so ist für ein unendlich kleines Parallelopipedon der Flüssigkeit von den Seiten dx, dy, dz, dessen eine Ecke in P liegt, im Zustande des Gleichgewichts:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} X; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g} Y; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} Z;$$

$$dp = \frac{\gamma}{g}(X dx + Y dy + Z dz).$$

Für die freie Oberfläche, sowie für alle Flächen gleichen Drucks (Niveauflächen) wird

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Die Mittelkraft der drei Kräfte X, Y, Z ist in jedem Punkte senkrecht zu den Flächen gleichen Drucks gerichtet.

3. Hydrostatischer Druck.

Nimmt man die Schnittlinie eines ebenen Stückes Gefäfswand mit dem Flüssigkeitsspiegel als y-Achse, eine hierzu senkrechte, in der Ebene der Gefäfswand liegende Linie als x-Achse, und bezeichnet:

F den Flächeninhalt eines ebenen Stückes Gefäfswand,
z_0 den lotrechten Abstand des Schwerpunktes von F vom Flüssigkeitsspiegel,
x_0 den Abstand des Schwerpunktes von F von der y-Achse,

S das statische Moment } von F bezogen auf die y-Achse,
J das Trägheitsmoment }
γ das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit,

so ist der **Normaldruck** auf die Fläche F:

$$D = \gamma F z_0;$$

die **Koordinaten des Druckmittelpunktes** ergeben sich:

$$\xi = \frac{J}{S} = \frac{J}{F x_0}; \qquad \eta = \frac{\iint xy\,dx\,dy}{S} = \frac{\iint xy\,dx\,dy}{F x_0}.$$

Ist eine Neigungslinie Symmetrieachse von F, so liegt der Druckmittelpunkt in jener.

Dieselben Formeln gelten für den **wagerechten Druck** auf eine beliebige ebene oder gekrümmte Fläche, wenn F die Projektion der gedrückten Fläche auf die zur Druckrichtung normale Ebene bedeutet.

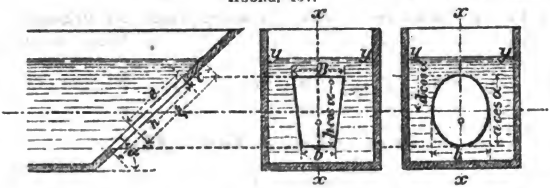
1. Für ein **Trapez**, dessen parallele Seiten wagerecht sind (Abbild. 157), ist die Entfernung e des Druckmittelpunktes von der oberen, wagerechten Seite mit den Bezeichnungen der Abbild.:

$$e = \xi - c = \frac{h}{2}\,\frac{2c(B+2b) + h(B+3b)}{3c(B+b) + h(B+2b)}.$$

Für $c = 0$ ist:

$$e = \xi = \frac{h}{2}\,\frac{B+3b}{B+2b}.$$

Abbild. 157.



2. Für ein **Dreieck** ist, wenn die Grundlinie im Flüssigkeitsspiegel liegt:

$$e = \xi = \tfrac{1}{2} h;$$

wenn dagegen die Spitze im Flüssigkeitsspiegel liegt:

$$e = \xi = \tfrac{3}{4} h.$$

3. Für ein **Rechteck** ist:

$$e = \xi - c = \frac{h}{3}\,\frac{3c + 2h}{2c + h}.$$

Ist $c = 0$, so wird:

$$e = \xi = \tfrac{2}{3} h.$$

4. Für eine **Ellipse**, deren eine Hauptachse b wagerecht (Abbild. 157) und deren Mittelpunkt um die Strecke d von der y-Achse entfernt ist, beträgt die Entfernung des Druckmittelpunktes von der y-Achse:

$$\xi = d + \tfrac{1}{4}\frac{a^2}{d}.$$

Dieselbe Formel gilt auch für den Kreis mit dem Halbmesser a. Berührt die Ellipse den Flüssigkeitsspiegel, so wird:

$$\xi = \tfrac{5}{4}\, a.$$

Der **lotrechte Druck** auf eine beliebige ebene oder gekrümmte Fläche ist gleich dem Gewichte der lotrecht über der gedrückten Fläche befindlichen Flüssigkeitssäule. Dieser Druck greift im Schwerpunkte der drückenden Flüssigkeit an.

4. Auftrieb.

Der Auftrieb eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers ist gleich dem Gewichte der von ihm verdrängten Flüssigkeit. Die Richtung des Auftriebes geht durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit.

Der Körper **schwimmt**, sobald der Auftrieb gröfser ist als sein Gewicht.

Ein schwimmender Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn sein eigener Schwerpunkt und derjenige der verdrängten Flüssigkeit in einer Lotrechten liegen. Diese in der Gleichgewichtslage lotrechte Verbindungslinie heifst Schwimmachse. Wird der schwimmende Körper aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, so schneidet die Auftriebsmittelkraft die nunmehr geneigte Schwimmachse im **Metacentrum**, dessen Lage für die Stabilität des Schwimmens mafsgebend ist. Weiteres s. Abteil. II. Abschnitt Schiffbau.

VI. DYNAMIK FLÜSSIGER KÖRPER.

A. Allgemeines.

a. Grundgleichungen von Euler.

Neben den Bezeichnungen a. S. 217 seien:

u, v, w die Geschwindigkeits-Komponenten nach x, y, z des Flüssigkeitselementes in P zur Zeit t.

Dann ist:

1. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

2. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z}.$$

3. $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

4. Die physikalische Beschaffenheit der Flüssigkeit liefert eine Beziehung zwischen p und γ.

Für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten ist $\gamma = \text{konst.}$

5. $\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$ (Kontinuitätsgleichung).

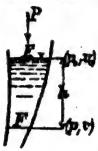
Für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten geht diese Gleichung über in:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

b. Allgemeine Beziehung zwischen Geschwindigkeit, Querschnitt, Druck u. s. w.

Es bezeichnen (Abbild. 158):

Abbild. 158.



F_0 und F zwei Querschnitte im lotrechten Abstande h,
v_0 und v die mittlere Geschwindigkeit in F_0 bezw. F,
P die auf F_0 wirkende Kraft (Druck der Luft, äufsere Kraft [falls F_0 die Oberfläche], Wassersäule),
$p_0 = P : F_0$ den Druck auf die Flächeneinheit von F_0,
$p = P : F$ den Druck auf die Flächeneinheit von F,
z die Widerstandshöhe für die Bewegung des Wassers von F_0 bis F, angreifend gedacht in F,
$\mathfrak{h}_0 = \frac{p_0}{\gamma}$ und $\mathfrak{h} = \frac{p}{\gamma}$ die Druckhöhen.

Die Gröfsen $\frac{v_0^2}{2g}$ und $\frac{v^2}{2g}$ nennt man **Geschwindigkeitshöhen.***)

Alsdann ist: $$\frac{v_0^2}{2g} + \mathfrak{h}_0 + h = \frac{v^2}{2g} + \mathfrak{h} + z.$$

$\mathfrak{h}$ ist die **hydraulische** (hydrodynamische), $\mathfrak{h}_0 + h$ die **hydrostatische Druckhöhe** im Querschnitt F. Die Gröfsen $\mathfrak{h}_0$ und $\mathfrak{h}$ entsprechen den Piezometerständen an den Querschnitten F_0 und F. Da bei Rohren von konstantem Querschnitt $v_0 = v$, also $z - h = \mathfrak{h}_0 - \mathfrak{h}$ ist, so giebt der Unterschied der Piezometerstände an zwei gleich hohen Punkten die Widerstandshöhe der dazwischen liegenden Strecke an.

Ist die Fläche F_0 gegen F sehr grofs, so kann man v_0 gegen v vernachlässigen. Die hydraulische Druckhöhe ist dann gleich der hydrostatischen vermindert um die Geschwindigkeitshöhe.

Soll die Flüssigkeit den Querschnitt F ausfüllen, so mufs

$$\mathfrak{h} \geqq 0 \text{ oder } \frac{v_0^2}{2g} + \mathfrak{h}_0 + h \geqq \frac{v^2}{2g} + z \text{ sein.}$$

---

*) Tafel der Geschwindigkeitshöhen s. S. 140.

B. Ausflufs des Wassers aus Gefäfsen.

a. Theoretische Ausflufsgeschwindigkeit und Ausflufsmenge bei konstantem Druck.

1. Aus wagerechter Wand.

Bezeichnet:
v die theoretische Ausflufsgeschwindigkeit in m i. d. Sek.,
Q die theoretische Ausflufsmenge in cbm i. d. Sek.,
F den Querschnitt der Ausflufsöffnung in qm,
F_0 den Inhalt der Oberfläche der Flüssigkeit in qm,
h die Höhe der Ausflufsöffnung über dem Flüssigkeitsspiegel in m,
g die Beschleunigung durch die Schwere = 9,81 m,
$\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_0$ die Druckhöhen in F bezw. F_0,
so folgt aus der Formel u. b. a. v. S. (für $z = 0$) die **theoretische Ausflufsgeschwindigkeit:**

$$v = \sqrt{\frac{2g(h + \mathfrak{h}_0 - \mathfrak{h})}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}}.$$

Ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$ und $\frac{F}{F_0}$ klein, so wird:

$$v = \sqrt{2gh} = 4{,}42945\sqrt{h},\text{*)}$$

d. h. die Geschwindigkeit des ausfliefsenden Wassers ist gleich der Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers.

Die **theoretische Ausflufsmenge** ist:

$$Q = Fv.$$

2. Aus lotrechter Wand.

Bezeichnet:
dx die Höhe eines Flächenelements der Ausflufsöffnung,
y die Breite dieses Flächenelements,
x den Abstand des Elements vom Flüssigkeitsspiegel,
so ist die **theoretische Ausflufsmenge:**

$$Q = \sqrt{2g}\int y x^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Die **theoretische mittlere Ausflufsgeschwindigkeit** ist:

$$v = \frac{Q}{F}.$$

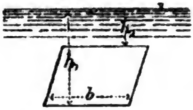
---

*) Tafeln über die entsprechenden Werte von v und h s. S. 140 u. 141.

Ist die Ausflufsöffnung ein **Parallelogramm** (Abbild. 159), in welchem zwei gegenüberliegende Seiten dem Flüssigkeitsspiegel parallel sind und unter diesem liegen, so hat man:

$$v = \tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}}}{h_1 - h_2}; \qquad Q = \tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\left(h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}}\right) b.$$

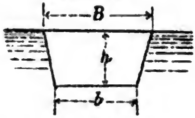
Abbild. 159.



Abbild. 160.



Abbild. 161.



Für einen **rechteckigen Ueberfall** ist (Abbild. 160):

$$v = \tfrac{2}{3}\sqrt{2gh}; \qquad Q = \tfrac{2}{3}\,b\,h\sqrt{2gh};$$

für einen **trapezförmigen** (Abbild. 161):

$$v = \tfrac{4}{15}\,\frac{2B + 3b}{B + b}\sqrt{2gh}; \qquad Q = \tfrac{2}{15}(2B + 3b)\,h\sqrt{2gh}.$$

Ist die Ausflufsöffnung ein **Kreis** vom Halbmesser r, dessen Mittelpunkt im Abstande h vom Flüssigkeitsspiegel liegt, so ist annähernd die mittlere Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4\right];$$

$$Q = \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4\right].$$

Anmerkung. Ist h' die Entfernung des Flüssigkeitsspiegels vom Schwerpunkte der Ausflufsöffnung, so kann man annähernd setzen:

für das Parallelogramm: $Q = b\,(h_1 - h_2)\sqrt{2gh'}$
für den Kreis: $Q = \pi r^2\sqrt{2gh'}$; $v = \sqrt{2gh'}$.

Dies ist für praktische Zwecke als genau zu betrachten, so lange $h' \geqq 2(h_1 - h_2)$ bezw. $h' \geqq 4r$ ist.

b. Verbesserte Ausflufsgeschwindigkeit und Ausflufsmenge bei konstantem Druck.

Allgemeines. Die theoretische Ausflufsmenge $Q = Fv$ geht infolge eines Geschwindigkeitsverlustes und infolge einer Einziehung (Kontraktion) des Wasserstrahls über in $Q_\alpha = F_\alpha v_\alpha$.

Bezeichnet:

F den Querschnitt der Ausflufsöffnung in qm,
F_α den Querschnitt des eingezogenen Strahls in qm,
v die theoretische mittlere Ausflufsgeschwindigkeit im Querschnitt F in m i. d. Sek.,
v_α die wirkliche mittlere Geschwindigkeit des eingezogenen Strahls im Querschnitt F_α in m i. d. Sek.,

$Q = Fv$ die theoretische Wassermenge, $Q_\alpha = F_\alpha v_\alpha$ die wirkliche Wassermenge } in cbm i. d. Sek.,

h die lotrechte Entfernung des Schwerpunktes der Ausflufsöffnung vom Flüssigkeitsspiegel in m,

so heifst:

$\alpha = \frac{F_\alpha}{F}$ der **Kontraktions-Koefficient,**

$\varphi = \frac{v_\alpha}{v}$ der **Geschwindigkeits-Koefficient,**

$\mu = \frac{Q_\alpha}{Q} = \frac{F_\alpha v_\alpha}{Fv} = \alpha\varphi$ der **Ausflufs-Koefficient,**

$\zeta = \frac{\frac{v^2}{2g} - \frac{v_\alpha^2}{2g}}{\frac{v_\alpha^2}{2g}} = \frac{1}{\varphi^2} - 1$ } das Verhältnis der verlorenen Geschwindigkeitshöhe zur wirklich erreichten Geschwindigkeitshöhe im Querschnitt F_α oder der **Widerstands-Koefficient,**

$h = \zeta \frac{v_\alpha^2}{2g}$ die **Widerstandshöhe** in bezug auf den Querschnitt F_α.

Unvollständige Kontraktion findet statt, wenn die Einziehung des Strahles nicht auf allen Seiten der Oeffnung vorhanden ist.

Ist p der ganze und u derjenige Teil des Umfanges, auf dem keine Einziehung stattfindet, und bezeichnet μ' den Ausflufs-Koefficienten bei unvollständiger und μ den bei vollständiger Kontraktion, so ist:

für rechteckige Oeffnungen: $\mu' = \mu\left(1 + 0{,}155\,\frac{u}{p}\right)$;

für kreisförmige Oeffnungen: $\mu' = \mu\left(1 + 0{,}128\,\frac{u}{p}\right)$. *)

Unvollkommene Kontraktion findet statt, wenn der Querschnitt der Ausflufsöffnung gegen denjenigen der Wand, in welcher sich die Oeffnung befindet, nicht so klein ist, dafs das Wasser vor der Oeffnung als stillstehend betrachtet werden kann.

Nach Weisbach kann man setzen:

Für **rechteckige** Oeffnungen: $\mu' = \mu\,[1 + 0{,}076\,(9^n - 1)]$,

für **kreisförmige** Oeffnungen: $\mu'' = \mu\,[1 + 0{,}04564\,(14{,}821^n - 1)]$,

wo $n = \frac{F}{F_0}$ das Verhältnis des Querschnitts der Oeffnung zum Querschnitte des ankommenden Wassers, μ den Ausflufs-Koefficienten bei vollkommener*) und μ' bezw. μ'' denselben bei unvollkommener Kontraktion bedeuten. — Werte von μ' und μ'' s. folgende Tafel.

---

*) Unter μ sind die Werte aus 1. S. 224 verstanden.

n	μ'	μ''	n	μ'	μ''
0,05	1,009 μ	1,007 μ	0,55	1,178 μ	1,161 μ
0,10	1,019 μ	1,014 μ	0,60	1,208 μ	1,189 μ
0,15	1,030 μ	1,023 μ	0,65	1,241 μ	1,223 μ
0,20	1,042 μ	1,034 μ	0,70	1,278 μ	1,260 μ
0,25	1,056 μ	1,045 μ	0,75	1,319 μ	1,303 μ
0,30	1,071 μ	1,059 μ	0,80	1,365 μ	1,351 μ
0,35	1,088 μ	1,075 μ	0,85	1,416 μ	1,408 μ
0,40	1,107 μ	1,092 μ	0,90	1,473 μ	1,471 μ
0,45	1,128 μ	1,112 μ	0,95	1,537 μ	1,546 μ
0,50	1,152 μ	1,134 μ	1,00	1,608 μ	1,613 μ

1. Ausflufs aus Oeffnungen in dünner Wand.

Für wagerechte und lotrechte Oeffnungen ist die wirkliche Ausflufs-Geschwindigkeit (Bezeichnungen s. S. 222):

$$v_\alpha = \varphi v = \frac{Q_\alpha}{\alpha F} = \varphi \sqrt{\frac{2g\,(h + \mathfrak{h}_0 - \mathfrak{h})}{1 - \left(\frac{\mu F}{F_0}\right)^2}}; \quad Q_\alpha = \mu F v.$$

Für $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$ und kleines F wird:

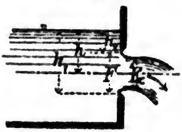
$$v_\alpha = \varphi v = \frac{Q_\alpha}{\alpha F} = \varphi \sqrt{2gh}; \quad Q_\alpha = \mu F v.$$

Bei lotrechter Oeffnung sind dabei für h die Werte einzusetzen, welche den Formeln u. a. 2. S. 221 u. f. entsprechen.

Im Mittel ist bei vollständiger und vollkommener Kontraktion:

$\alpha = 0{,}64 \sim \frac{2}{3}$, $\quad \varphi = 0{,}96$, $\quad \mu = 0{,}615$, $\quad \zeta = 0{,}085$.

Abbild. 162.



Nach Poncelet und Lesbros gelten für den Ausflufs durch rechteckige*) Oeffnungen in lotrechter, dünner Wand, wenn die Druckhöhen h_2 in hinreichender Entfernung oberhalb der Ausflufsöffnung u. zw. von deren Oberkante aus gemessen sind (Abbild. 162), folgende

Werte von μ (für vollständige und vollkommene Kontraktion.)

h_2	Höhe der Oeffnung =						h_2	Höhe der Oeffnung =					
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01		0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
0,05	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,68	1,0	0,61	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63
0,1	0,59	0,61	0,63	0,64	0,65	0,67	1,3	0,60	0,61	0,62	0,62	0,63	0,62
0,3	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,65	1,5	0,60	0,61	0,62	0,62	0,62	0,61
0,5	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,64	2,0	0,60	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61
0,8	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,64	3,0	0,60	0,60	0,61	0,61	0,61	0,61

*) Die Werte dieser Tafel sind unter sonst gleichen Umständen dieselben, welche Seite der rechteckigen Oeffnung auch zur Höhe oder zur Grundlinie genommen

Ist der Wasserspiegel nicht, wie bisher, als stillstehend vorausgesetzt, sondern **bewegt** (wie bei Gerinnen), so ist nach Weisbach der Ausflufs-Koefficient bei vollständiger Kontraktion:

$$\mu_1 = \mu\,(1 + 0{,}641\,m^2),$$

unter m das Verhältnis des Querschnitts der Oeffnung zu dem des Kanals verstanden. Für: *)

$m =$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_1}{\mu} =$	1,00	1,01	1,01	1,03	1,04	1,06	1,08	1,10	1,13	1,16

γ. Rechteckige Ueberfälle.

Für rechteckige Ueberfälle in dünner, lotrechter Wand sind die Ausflufs-Koefficienten μ (nach Poncelet und Lesbros), wenn die Ausflufsmenge:

Abbild. 163.



$$Q_a = \tfrac{2}{3}\,\mu\,F\sqrt{2gh}.$$

1. Bei **vollkommener Kontraktion:**

(Die Druckhöhen h sind in mindestens 1 m Entfernung von der Ausflufsöffnung gemessen.)

Breite der Oeffnung:				Breite der Oeffnung:			
0,2 m		0,6 m		0,2 m		0,6 m	
$h =$	$\frac{2}{3}\mu =$	$h =$	$\frac{2}{3}\mu =$	$h =$	$\frac{2}{3}\mu =$	$h =$	$\frac{2}{3}\mu =$
0,01 m	0,424	0,06 m	0,412	0,08 m	0,397	0,30 m	0,391
0,02	0,417	0,10	0,406	0,10	0,395	0,40	0,391
0,04	0,407	0,15	0,400	0,15	0,393	0,50	0,391
0,06	0,401	0,20	0,395	0,20	0,390	0,60	0,390

2. Bei **unvollkommener Kontraktion** ist nach Weisbach, wenn m das Verhältnis des Querschnittes des wegfliefsenden Wassers (gemessen über der Schwelle) zum Querschnitt des Kanals ist (in einiger Entfernung von der Schwelle), der Ausflufs-Koefficient:

$\mu_3 = \mu\,(1 + 1{,}718\,m^4)$, wenn der Ueberfall nicht die Breite des Kanals hat;

$\mu_4 = \mu\,(1{,}041 + 0{,}3693\,m^2)$, wenn der Ueberfall die Breite des Kanals hat,

worin für μ die Werte aus 1. oben zu entnehmen sind.

---

wird, sobald nur die gröfste Abmessung die kleinste nicht mehr als um das Zwanzigfache überschreitet (nach Lesbros).

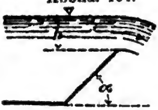
Ferner gelten diese Werte für kreisförmige Oeffnungen (nach Weisbach) und auch für beliebige Oeffnungen, wenn nicht gerade einspringende Winkel vorkommen (Hachette).

*) Unter μ sind die Werte der obigen Tafel verstanden.

Daraus ergiebt sich die folgende Tafel:

$m =$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_3}{\mu} =$	1,000	1,001	1,003	1,007	1,014	1,026	1,044	1,070	1,107
$\frac{\mu_4}{\mu} =$	1,045	1,049	1,056	1,064	1,074	1,086	1,100	1,116	1,133

Abbild. 164.



In dem Falle Abbild. 164 ist:

für $\alpha = 45^0$, $\frac{3}{8}\mu_4 = 0{,}467$;

„ $\alpha = 63\frac{1}{2}^0$, $\frac{3}{8}\mu_4 = 0{,}447$.

2. Ausflufs aus Oeffnungen mit Ansätzen.

α. Cylindrische Ansatzröhren.

1. Bei **vollkommener Kontraktion:**

Verhältnis zwischen Länge und Durchmesser der Ansatzröhre =	1	2 bis 3	12	24	36	48	60
$\mu =$	0,88	0,82	0,77	0,73	0,68	0,63	0,60

Bei derselben Ausflufsöffnung ist bei **konisch konvergenten** Ansatzröhren der Ausflufs-Koefficient gröfser und bei **konisch divergenten** kleiner, als bei cylindrischen Ansatzröhren. Bei $13\frac{1}{2}^0$ Konvergenz des konisch konvergenten Ansatzrohres ist der Ausflufs-Koefficient am gröfsten u. zw. $= 0{,}95$.

2. Bei **unvollkommener Kontraktion,** wenn das Wasser mit nicht zu vernachlässigender Geschwindigkeit am Röhrenansatz ankommt:

$$\mu' = \mu\,(1 + 0{,}102\,m + 0{,}067\,m^2 + 0{,}046\,m^3),$$

worin m das Verhältnis des Röhrenquerschnitts zur Wandfläche ist.

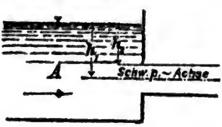
Hiernach ist für:

$m =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\mu'}{\mu} =$	1,013	1,027	1,043	1,060	1,080	1,102	1,127	1,152	1,181

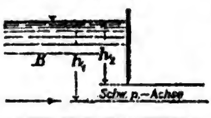
β. Ansatzgerinne.

Die Wassermenge beträgt $Q_\alpha = \mu F \sqrt{2gh}$.

Abbild. 165



Abbild. 166.



1. **Steht die Schützöffnung lotrecht** und schliefsen sich die Gerinne genau an die Oeffnung an (Abbild. 165 und 166), (so dafs also

nur oben eine zugeschärfte Wandung bleibt), so sind nach Versuchen von Lesbros die Ausflufs-Koefficienten: *)

Höhe der Mündung.	Form der Mündung.	Druckhöhe über der oberen Mündungskante oberhalb der Mündung gemessen (h_2):								
		0,02m	0,05m	0,1 m	0,2 m	0,5 m	1 m	1,5 m	2 m	3 m
0,20m	A	0,480	0,511	0,542	0,574	0,599	0,601	0,601	0,601	0,601
	B	0,480	0,510	0,538	0,566	0,592	0,600	0,602	0,602	0,601
	B_1	0,527	0,553	0,574	0,592	0,607	0,610	0,610	0,609	0,608
0,05m	A	0,488	0,577	0,624	0,631	0,625	0,624	0,619	0,613	0,606
	B	0,487	0,571	0,605	0,617	0,626	0,628	0,627	0,623	0,618
	B_1	0,585	0,614	0,632	0,645	0,652	0,651	0,650	0,650	0,649

2. **Steht die Schütze schief** und findet weder am Boden noch an den Seiten der Oeffnung Kontraktion statt, so ist, wenn α den Neigungswinkel der Schütze gegen die Wagerechte in Graden bezeichnet:

$$\mu = 0{,}944 - 0{,}0032\,\alpha.$$

Ist z. B.:	$\alpha = 40^0$	45^0	50^0	55^0	60^0
so wird:	$\mu = 0{,}816$	0,80	0,784	0,768	0,752.

c. Ausflufs des Wassers unter abnehmendem Drucke.

I. Es bezeichne:

h die anfängliche Druckhöhe in m,
G den als konstant vorausgesetzten, wagerechten Querschnitt des Gefäfses, aus dem der Ausflufs stattfindet, in qm,
F den Querschnitt der Ausflufsöffnung in qm,
Q die der anfänglichen Ausflufsgeschwindigkeit entsprechende **wirkliche** Wassermenge, in cbm i. d. Sek., **)
μ den Ausflufs-Koefficienten.

Wenn die zufliefsende Wassermenge gröfser oder kleiner ist, als die ausfliefsende $\mu F \sqrt{2gh}$, so steigt oder sinkt der Wasserspiegel, bis die Druckhöhe $= \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\mu F}\right)^2$ wird, und von da an bleiben Druckhöhe und Ausflufsgeschwindigkeit konstant.

Erhält das Gefäfs keinen Zuflufs, so sinkt der Wasserspiegel gleichförmig verzögert, und die **Zeit zum Entleeren** ist in Sekunden:

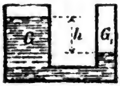
$$t = \frac{2Gh}{\mu F \sqrt{2gh}} = \frac{2Gh}{Q} = 0{,}452\,\frac{G}{\mu F}\sqrt{h}.$$

*) Die Mündungen waren 0,2 m breit und im Verhältnis zum Kanalquerschnitt klein. A und B hatten 3 m lange, wagerechte Ansatzgerinne, die Mündung B_1 (ähnlich gestaltet wie B) hingegen 2,5 m lange, $^1/_{10}$ ihrer Länge geneigte Gerinne.
**) Zur Vereinfachung ist von hier ab stets mit Q (statt Q_α) die wirkliche (nicht theoretische) Ausflufsmenge bezeichnet.

Die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe h in h' übergeht, ist bei freiem Abflufs:

$$t = \frac{2\,G}{\mu\,F\sqrt{2\,g}}\left(\sqrt{h} - \sqrt{h'}\right) = 0{,}452\,\frac{G}{\mu\,F}\left(\sqrt{h} - \sqrt{h'}\right),$$

Abbild. 167.



und beim Ausflusse in ein kommunizierendes Gefäfs vom Querschnitte G_1 (Abbild. 167):

$$t = \frac{2\,G\,G_1\left(\sqrt{h} - \sqrt{h'}\right)}{\mu\,F(G + G_1)\sqrt{2\,g}}.$$

C. Ueberfälle und Ausflüsse bei Wehranlagen und Pfeilereinbauten.

1. Ueberfälle über feste Wehre gewöhnlicher Form.

α. Die **Geschwindigkeit,** mit der das Wasser vor dem Wehr ankommt, **kann vernachlässigt werden.**

Es bezeichne:

Q die Wassermenge, die i. d. Sek. über das Wehr fliefst, in cbm,
b die Breite des Wehres in m,

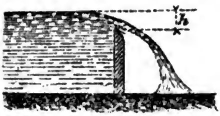
ferner für ein Ueberfallwehr:

h die Höhe des gestauten Wasserspiegels über der Wehrkrone in m,

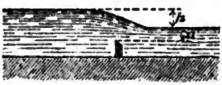
für ein Grundwehr dagegen:

h die Höhe des gestauten Wasserspiegels über dem ungestauten in m, sowie
a die Höhe des ursprünglichen Wasserspiegels über der Wehrkrone in m.

Abbild. 168.



Abbild. 169.



Alsdann ist für ein **Ueberfallwehr** (Abbild. 168):

$$Q = \tfrac{2}{3}\,\mu_1\,b\,h\sqrt{2\,g\,h},$$

und für ein **Grundwehr** (Abbild. 169):

$$Q = \tfrac{2}{3}\,\mu_1\,b\,h\sqrt{2gh} + \mu_2\,b\,a\sqrt{2gh}.$$

Nach Redtenbacher setze man

$\tfrac{2}{3}\,\mu_1 = 0{,}57$ und $\mu_2 = 0{,}62.$ *)

Soll bei gegebenem Q und b die durch ein Wehr zu bewirkende Stauung $= h$ sein, so mufs ein Grundwehr angelegt werden, wenn:

$$Q > 0{,}57\,bh\sqrt{2\,g\,h},$$

ein Ueberfallwehr, wenn:

$$Q < 0{,}57\,bh\sqrt{2\,g\,h},$$

und die Wehrkrone mufs bis an den ungestauten Wasserspiegel reichen, wenn $Q = 0{,}57\,bh\sqrt{2\,g\,h}$ ist.

*) Nach Frese, Z. d. V. d. Ing. 1890. S. 1285 u. f. ist:

$$\mu = \left(0{,}615 + \frac{0{,}0021}{h}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{h}{H}\right)^2\right]. \quad (H = \text{Kanaltiefe}).$$

β. Die **Geschwindigkeit,** mit welcher das Wasser vor dem Wehr anlangt, **kann nicht vernachlässigt** werden.

Die über das Wehr stürzende Wassermasse ist alsdann für ein **Ueberfallwehr:**

$$Q = \tfrac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left[(h+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}} \right],$$

und für ein **Grundwehr:**

$$Q = \tfrac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \left[(h+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}} \right] + \mu_2 b a \sqrt{2g} \sqrt{h+k}.$$

Es ist hierbei:

k die Geschwindigkeitsköhe des Wassers (in m) $= \dfrac{v^2}{2g}$, wobei

v (in m) oberhalb des Wehres gemessen wird.

Für schräge Wehre ist *v* noch mit dem sin des Neigungswinkels gegen die Stromrichtung zu multiplizieren.

Man setze $\tfrac{2}{3}\mu_1 = 0{,}57$ und $\mu_2 = 0{,}62$, wenn die Wehrkrone hoch über der Sohle liegt und bis zu 0,83 wachsend, je mehr sie sich der Sohle nähert.

Zur Berechnung des Wertes *h* für eine bestimmte Höhenlage der Wehrkrone setze man in obigen Gleichungen $k = 0$ und ermittele *h*. Alsdann berechne man das zu diesem *h* gehörige *k* und aus *h* und *k* die zugehörige Wassermenge *Q*. Diese wird gröfser sein, als die gegebene. Durch Probieren findet man ein kleineres *h*, welches mit einem bezüglichen *k* der gegebenen Wassermenge entspricht.

2. Ueberfälle über feste Wehre mit sehr breiter, wagerechter Krone (Abbild. 170).

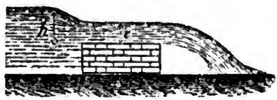
Die Wasserfäden nehmen in diesem Falle über der Wehrkrone eine parallele und wagerechte Richtung an und es ist die Höhe der überfliefsenden Wasserschicht:

$$e = \tfrac{2}{3}(h+k).$$

Die Wassermenge ist:

$$Q = 0{,}35\, b \sqrt{2g}\, (h+k)^{\frac{3}{2}}.$$

Abbild. 170.



3. Durchflufs des Wassers zwischen Brückenpfeilern.

Zur Berechnung des Aufstaues oberhalb der Pfeiler dient die Formel:

$$Q = \tfrac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[(h+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}} \right] + \mu b a \sqrt{2g} \sqrt{h+k}.$$

Hierin bedeutet:

a die Tiefe des ungestauten Wassers in m,

h die Höhe des gestäuten Spiegels über dem ungestauten, in m,

$a + h$ die gestaute Flufstiefe in m,

b die Gesamtlichtweite zwischen den Brückenpfeilern, in m,

b_1 die Breite des Wasserlaufs oberhalb der Pfeiler, in m,

k die Geschwindigkeitshöhe in m, $= \dfrac{v^2}{2g}$,

v die Wassergeschwindigkeit $= \dfrac{Q}{b_1 (a+h)}$.

Nach Eytelwein ist

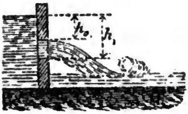
für Pfeiler mit spitzen Vorköpfen: $\mu = 0{,}954$;

für Pfeiler ohne Vorköpfe, normal zum Strome abgeschnitten: $\mu = 0{,}855$.

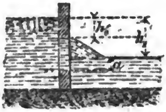
4. Ausflufs des Wassers bei Schleusenwehren und Grundablässen.

Je nachdem die Oeffnung ganz oder nur teilweise über dem Unterwasser oder völlig unter diesem liegt, ergeben sich die Formeln:

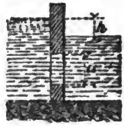
Abbild. 171.



Abbild. 172.



Abbild. 173.



$$Q = \tfrac{2}{3}\,\mu\, b \sqrt{2g}\left[(h_1 + k)^{\frac{3}{2}} - (h_0 + k)^{\frac{3}{2}}\right] \text{ (Abbild. 171)};$$

$$Q = \tfrac{2}{3}\,\mu\, b \sqrt{2g}\left[(h_1 + k)^{\frac{3}{2}} - (h_0 + k)^{\frac{3}{2}}\right] + \mu\, b\, a \sqrt{2g}\sqrt{h_1 + k} \text{ (Abbild. 172)};$$

$$Q = \mu\, b\, a \sqrt{2g}\sqrt{h + k} \text{ (Abbild. 173)},$$

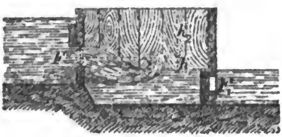
wobei wiederum: $k = \frac{v^2}{2g}$, wenn v (in m i. d. Sek.) die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers bezeichnet.

Den Wert μ rechnet man $= 0{,}6$, wenn die Unterkante der Oeffnung hoch über der Sohle liegt, und $= 0{,}65$ bis $0{,}7$, wenn sie mit dieser gleich hoch liegt.

5. Ausflufs des Wassers aus Schleusen.

Bezeichnet h_1 die Tiefe des Unterwasserspiegels unter und h_2 die Höhe des Oberwasserspiegels über der Mitte der Schützenöffnung einer Schleusenkammer (Abbild. 174),

Abbild. 174.



G den Querschnitt der Kammer,

F die obere Schützenöffnung,

F_1 die untere Schützenöffnung,

so ist die **Zeit zum Anfüllen** der Schleuse:

$$t = \frac{(h_1 + 2\,h_2)\,G}{\mu\, F \sqrt{2\,g\,h_2}}.$$

Die **Zeit zum Entleeren** der Schleusenkammer ist:

α) wenn sich die Mündung im Unterthore ganz unter dem Unterwasserspiegel befindet:

$$t = \frac{2\,G\sqrt{h_1 + h_2}}{\mu\, F_1 \sqrt{2\,g}};$$

β) wenn die Mündung teilweise über dem Unterwasserspiegel hervorsteht und a_1 die Höhe des Teils über, a_2 die des Teils unter dem Unterwasserspiegel, sowie b die Breite der Mündung bezeichnet:

$$t = \frac{2\,G\,(h_1 + h_2)}{\mu\, b \sqrt{2\,g}\,[a_1 \sqrt{h_1 + h_2 - \frac{1}{2}\, a_1} + a_2 \sqrt{h_1 + h_2}]}.$$

D. Bewegung des Wassers in Röhren, Flüssen und Kanälen.

a. Bewegung des Wassers in Druckleitungen.

1. Grundformel.

Die verbrauchte Druckhöhe ist

α. **bei gerader Leitung ohne Querschnittsänderungen:**

$$h_1 = \left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2\,g} = \left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) 0{,}083\, \frac{Q^2}{d^4}.$$

Hierin bezeichnet:

l die Länge der Leitung von dem sie speisenden Behälter aus gerechnet in m,

d den Durchmesser der Leitung in m,

h_1 diejenige Druckhöhe (in m), welche auf der wagerechten Strecke l verbraucht wird,

ζ den Widerstandskoefficienten beim Eintritt des Wassers in die Leitung,

λ den Reibungskoefficienten für die Bewegung des Wassers an den Rohrwandungen, den sogen. „Röhrenwiderstand",

v die Geschwindigkeit des Wassers in m i. d. Sek.,

Q die gelieferte Wassermenge in cbm i. d. Sek.

$\frac{v^2}{2\,g}$ giebt den Teil der verbrauchten Druckhöhe an, welcher dazu verwandt wird, dem Wasser die Anfangsgeschwindigkeit zu erteilen.

$\zeta \frac{v^2}{2\,g}$ bezeichnet den Verlust infolge der Kontraktion beim Eintritt des Wassers in die Leitung. ζ ist im Mittel $= 0{,}505$, läfst sich aber durch Abrundung der Einmündung auf 0,08 herabziehen.

$\lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2\,g}$ endlich giebt die Gröfse der durch die Reibung des Wassers an den Rohrwänden verbrauchten Druckhöhe an.

Liegt der Behälter, der die Leitung speist, aufserhalb der betrachteten Strecke, so fällt aus der Gleichung der Wert $(1 + \zeta) \frac{v^2}{2\,g}$ fort. Dieser Wert ist überhaupt bei längeren Leitungen gegenüber $\lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2\,g}$ zu vernachlässigen. Man erhält alsdann:

$$\text{Reibungshöhe } h_1 = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{16\lambda}{\pi^2 2g} \frac{Q^2 l}{d^5} = 0{,}083\,\lambda \frac{Q^2 l}{d^5},$$

$$\text{Reibungsgefälle } J = \frac{h_1}{l} = 0{,}083\,\lambda \frac{Q^2}{d^5},$$

$$\text{oder: } \frac{J}{Q^2} = 0{,}083\,\lambda \frac{1}{d^5}.$$

Bei wagerechter Leitung giebt das Reibungsgefälle J das Gefälle der Verbindungslinie der Piezometerstände an.

Für einen **beliebigen Querschnitt** vom Inhalte F und benetzten Umfange u ist das Reibungsgefälle

$$J = \frac{h_1}{l} = \frac{\lambda}{4} \frac{u}{F} l \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda}{4} R \frac{v^2}{2g},$$

worin $R = \frac{u}{F}$ als hydraulischer Radius bezeichnet wird (vergl. S. 241).

$$\text{Hieraus folgt: } \quad v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{RJ} = c\sqrt{RJ}$$

als allgemeine Grundformel für die Reibung.

Man erhält bei **rechteckigem Querschnitt** von den Seiten a und b

$$\text{statt: } \lambda \frac{l}{d} \text{ den Ausdruck: } \lambda \frac{a+b}{2ab} l.$$

β. Finden **Abweichungen** der Leitung von der **geraden Linie**, oder **Querschnittsänderungen** statt, so treten die unter **4.** bis **6.** a. S. 235 bis 239 angegebenen Widerstände hinzu.

2. Werte für den Röhrenwiderstand λ.

α. Der Weisbachsche Reibungskoefficient:

$$\lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}.$$

v m i. d. Sek.	λ	v m i. d. Sek.	λ	v m i. d. Sek.	λ
0,05	0,0567	0,70	0,0257	3	0,0198
0,10	0,0443	0,80	0,0250	4	0,0191
0,15	0,0388	0,90	0,0244	5	0,0187
0,20	0,0356	1,00	0,0239	6	0,0183
0,25	0,0333	1,25	0,0229	7	0,0180
0,30	0,0317	1,50	0,0221	8	0,0177
0,40	0,0294	1,75	0,0215	10	0,0174
0,50	0,0278	2,00	0,0211	12	0,0171
0,60	0,0266	2,50	0,0204	15	0,0168

β. Der Darcysche Reibungskoefficient:

$$\lambda = 0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}.$$

Hiernach hängt also λ nur vom Durchmesser der Leitung ab.

Werte von $\frac{J}{Q^2}$ nach Darcy

für Röhren mit glatter Wand.

Bei rostigen oder durch Niederschläge rauh gewordenen Röhren sind die Werte der Tafel mit einem Sicherheitskoefficienten zu multiplizieren, welcher je nach dem Zustande des Rohrinneren und der Reinheit des Wassers zwischen 1 und 2 liegt.

d in m	$\frac{J}{Q^2}$	d in m	$\frac{J}{Q^2}$	d in m	$\frac{J}{Q^2}$	d in m	$\frac{J}{Q^2}$
0,010	58 393 600	0,065	1 972,7	0,225	3,173	0,550	0,03417
0,012	20 657 600	0,070	1 334,4	0,250	1,8548	0,600	0,02203
0,015	5 847 700	0,075	928,31	0,275	1,1419	0,650	0,01472
0,020	1 169 200	0,080	661,65	0,300	0,7339	0,700	0,010135
0,025	340 160	0,085	481,61	0,325	0,4889	0,750	0,007161
0,030	125 200	0,090	357,26	0,350	0,3357	0,800	0,005175
0,035	54 120	0,095	269,45	0,375	0,2367	0,850	0,003816
0,040	26 296	0,100	206,327	0,400	0,17075	0,900	0,002863
0,045	13 960,7	0,125	64,847	0,425	0,12565	0,950	0,002181
0,050	7 945,5	0,150	25,325	0,450	0,09412	1,000	0,001687
0,055	4 781,2	0,175	11,473	0,475	0,07162		
0,060	3 012,8	0,200	5,791	0,500	0,05528		

γ. Der Dupuitsche Reibungskoefficient.

Für Verteilungsnetze von Trinkwasserversorgungen setze man:

$$\lambda = 0{,}03025,$$

worin alle aus den Krümmungen, Abzweigungen, Querschnittsänderungen hervorgehenden Widerstände einbegriffen sind. $\lambda = 0{,}03025$ entspricht, für Röhren von mittlerem Durchmesser ohne derartige Widerstände angewandt, dem Darcyschen λ mit dem Sicherheitskoefficienten 1,5. Mit dem Dupuitschen λ wird $0{,}083\ \lambda$ nahezu gleich $1:400$, so dafs man die Formel schreiben kann:

$$J = \left(\frac{Q}{20}\right)^2 \frac{1}{d^5} \text{ oder } d = 0{,}3018 \sqrt[5]{J Q^2}\,.$$

δ. Weston (1889) erhält durch Vergleich aller bisherigen Versuche:

1) für ganz glatte, reine Röhren:

$$\lambda = 0{,}0126 + \frac{0{,}0173 - 0{,}1085\,d}{\sqrt{v}};$$

2) für neue gufseiserne oder ähnlich beschaffene Röhren den Darcyschen Wert (s. u. β.);

3) für Leitungen, deren Innenwand mit Niederschlag bedeckt ist:

$$\text{bis } d = 0{,}50 \text{ m}: \quad \lambda = 0{,}0156 + \frac{0{,}035}{v};$$

$$\text{bis } d = 0{,}92 \text{ m}: \quad \lambda = \frac{0{,}048}{v} - 0{,}0143 \text{ bis } \frac{0{,}055}{v} - 0{,}0225;$$

4) desgl., bei geringem Niederschlag:

$$\lambda = 0{,}03978 + \frac{0{,}01}{d}.$$

3. Anwendung der Grundformel unter Berücksichtigung der verschiedenen Werte von λ.

α. **Gegeben Q, l, d, gesucht h_1.**

$$h_1 = \left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) 0{,}083 \frac{Q^2}{d^4}.$$

Hierin ist ζ nach S. 231, λ nach folgendem einzusetzen.

1) Nach Weisbach:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = 1{,}2732 \frac{Q}{d^2} \text{ liefert } \lambda \text{ nach Tafel S. 232.}$$

Kann man $1 + \zeta$ vernachlässigen (s. S. 231), so ergiebt sich h_1 unmittelbar aus v nach Tafel S. 236 u. 237.

2) Nach Darcy: d liefert λ entweder unmittelbar nach Formel S. 232, oder $J : Q^2$ nach Tafel S. 233; aus $J : Q^2$ findet man:

$$\lambda = 12{,}05 \frac{J}{Q^2} d^5.$$

Bei Vernachlässigung von $1 + \zeta$ ergiebt sich h_1 durch Multiplikation des gefundenen Wertes $J : Q^2$ mit $Q^2 l$.

3) Nach Dupuit: Unmittelbar nach γ. a. S. 233.

β. **Gegeben l, h_1, Q, gesucht d.**

$$d = 0{,}6073 \sqrt[5]{[(1 + \zeta) d + \lambda l)] \frac{Q^2}{h_1}}.$$

1) Nach Weisbach: Durch Näherung.

Man nehme zunächst schätzungsweise einen Wert d_1 an, welcher durch $v = 1{,}2732 \frac{Q}{d_1^2}$ aus Tafel S. 232 den Wert λ_1 liefert. Durch Einsetzen dieser Werte unter der Wurzel erhält man einen Wert d_2, der das zugehörige λ_2 liefert, u. s. w.

Kann man $1 + \zeta$ vernachlässigen, so liefert die Tafel S. 236 u. 237 durch $v = 1{,}2732 \frac{Q}{d^2}$ unmittelbar den Durchmesser d.

2) Nach Darcy: Kann $1 + \zeta$ vernachlässigt werden, so ergiebt die Tafel S. 233 d aus $J : Q^2$.

Anderenfalls ist der Druckhöhenverbrauch $1 + \zeta$ und darnach der erforderliche Durchmesser durch Proberechnungen festzustellen.

3) Nach Dupuit: Unmittelbar nach γ. a. S. 233.

γ. **Gegeben l, d, h_1, gesucht Q.**

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = 0{,}7854\, d^2 v. \quad \text{(Tafel s. S. 236 u. 237).}$$

Darin bestimmt man v aus der Gleichung:

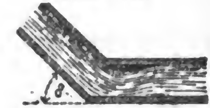
$$v = \frac{\sqrt{2 g h_1}}{\sqrt{1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}}},$$

indem man Näherungswerte annimmt und die zugehörigen Werte von λ nach Weisbach aus S. 232 einsetzt. (Tafel für $\sqrt{2\,g\,h_1}$, s. S. 141.)

4. Druckhöhenverbrauch bei Abweichung der Leitung von der geraden Linie für den Durchgang des Wassers:

α. durch ein **Knie** (Abbild. 175):

Abbild. 175.



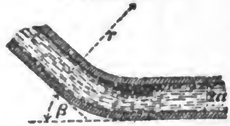
$$h_1 = \zeta_1 \frac{v^2}{2\,g}.$$

$$\zeta_1 = 0{,}9457 \sin^2 \tfrac{1}{2}\,\delta + 2{,}047 \sin^4 \tfrac{1}{2}\,\delta.$$

Für: $\delta =$	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°
ist: $\zeta_1 =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,861	2,431

β. durch eine **gekrümmte cylindrische Röhre** (Abbild. 176):

Abbild. 176.



$$h_1 = \zeta_2 \frac{\beta^0}{90} \frac{v^2}{2\,g}.$$

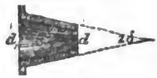
$$\zeta_2 = 0{,}131 + 1{,}848 \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{7}{2}}.$$

Für: $\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ist: $\zeta_2 =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

5. Druckhöhenverbrauch bei Querschnitts-Aenderungen.

α. für ein **kegelförmiges Rohr** (Abbild. 177):

Abbild. 177.

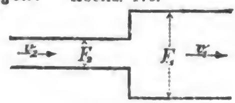


$$h_1 = \frac{1}{8} \frac{\zeta}{\sin \delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] \frac{v^2}{2\,g},$$

wo δ der Winkel ist, den Seite und Achse des Kegels mit einander bilden. (v zu d gehörig.)

β. **bei plötzlichen Querschn.-Aenderungen:**

Abbild. 178.

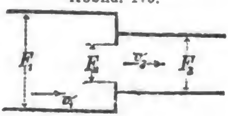


1) in dem Falle der Abbild. 178:

$$h_1 = \frac{(v_2 - v_1)^2}{2\,g} = \left(\frac{F_1}{F_2} - 1\right)^2 \frac{v_1^{\,2}}{2\,g},$$

$$\zeta_1 = \left(\frac{F_1}{F_2} - 1\right)^2;$$

Abbild. 179.



2) in dem Falle der Abbild. 179:

$$h_1 = \left(\frac{F_3}{\alpha\,F_2} - 1\right)^2 \frac{v_3^{\,2}}{2g} \text{ und: } \zeta_1 = \left(\frac{F_3}{\alpha\,F_2} - 1\right)^2,$$

wenn α der dem Durchgange durch F_2 entsprechende Koefficient der vollkommenen bezw. unvollkommenen Kontraktion ist.*)

---

*) Nach neueren Ansichten ist besser zu setzen:

für 1): $\zeta_1 = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - 1$; für 2): $\zeta_1 = \left(\frac{F_3}{\alpha\,F_2}\right)^2 - 1$.

Vergl. hierzu Bach, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891. S. 474.

Tafel der Wassermengen Q und des

Durchm. d. Rohres d in mm	Geschwindigkeit des							
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
							1. Wassermengen in	
40	0,063	0,126	0,188	0,251	0,314	0,377	0,503	0,628
60	0,141	0,283	0,424	0,565	0,707	0,848	1,131	1,414
80	0,251	0,503	0,754	1,005	1,257	1,508	2,011	2,513
100	0,393	0,785	1,178	1,571	1,963	2,356	3,142	3,927
150	0,884	1,767	2,651	3,534	4,418	5,301	7,069	8,836
200	1,571	3,142	4,712	6,283	7,854	9,425	12,566	15,708
250	2,454	4,909	7,363	9,818	12,272	14,726	19,635	24,544
300	3,534	7,069	10,603	14,137	17,671	21,206	28,274	35,343
350	4,811	9,621	14,432	19,242	24,053	28,863	38,485	48,106
400	6,283	12,566	18,850	25,133	31,416	37,699	50,266	62,832
450	7,952	15,904	23,856	31,809	39,761	47,713	63,617	79,522
500	9,818	19,635	29,453	39,270	49,088	58,905	78,540	98,175
600	14,137	28,274	42,411	56,549	70,686	84,823	113,10	141,37
700	19,242	38,485	57,727	76,969	96,211	115,45	153,94	192,42
800	25,133	50,266	75,398	100,53	125,66	150,80	201,06	251,33
900	31,809	63,617	95,426	127,23	159,04	190,85	254,47	318,09
1000	39,270	78,540	117,81	157,08	196,35	235,62	314,16	392,70

2. Druckhöhen-Verbrauch (Widerstandshöhe) $h_1 = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ **für**

Durchm. d. Rohres d in mm	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
40	0,0181	0,0565	0,1114	0,1813	0,2655	0,3633	0,5987	0,8851
60	0,0121	0,0377	0,0742	0,1209	0,1770	0,2422	0,3991	0,5900
80	0,0090	0,0282	0,0557	0,0906	0,1327	0,1817	0,2993	0,4425
100	0,0072	0,0226	0,0445	0,0725	0,1062	0,1453	0,2395	0,3540
150	0,0048	0,0151	0,0297	0,0483	0,0708	0,0969	0,1596	0,2360
200	0,0036	0,0113	0,0223	0,0363	0,0531	0,0727	0,1197	0,1770
250	0,0029	0,0090	0,0178	0,0290	0,0425	0,0581	0,0958	0,1416
300	0,0024	0,0075	0,0148	0,0242	0,0354	0,0484	0,0798	0,1180
350	0,0021	0,0065	0,0127	0,0207	0,0303	0,0415	0,0684	0,1012
400	0,0018	0,0056	0,0111	0,0181	0,0265	0,0363	0,0599	0,0885
450	0,0016	0,0050	0,0099	0,0161	0,0236	0,0323	0,0532	0,0787
500	0,0014	0,0045	0,0089	0,0145	0,0212	0,0291	0,0479	0,0708
600	0,0012	0,0038	0,0074	0,0121	0,0177	0,0242	0,0399	0,0590
700	0,0010	0,0032	0,0064	0,0104	0,0152	0,0208	0,0342	0,0506
800	0,0009	0,0028	0,0056	0,0091	0,0133	0,0182	0,0299	0,0443
900	0,0008	0,0025	0,0049	0,0081	0,0118	0,0161	0,0266	0,0393
1000	0,0007	0,0023	0,0045	0,0073	0,0106	0,0145	0,0239	0,0354

Druckhöhenverbrauches h_1 von Rohrleitungen.

Wassers v in m i. d. Sek.									Durchm. d. Rohres d in mm
0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	

Liter in der Sekunde. $Q = \frac{\pi d^2}{4} v$ (in cbm) ·

0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	d in mm
0,754	0,880	1,005	1,131	1,257	1,571	1,885	2,199	2,513	40
1,696	1,979	2,262	2,545	2,827	3,534	4,241	4,948	5,655	60
3,016	3,519	4,021	4,524	5,027	6,283	7,540	8,796	10,053	80
4,712	5,498	6,283	7,069	7,854	9,817	11,781	13,744	15,708	100
10,603	12,370	14,137	15,904	17,672	22,089	26,507	30,925	35,343	150
18,850	21,991	25,133	28,274	31,416	39,270	47,124	54,978	62,832	200
29,452	34,361	39,270	44,179	49,087	61,359	73,631	85,903	98,175	250
42,411	49,480	56,549	63,617	70,686	88,357	106,03	123,70	141,37	300
57,727	67,348	76,969	86,590	96,211	120,26	144,32	168,37	192,42	350
75,398	87,965	100,53	113,10	125,66	157,08	188,50	219,91	251,33	400
95,426	111,33	127,23	143,14	159,04	198,80	238,57	278,33	318,09	450
117,81	137,45	157,08	176,72	196,35	245,44	294,53	343,61	392,70	500
169,65	197,92	226,19	254,47	282,74	353,43	424,11	494,80	565,49	600
230,91	269,39	307,88	346,36	384,85	481,06	577,27	673,48	769,69	700
301,59	351,86	402,12	452,39	502,66	628,32	753,98	879,65	1005,3	800
381,70	445,32	508,94	572,56	636,17	795,22	954,26	1113,3	1272,3	900
471,24	549,78	628,32	706,86	785,40	981,75	1178,1	1374,4	1570,8	1000

$l = 100$ m **Rohrlänge in Meter.** ($\lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}$ nach Weisbach.)

0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	d in mm
1,2210	1,6052	2,0370	2,5156	3,0404	4,5513	6,3427	8,4092	10,748	40
0,8140	1,0702	1,3580	1,6771	2,0269	3,0342	4,2284	5,6061	7,1652	60
0,6105	0,8026	1,0185	1,2578	1,5202	2,2758	3,1715	4,2046	5,3739	80
0,4884	0,6421	0,8148	1,0062	1,2162	1,8206	2,5371	3,3637	4,2991	100
0,3256	0,4281	0,5432	0,6708	0,8108	1,2137	1,6914	2,2424	2,8661	150
0,2442	0,3211	0,4074	0,5031	0,6081	0,9103	1,2686	1,6818	2,1496	200
0,1954	0,2568	0,3259	0,4025	0,4865	0,7282	1,0148	1,3455	1,7196	250
0,1628	0,2140	0,2716	0,3354	0,4054	0,6069	0,8457	1,1212	1,4330	300
0,1395	0,1835	0,2328	0,2875	0,3475	0,5202	0,7249	0,9610	1,2283	350
0,1221	0,1605	0,2037	0,2516	0,3040	0,4551	0,6343	0,8409	1,0748	400
0,1085	0,1427	0,1811	0,2236	0,2702	0,4046	0,5638	0,7475	0,9554	450
0,0977	0,1284	0,1630	0,2012	0,2432	0,3641	0,5074	0,6727	0,8598	500
0,0814	0,1070	0,1358	0,1677	0,2027	0,3034	0,4228	0,5606	0,7165	600
0,0698	0,0917	0,1164	0,1437	0,1737	0,2601	0,3624	0,4805	0,6142	700
0,0610	0,0803	0,1019	0,1258	0,1520	0,2276	0,3171	0,4205	0,5374	800
0,0543	0,0713	0,0905	0,1118	0,1351	0,2023	0,2819	0,3737	0,4777	900
0,0488	0,0642	0,0815	0,1006	0,1216	0,1821	0,2537	0,3364	0,4299	1000

Ist in Abbild. 179 F_3 der Querschnitt des Zuleitungsrohres, so ergiebt sich nach Weisbach, wenn $F_1 < 10\,F_2$, für:

$F_2 : F_3 =$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha =$ 0,618	0,615	0,612	0,610	0,608	0,608	0,605	0,603	0,600	0,590
$\zeta_1 =$ 231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

Ist $F_3 = F_1$, so ergiebt sich für:

$F_2 : F_3 =$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha =$ 0,625	0,630	0,645	0,660	0,680	0,714	0,750	0,810	0,895	1,080
$\zeta_1 =$ 225,9	47,77	17,51	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

Ist $F_1 \geqq 10\,F_2$, so ist $\alpha =$ konst. $= 0{,}615$, $\zeta_1 = 0{,}085$ (s. S. 224).

6. Druckhöhenverbrauch beim Durchgang des Wassers durch Schieber, Hähne, Drosselklappen, Kegelventile und Ventilklappen*).

Allgemein ist: $$h_1 = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

wobei v die Geschwindigkeit im vollen Rohrquerschnitt bezeichnet.

Im folgenden bedeutet:

F_0 den unverengten Querschnitt des Rohres,

F_1 den durch den Schieber u. s. w. verengten Querschnitt.

Werte von ζ beim Durchgang des Wassers

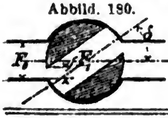
α) durch **Schieber im parallelopipedischen Rohre:**

wenn $\frac{F_1}{F_0} =$ 0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\zeta =$ 0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

β) durch **Schieber im cylindrischen Rohre:**

für							
Stellhöhe $=$	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{F_1}{F_0} =$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
$\zeta =$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

Abbild. 180.



γ) durch einen **Hahn** (Abbild. 180):

	Stellwinkel $\delta =$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	65°	66⅔°	82½°
rechteckiger Hahn-Querschnitt.	$\frac{F_1}{F_0} =$	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	—	—	0	—
	$\zeta =$	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	—	—	∞	—

*) Nach Versuchen von Weisbach, 1842. — Ueber neuere Versuche vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, Aufsätze von Lang.

	Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	65^0	$66\frac{1}{4}^0$	$82\frac{1}{2}^0$
kreisförmiger Hahn-Querschnitt.	$\frac{F_1}{F_0} =$	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091	—	0
	$\zeta =$	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	—	∞

δ) durch **Drosselklappen im parallelopipedischen** (ζ), **bezw. cylindrischen Rohre** (ζ_1) (Abbild. 181):

Abbild. 181.

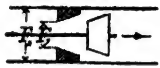


	Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	90^0
für	$\frac{F_1}{F_0} =$	0,826	0,658	0,500	0,357	0,234	0,134	0,060	0
ist:	$\zeta =$	0,45	1,34	3,54	9,27	24,9	77,4	368	∞
	$\zeta_1 =$	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞

ε) durch **Kegelventile** (Abbild. 182):*)

$$\zeta = \left(1{,}645 \frac{F_0}{F_1} - 1\right)^2.$$

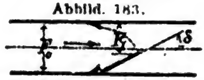
Abbild. 182.



η) durch **Klappenventile** (Abbild. 183):

$$\zeta = \left(\frac{F_0}{\alpha F_1} - 1\right)^2.$$

Abbild. 183.



Für $\delta =$	75^0	70^0	65^0	60^0	55^0	50^0	45^0	40^0	30^0	20^0
ist $\alpha =$	0,178	0,210	0,250	0,289	0,342	0,394	0,458	0,524	0,670	0,811
und $\zeta =$	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	3.2	1,7

b. Steighöhe springender Strahlen.

Es bezeichne:

h die Druckhöhe in m, nach Abzug sämtlicher Widerstände bis zum Eintritt in die Mündung,

s die Steighöhe des Strahls in m.

1. Nach Weisbach ist:

$$s = \frac{h}{\alpha + \beta h + \gamma h^2}.$$

Hierin sind α, β, γ Koefficienten, die von der Form des Mündungsstückes und von der Druckhöhe h abhängen.

Diese Formel ist nur bis zu dem Werte der Druckhöhe h gültig, für welchen $s = \max$ wird, d. h. bis

$$h_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

*) Genauere Angaben für verschiedene Ventilarten nach Bach s. fünfter Abschnitt, Maschinenteile, V.

Nach Weisbach ist für folgende Mundstücke (d Durchm., l Länge):

a) konoidisch, nach der Mündung zu cylindrisch, $d = 10$ mm,
b) kegelförmig mit innerer Abrundung, $l = 40$ mm, $d_1 = 10$ mm, $d_2 = 20$ mm,
c) düsenförmig mit innerer Abrundung, $l = 145$ mm, $d_1 = 10$ mm, Seitenneigung $5\frac{3}{4}^0$,
d) das vorige Mundstück um 40 mm verkürzt,
e) kegelförmig, ähnlich wie c) $l = 245$ mm,
f) cylindrisches Rohr mit innerer Abrundung, $l = 150$ mm, $d = 10$ mm:

	α	β	γ	Gröfste versuchsmäfs. angewandte Druckhöhe. m	h_1 m	$\frac{s}{h}$ für $h = 5$ m	$h = 10$ m	$h = 15$ m
a)	1,0272	0,00048	0,000956	17,8	32,8	0,950	0,887	0,801
b)	1,0162	0,00711	0,000406	20,5	50,0	0,942	0,886	0,824
c)	1,0453	0,00037	0,000859	18,1	34,9	0,936	0,881	0,804
d)	1,0216	0,00239	0,000327	13,5	55,9	0,960	0,928	0,884
e)	1,0600	0,00529	0,007177	17,7	38,4	0,950	0,927	0,876
f)	1,2950	0,00376	0,000602	19,4	46,5	—	0,718	—

2. Nach Freeman*) haben Versuche mit Feuerschlauch-Mundstücken von 19 bis 35 mm Durchmesser folgende Werte der Steighöhen und Sprungweiten (letztere bei 32° Neigung des Mundstücks) ergeben:

Bemerk. Das Mundstück erhält am besten beim Austritt auf 20 mm Länge eine cylindrische glatte Innenfläche.		Durchmesser des Mundstücks in mm	bei Druckhöhe (dicht vor dem Mundstück) h in m = 5	10	15	20	30	40	50	60	70
Steighöhe in m im Mittel	des noch gut zus.-haltenden Strahles bei frischem Winde	19	3,7	7,3	11,0	14,4	16,2	21,6	23,6	24,4	25,4
		35	4,0	7,9	11,6	15,2	18,3	24,6	27,7	29,6	31,0
	d. äufsersten Tropfen (bei Windstille)	19	4,3	8,8	13,1	17,7	25,3	31,0	36,0	39,0	41,0
		35	4,6	9,5	14,0	18,3	27,8	36,0	43,0	48,0	50,0
Sprungweite in m im Mittel	des noch gut zus.-haltenden Strahles bei frischem Winde	19	4,3	7,0	9,5	11,0	14,0	15,8	17,7	19,5	20,8
		35	5,5	9,5	13,1	15,8	20,4	23,0	25,0	27,0	28,7
	d. äufsersten Tropfen (bei Windstille)	19	7,9	15,5	23,2	28,6	35,8	41,0	45,0	48,5	51,0
		35	8,8	17,4	26,6	34,2	47,0	55,0	62,0	67,0	72,0

3. Nach Bach ist die Wassergeschwindigkeit im Mundstück (in m i. d. Sek.), für welche bei Feuerspritzen die Sprungweite des Strahls bei gegebener Mundstücköffnung vom Durchm. d (in cm) am gröfsten ausfällt:

$$v = 20\sqrt[3]{d^2}\ .$$

*) S. Freeman, Verhandlungen der American Society of Civil Engineers, New-York, Nov. 1890; auch Schillings Journal f. Gasbel. u. Wasservers. 1890, Nr. 32 bis 34.

c. Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

1. Gleichförmige Bewegung.

1 Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einem Querschnitte des Kanals — „**mittlere Profilgeschwindigkeit**“ — ist:

$$v = \frac{Q}{F}. \text{ *)}$$

Dabei bedeutet:

Q die durchfliefsende Wassermenge in cbm i. d. Sek.,
F den Querschnitt (Querprofil) des Wasserkörpers in qm.

Ist ferner:

l die Länge einer Kanalstrecke in m,
h das Gefälle derselben in m,
u der benetzte Umfang in m,

und bezeichnet man $\frac{h}{l}$ mit J, $\frac{F}{u}$ mit R (hydraulischer Radius, ideelle Wassertiefe), so ist allgemein (vergl. S. 232):

$$v = c\sqrt{RJ}.$$

Als richtigste Werte von c sind zur Zeit diejenigen von Bazin, sowie von Kutter zu bezeichnen.

Nach **Bazin** ist auf Grund von Messungen in kleinen Versuchskanälen:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{R}}}.$$

Die Werte von α und β sind abhängig von der Rauhigkeit des benetzten Umfanges und es ist im Mittel für:

	Gehobeltes Holz und Cement:	Quader und nicht gehobeltes Holz:	Mauerwerk aus Bruchsteinen:	Erde:	Gerölle: (nach Kutter)
$\alpha =$	0,00015	0,00019	0,00024	0,00028	0,00040
$\beta =$	0,0000045	0,0000133	0,00006	0,00035	0,0007
R in m	**Werte von c.**				
0,10	71,6	55,6	34,5	16,3	11,6
0,15	74,5	59,9	39,5	19,6	14,0
0,20	76,1	62,4	43,0	22,2	16,0
0,25	77,2	64,1	45,6	24,4	17,7
0,30	77,9	65,3	47,7	26,3	19,1

*) Ausführliche Zusammenstellung und kritische Uebersicht der zahlreichen Formeln für v s. Rühlmann Hydromechanik II. Aufl. II. S. 397 u. f.

	Gehobeltes Holz und Cement:	Quader und nicht gehobeltes Holz:	Mauerwerk aus Bruchsteinen:	Erde:	Gerölle: (nach Kutter)
R in m	Werte von c.				
0,35	78,4	66,2	49,3	28,0	20,4
0,40	78,8	66,9	50,6	29,4	21,6
0,45	79,1	67,5	51,8	30,7	22,6
0,50	79,3	67,9	52,7	31,9	23,6
0,60	79,7	68,7	54,2	34,0	25,3
0,70	80,0	69,2	55,4	35,8	26,7
0,80	80,2	69,6	56,3	37,3	28,0
0,90	80,3	69,9	57,1	38,7	29,1
1,00	80,4	70,1	57,7	39,8	30,2
1,10	80,6	70,3	58,3	40,9	31,1
1,20	80,6	70,5	58,7	41,8	31,9
1,30	80,7	70,7	59,1	42,7	32,6
1,40	80,8	70,8	59,5	43,4	33,3
1,60	80,9	71,0	60,0	44,8	34,6
1,80	81,0	71,2	60,5	45,9	35,6
2,00	81,0	71,3	60,9	46,9	36,5
2,50	81,2	71,6	61,5	48,8	38,3
3,00	81,2	71,7	62,0	50,2	39,7
4,00	81,3	71,9	62,6	52,2	41,7
5,00	81,4	72,0	63,0	53,5	43,0
6,00	81,4	72,1	63,2	54,4	44,0

Nach **Kutter** ist auf Grund der Bazinschen Messungen, derjenigen von Humphreys und Abbot im Mississippi und zahlreicher, sonstiger in natürlichen Wasserläufen:

$$c = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{J}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}} \text{*)}.$$

Hierbei ist der Wert n von der Rauhigkeit des benetzten Umfanges abhängig, u. zw. ist im Mittel

für Kanäle von sorgfältig gehobeltem Holze und von glatter Cementverkleidung . . .	$n = 0,010$	$\frac{1}{n} = 100$
„ Kanäle von Brettern	0,012	83

*) Ueber zeichnerische Ermittlung des Wertes c s. die dem Taschenbuche beigegebene Tafel; vergl. auch Zeitschr. d. österr. Arch.- u. Ing.-Vereins 1869, Bl. 9, Abbild. XIII.

für Kanäle von behauenen Quadersteinen und von gut gefügten Ziegelsteinen	$n = 0{,}013$	$\frac{1}{n} = 77$
„ Kanäle von Bruchsteinen	0,017	59
„ Kanäle in Erde, für Bäche, Flüsse . .	0,025	40
„ Gewässer mit gröfseren Geschieben und Wasserpflanzen	0,030	33

Bei Flüssen sinkt im allgemeinen der Rauhigkeitskoefficient vom Quellgebiete nach der Mündung hin.

2. Der **Wasserfaden der mittleren Geschwindigkeit** liegt 0,55 bis 0,6 der Wassertiefe unter dem Spiegel, die Geschwindigkeit des Wasserfadens wird v_{max} im Spiegel selbst oder bis zu 0,33 der Tiefe darunter, v_{min} an der Sohle. Die Geschwindigkeiten nehmen in der Lotrechten ziemlich genau nach einer Parabel zu, deren Scheitel an der Sohle liegt.

Je rauher und je flacher das Bett ist, desto kleiner sind v und v_{min} gegenüber v_{max}.*)

Im allgemeinen ist: $\frac{v_{min}}{v_{max}} = 0{,}83$ bis $0{,}40$; $\frac{v}{v_{max}} = 0{,}95$ bis $0{,}78$.

Genauer ist nach Bazin:

$$\frac{v}{v_{max}} = \frac{1}{1 + 14\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{R}}}.$$

Hieraus ist folgende Tafel berechnet:

R m	Werte von $\frac{v}{v_{max}}$.				
	Gehobeltes Holz und Cement.	Quader und nicht gehobeltes Holz.	Mauerwerk aus Bruchsteinen.	Erde.	Gerölle.
0,10	0,84	0,80	0,71	0,54	0,45
0,20	0,85	0,82	0,76	0,61	0,53
0,30	0,85	0,82	0,77	0,65	0,58
0,40	0,85	0,83	0,78	0,68	0,61
0,50	0,85	0,83	0,79	0,70	0,63
0,70	0,85	0,83	0,80	0,72	0,66
1,00	0,85	0,83	0,81	0,74	0,68

*) Vergl. Annales des ponts et chaussées 1875, Bazin, sur la distribution des vitesses.

R m	Werte von $\frac{v}{v_{max}}$.				
	Gehobeltes Holz und Cement.	Quader und nicht gehobeltes Holz.	Mauerwerk aus Bruchsteinen.	Erde.	Gerölle.
1,50	0,85	0,84	0,81	0,76	0,71
2,00	0,85	0,84	0,81	0,77	0,72
3,00	0,85	0,84	0,82	0,78	0,74
4,00	0,85	0,84	0,82	0,79	0,75
5,00	0,85	0,84	0,82	0,79	0,76
6,00	0,85	0,84	0,82	0,80	0,76

3. Zur **Bemessung der Geschwindigkeit** in Kanälen diene folgende Tafel:

Beschaffenheit des Bettes.	Geschwindigkeit an der Oberfläche. m i. d. Sek.	Mittlere Geschwindigkeit. m i. d. Sek.	Geschwindigkeit am Boden. m i. d. Sek.
Schlammige Erde oder brauner Töpferthon	0,15	0,11	0,08
Fetter Thon	0,30	0,23	0,16
Fetter Flufssand	0,60	0,46	0,31
Kiesiger Boden	1,22	0,96	0,70
Grobsteiniger Boden	1,52	1,23	0,94
Gemisch von Schieferstücken .	2,22	1,86	1,49
Lagerhafte Gebirgsarten . . .	2,75	2,27	1,82
Harte Felsarten	4,27	3,69	3,14

Sollen sich in einem Kanale keine Sinkstoffe niederschlagen, so mufs die mittlere Geschwindigkeit mindestens betragen:

wenn das Wasser leichten Schlamm mit sich führt: $v = 0{,}21$ m i. d. Sek.
wenn das Absetzen von Sand zu befürchten ist: $v = 0{,}42$ m i. d. Sek.

4. **Vorteilhafteste Querschnitte von Kanälen.**

Abbild. 184.



Bezeichnet (Abbild. 184):
a die Tiefe des Kanals,
b die untere Breite desselben,
δ den Böschungswinkel des Ufers,
F den Inhalt des Querschnitts des Kanals,
so hat man den vorteilhaftesten Querschnitt, wenn

$$a = \sqrt{\frac{F \sin \delta}{2 - \cos \delta}} \text{ und: } b = \frac{F}{a} - a \operatorname{ctg} \delta \text{ ist.}$$

Ist der Inhalt des Kanalquerschnitts = 1, so hat man für verschiedene Böschungswinkel in folgender Tafel die vorteilhaftesten Werte von a u. s. w. Bei einem Kanalquerschnitt vom Inhalte F sind die Werte in den Spalten 3, 4, 5, 6 und 7 noch mit $\sqrt{F}$ zu multiplizieren.

Böschungswinkel. δ	Relative Böschung. ctg δ	Tiefe. a	Untere Breite. b	Absolute Böschung. a ctg δ	Obere Breite. $b + 2a$ ctg δ	Benetzter Umfang. u
90°	0,000	0,707	1,414	0,000	1,414	2,828
60°	0,577	0,760	0,877	0,439	1,755	2,632
45°	1,000	0,740	0,613	0,740	2,092	2,704
40°	1,192	0,722	0,525	0,860	2,246	2,771
36° 52′	1,333	0,707	0,471	0,943	2,357	2,828
35°	1,402	0,697	0,439	0,995	2,430	2,870
33° 40′	1,500	0,689	0,418	1,034	2,485	2,904
30°	1,732	0,664	0,356	1,150	2,656	3,012
26° 34′	2,000	0,636	0,300	1,272	2,844	3,144
Halbkreis	—	0,798	—	—	1,596	2,507

Man wählt passend:

Für gegrabene Kanäle in fester Erde mit Uferbekleidung ctg $\delta = 1$
Für Futtermauern . . . . ctg $\delta = 0,5$
Für gegrabene Kanäle in fester Erde ohne Uferbekleidung ctg $\delta = 1,5$
Für Kanäle in lockerer Erde, Sand u. s. w. . . . . ctg $\delta = 2$

Fliefst das Wasser in einem geschlossenen Rohre von kreisförmigem Querschnitte, und läfst man den Wasserspiegel sich dem Scheitel immer mehr nähern, so tritt die gröfste, mittlere Profilgeschwindigkeit ein, wenn der zum benetzten Umfange gehörige Centriwinkel 257° beträgt; die gröfste Wassermasse fliefst ab, wenn der Winkel 308° ist.

2. Ungleichförmige Bewegung.

Die Grundgleichung lautet (Bezeichnungen s. S. 241):

$$dh = \frac{v\,dv}{g} + \frac{1}{R}\frac{v^2}{c^2}\,dl,$$

oder auch:

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} + \int_{l_0}^{l_1} \frac{1}{R}\frac{v^2}{c^2}\,dl.$$

Am häufigsten wird die Gleichung benutzt zur Untersuchung der Form, welche in einem prismatischen Bette der Längenschnitt des Wasserspiegels oberhalb eines Stauwerkes annimmt.

Nach Rühlmann ist, wenn R gleich der Wassertiefe und $v =$ konst. ($dv = 0$) gesetzt wird:

$$\frac{Jl}{t} = \frac{1}{3}\ln\frac{Z}{z} + \frac{2}{3}\frac{Z-z}{t} + \frac{1}{9}\frac{Z^2-z^2}{t^2} - \frac{1}{27}\frac{Z^3-z^3}{t^3} + \frac{1}{108}\frac{Z^4-z^4}{t^4}$$
$$- \frac{1}{468}\frac{Z^6-z^6}{t^6} + \frac{1}{567}\frac{Z^7-z^7}{t^7} - \frac{1}{972}\frac{Z^8-z^8}{t^8} = \Phi\left(\frac{Z}{t}\right) - \Phi\left(\frac{z}{t}\right).$$

Hierin bedeutet:

Z die Höhe des gestauten Wasserspiegels über dem ursprünglichen am unteren Ende der Strecke l in m,

z denselben Wert für das obere Ende,

J das ursprüngliche relative Gefälle des ungestauten Wasserspiegels bezw. der Sohle,

t die Tiefe des ungestauten Wasserlaufes in m.

Tafel der Werte $\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$.

$\frac{Z}{t}$	$\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$	$\frac{Z}{t}$	$\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$	$\frac{Z}{t}$	$\Phi\left(\frac{Z}{t}\right)$
0,01	0,0067	0,6	1,7980	2,0	3,3595
0,02	0,2444	0,7	1,9266	2,5	3,8754
0,03	0,3863	0,8	2,0495	3,0	4,3844
0,04	0,4889	0,9	2,1683	3,5	4,8911
0,05	0,5701	1,0	2,2841	4,0	5,3958
0,06	0,6376	1,1	2,3971	5,0	6,4019
0,07	0,6958	1,2	2,5084	6,0	7,4056
0,08	0,7482	1,3	2,6179	8,0	9,4097
0,09	0,7933	1,4	2,7264	10,0	11,4117
0,1	0,8353	1,5	2,8337	15,0	16,4139
0,2	1,1361	1,6	2,9401	20,0	21,4147
0,3	1,3428	1,7	3,0458	30,0	31,4153
0,4	1,5119	1,8	3,1508	50,0	51,4157
0,5	1,6611	1,9	3,2553	100,0	101,4158

Nimmt man an, dafs den natürlichen Schwankungen im Wasserspiegel gegenüber ein Stau von $\frac{z}{t} = 0{,}01$ vernachlässigt werden darf, so ist die **Stauweite:**

$$l = \frac{t}{J}\left[\Phi\left(\frac{Z}{t}\right) - \Phi(0{,}01)\right].$$

E. Wirkung des Wassers durch Stofs.

a. Stofs der Wasserstrahlen:

Es bezeichne:

P den Stofs des Wassers oder hydraulischen Druck eines Wasserstrahles gegen eine Fläche in kg,

F den Querschnitt des Wasserstrahles in qm,
v die Geschwindigkeit des Wasserstrahles in m i. d. Sek.,
c die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Fläche in der Richtung des Wasserstrahles bewegt, in m i. d. Sek.,
Q die Wassermenge, welche i. d. Sek. zum Stofs gelangt, in cbm; es ist: $Q = (v - c) F$, wenn immer dieselbe Fläche gestofsen wird, dagegen $Q = v F$, wenn, wie bei Wasserrädern, sich eine ununterbrochene Reihe von Flächen dem Strahle entgegenstellt,
γ das Gewicht eines cbm Wassers $= 1000$ kg,
α den Winkel, um den der Wasserstrahl abgelenkt wird.

1. Gerader Stofs.

α) Allgemein ist:

$$P = \frac{\gamma}{g} Q (v - c)(1 - \cos\alpha).$$

β) Für eine Ebene normal zur Richtung des Strahls, welche so grofs ist, dafs die Wasserstrahlen sämtlich um 90° abgelenkt werden, ist:

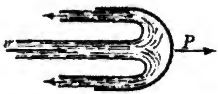
$$P = \frac{\gamma}{g} Q (v - c),$$

und wenn die Ebene sich in Ruhe befindet:

$$P = \gamma F \frac{v^2}{g} = 2 \gamma F h.$$

γ) Werden die Wasserstrahlen, wie in Abbild. 185 gezwungen, in der entgegengesetzten Richtung wieder abzufliefsen, so ist:

Abbild. 185.



$$P = 2 \frac{\gamma}{g} Q (v - c).$$

δ) Die Arbeitstärke $E = P c$ (in mkg i. d. Sek.) **des Stofses** ist ein Maximum, wenn $c = \frac{1}{2} v$, und es ist alsdann

für den Fall β): $$E = \frac{1}{2} \frac{v^2}{2g} Q \gamma = \frac{1}{2} Q h \gamma;$$

für den Fall γ): $$E = \frac{v^2}{2g} Q \gamma = Q h \gamma.$$

2. Schiefer Stofs.

Ist der **Stofs unter dem Winkel** α **gegen eine Ebene gerichtet,** so wird der **Gesamtstofs** in der Richtung des Strahles, wenn das Wasser ausweichen kann:

α) nur nach einer Seite (Abbild. 186):

Abbild. 186.

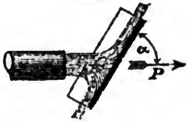


$$P = (1 - \cos\alpha) \frac{v - c}{g} Q \gamma;$$

β) nach zwei Seiten hin (Abbild. 187):

$$P = \sin^2\alpha \frac{v - c}{g} Q\gamma;$$

Abbild. 187.



γ) nach allen Seiten:

$$P = \frac{2\sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha} \frac{v - c}{g} Q\gamma;$$

der **Seitenstofs** in Fall α) und β):

$$S = \sin 2\alpha \frac{v - c}{2g} Q\gamma.$$

b. Stofs des unbegrenzten Wassers gegen ruhende Körper. Widerstand gegen bewegte Körper.

Es bezeichne:

F den Querschnitt der der Wirkung des Wassers ausgesetzten Fläche in qm,
v die relative Geschwindigkeit des Wassers gegen dieselbe in m,
ζ einen von der Länge des Körpers, sowie von Form und Gröfse der Vorderfläche abhängenden Koefficienten,
l die Länge des Körpers in m,
P und γ dasselbe, wie unter **a.**

Dann ist allgemein $P = \zeta\gamma F \frac{v^2}{2g}$.

Hierin ist nach Dubuat und Duchemin:

1. für einen **prismatischen Körper mit stumpfen Enden:**

wenn:	$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03$	1,0	2,0	3,0
bei Stofs des Wassers . . .	$\zeta = 1{,}86$	1,47	1,35	1,33
bei Widerstand des Körpers .	$\zeta = 1{,}43$	1,17	—	1,10

2. **für einen prismatischen Körper mit zugeschärften Enden.**

Vorausgesetzt ist, dafs die Länge des ganzen Körpers gleich ist der 5- bis 6-fachen Breite. Der Widerstandskoefficient geht über in ζ_1. Nach Bossut, d'Alembert u. A. ist

α) **bei zugeschärfter Vorderseite:**

Halber Zuschärfungswinkel =	78°	66°	54°	42°	30°	18°	6°
$\zeta_1 : \zeta =$	0,96	0,85	0,69	0,54	0,44	0,41	0,40

β) **bei zugeschärfter Hinterseite:**

Halber Zuschärfungswinkel =	69°	48°	24°	12°
$\zeta_1 : \zeta =$	0,94	0,89	0,86	0,84.

Nach Borda leistet den geringsten Widerstand eine Ellipse, nämlich 0,39 von demjenigen einer gleich grofsen ebenen Fläche.

Ueber Widerstand von schwimmenden Körpern s. u. Abteil. II, Schiffbau.

Nach Messungen von 1842—1880 betrug der Stofs der Meereswellen im Maximum 32 000 kg f. d. qm. Am Leuchtturm zu Merry wurden in 12 m Höhe Blöcke von 13 000 kg losgerissen.

F. Wassermessungen.

a. Ermittlung von Geschwindigkeiten.

Unmittelbar durch Schwimmer; **Stab des Cabeo**, ein Blechrohr mit Boden und Deckel, das mit Schrot bis zum geeigneten Eintauchen gefüllt, unmittelbar die mittlere Profilgeschwindigkeit angiebt; zwei verbundene **Hohlkugeln**, von denen eine untertaucht, wenig genau. Das **Log** ermittelt die Oberflächengeschwindigkeit, woraus nach S. 248 die mittlere Profilgeschwindigkeit bestimmt werden kann.

Bequemere Messungen:

1) durch die **Pitot-Darcysche Röhre.** Diese giebt die Geschwindigkeit aus dem Höhenunterschiede h zwischen den Wasserständen in dem hydraulischen und in dem hydrostatischen Rohr.

$$v = \psi_1 \sqrt{2\,g\,h} = \psi \sqrt{h},$$

worin ψ durch Versuche zu bestimmen.

2) Durch den **Woltmannschen Flügel**, durch elektrische Ablesung verbessert von Amsler. Giebt die Geschwindigkeit abhängig von der Umdrehungszahl u:

$$v = \alpha + \beta u.$$

α und β sind zu bestimmen, indem man den Flügel mit bekannter Geschwindigkeit durch ruhiges Wasser führt.

b. Ermittlung von Wassermengen.

In **gröfseren Wasserläufen** durch Messung eines Querprofils senkrecht zum Stromstrich und der mittleren Geschwindigkeit in diesem. Zur Bestimmung kleinerer Wassermengen dient der **Wasserzoll**, ein Strahl, der durch eine Kreis-Oeffnung von 1 Zoll Durchmesser unter möglichst kleinem Druck abfliefst. Der Mefsapparat besteht aus einem Kasten mit mehreren solcher Oeffnungen, von denen so viele durch Stöpsel verschlossen werden, dafs das Wasser gerade den oberen Rand der nicht verschlossenen berührt.

Nach Hagen ist ein W.-Z. in rheinl. Mafs = 0,00602 Kub.-Fufs i. d. Sek. = 520 Kub.-Fufs in 24 Std.

In **Rohrleitungen** geschieht die überschlägliche Messung einer ein bestimmtes Rohr durchlaufenden Menge bequem durch Ermittlung des an zwei Stellen des Rohres herrschenden Drucks. Ist h der Druckunterschied in m. Wassersäule, d der Durchmesser des Rohres,

l die Länge, λ der Reibungskoefficient (s. S. 231), $\Sigma\zeta_n$ die Summe sämtlicher Krümmungswiderstände, so ist:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta_n}} = \frac{4{,}429\sqrt{h}}{\sqrt{\lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta_n}} \; ^{*)}.$$

VII. MECHANIK DER GASE UND DÄMPFE.

(Als Anwendung der mechanischen Wärmetheorie; vergl. III. Abschnitt, S. 300.)

A. Allgemeines.

Sämtliche Gase (Dämpfe) lassen sich bei Anwendung mehr oder weniger starker Drücke und Temperaturerniedrigungen in den tropfbar flüssigen Zustand überführen. Jedoch giebt es für jedes Gas eine Temperatur, die sogen. **kritische Temperatur,** die höchstens erreicht werden darf, wenn noch eine Ueberführung in den tropfbar flüssigen Zustand möglich sein soll; oberhalb dieser Temperatur ist kein Druck im Stande die Kondensation herbeizuführen.

Man nennt den Dampf einer Flüssigkeit **gesättigt,** wenn unter Beibehaltung der sonstigen Verhältnisse eine unendlich kleine Temperaturerniedrigung genügt, um eine Kondensation herbeizuführen, **überhitzt,** wenn zur Kondensation eine endliche Temperaturerniedrigung erforderlich ist. Dampf in Verbindung mit der zugehörigen Flüssigkeit ist stets gesättigt. Stark überhitzte Dämpfe nennt man Gase.

Der **Druck** von Gasen und Dämpfen wird je nach der Stärke **gemessen** in Millimeter Wassersäule, Millimeter Quecksilbersäule, kg f. d. qm, kg f. d. qcm und in Atmosphären.

1 neue Atm. **)	= 1 kg f. d. qcm = 735,51 mm Quecksilbersäule	= 27,171 Pariser Zoll,
	= 14,223 engl. Pfd. f. d. Q.-Z.	= 28,958 Engl. Zoll,
	= 13,681 preufs. Pfd. f. d. Q.-Z.	= 28,122 preufs. Zoll,
1 alte Atm.	= 1,0333 kg f. d. qcm = 760 mm Quecksilbers.	= 28,075 Pariser Zoll,
	= 14,696 engl. Pfd. f. d. Q.-Z.	= 29,922 Engl. Zoll,
	= 14,136 preufs. Pfd. f. d. Q.-Z.	= 29,058 preufs. Zoll.

$$1 \text{ mm Wassersäule} = \frac{1}{13{,}59} = 0{,}0736 \text{ mm Quecksilbersäule.}$$

1 mm Quecksilbersäule = 13,59 mm Wassersäule.

Zur Umrechnung von mm Quecksilbersäule in neue Atm. kann die Tafel a. S. 258 u. 259, Sp. 1 u. 2 dienen.

---

*) Näheres s. Rühlmann, Hydromechanik, S. 528 u. f.

) Die Bezeichnung Atm. bedeutet in folgendem **stets neue Atmosphären.

B. Zustandsgleichungen.

a. Zustandsgleichungen für Gase und überhitzte Dämpfe.

Mariotte-Gay-Lussacsches Gesetz.

Mit hinreichender Annäherung gültig für Gase, welche weit von ihrem Kondensationspunkte entfernt sind.

1. Bezeichnet für einen bestimmten Zustand des Gases:
p den Druck in kg f. d. qm (specifische Spannung),
v das Volumen von 1 kg in cbm (specifisches Volumen),
$\gamma = \frac{1}{v}$ das Gewicht von 1 cbm in kg (Dichtigkeit),
t die Temperatur in Graden C,
$T = a + t$ die **absolute Temperatur,** wobei
$\frac{1}{a} = \alpha$, gleich dem Ausdehnungskoefficienten des Gases ist,
(vergl. S. 252)
sind ferner p_0, v_0, γ_0, t_0, T_0 die Werte von p, v, γ, t, T für einen beliebigen anderen Zustand des Gases, so ist:

$$\frac{vp}{v_0 p_0} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} = \frac{\frac{1}{\alpha} + t}{\frac{1}{\alpha} + t_0} = \frac{a + t}{a + t_0} = \frac{T}{T_0};$$

$$\frac{v p}{T} = \frac{v_0 p_0}{T_0} = \text{konst.} = R;$$

$$v p = R T = \frac{p}{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{I.}$$

Gas oder Dampf.	Konstante R. mkg f.d.kg.	Gewicht von 1 cbm bei 760 mm Druck und $t = 0°$ C. γ. (kg)	Gewicht von 1 cbm bei $p = 1$ kg f. d. qcm und $t = 0°$C. γ. (kg)	Specifisches Gewicht bezogen auf Luft = 1.	Verhältnis der specif. Wärmen*) $n = \frac{c_1}{c}$.
Trockene atm. Luft	29,27	1,2932	1,2510	1,0000	1,410
Mittelfeuchte Luft	29,38	1,2883	1,2468	0,9962	1,410
Sauerstoff . . .	26,47	1,4298	1,3837	1,1056	1,403
Stickstoff . . .	30,13	1,2562	1,2157	0,9714	1,411
Wasserstoff . .	422,59	0,08957	0,08668	0,06927	1,413
Kohlenoxyd . .	30,26	1,2509	1,2106	0,9673	1,411
Wasserdampf . . .	46,95	0,8062	0,7802	0,6233	1,300
Kohlensäure . . .	19,20	1,9774	1,9136	1,5291	1,263
Ammoniak	52,64	0,7655	0,7408	0,5920	1,299

*) Vergl. S. 287.

Der Ausdehnungskoefficient ist für alle Gase u. zw. für alle Temperaturen nahezu konstant.

$$\alpha = 0{,}003\,665 = \frac{1}{273}. \qquad (a = 273).$$

2. In der Nähe der Kondensationsgrenze weicht a mehr oder weniger von obigem Werte ab, auch giebt das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz nur annähernd richtige Werte. R ist hierbei nicht genau konstant; die klein gedruckten Werte der Tafel sind Mittelwerte von R aus verschiedenen Zuständen.

Für genauere Rechnung ist nach G. Schmidt auf Grund der Versuche von Hirn für **überhitzten Wasserdampf** unter Beibehaltung des Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetzes zu setzen

$$a = 263 \text{ und } R = 46{,}83.$$

Zeuner empfiehlt die Formeln:

für **überhitzten Wasserdampf:**

$$p v = 50{,}9\,T - 192{,}5 \sqrt[4]{p},$$

für **überhitzten Ammoniakdampf:**

$$p v = 52{,}642\,T - 29{,}783\,p^{0{,}3655}.$$

Für gasförmige **Kohlensäure** ist in der Regel das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz ausreichend; genauere Ergebnisse liefert die Zustandsgleichung von Clausius (gemäfs Versuchen von Andrews):*)

$$p = \frac{0{,}003\,688\,T}{v - 0{,}000\,843} - \frac{2{,}0935}{T(v + 0{,}000\,977)^2}.$$

3. Besondere Fälle.

Setzt man in der Zustandsgleichung

$$v p = R T$$

p konstant, so folgt daraus das **Gay-Lussacsche Gesetz:**

$$v = \text{konst } T.$$

Bei konstantem Druck sind die Volumen den absoluten Temperaturen proportional, oder

$$\frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1}, \qquad \frac{v}{v_1} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}.$$

Für $T =$ konst. folgt das **Mariottesche Gesetz:**

$$v p = \text{konst.}$$

oder:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p}.$$

Bei gleichen Temperaturen verhalten sich die Volumen umgekehrt wie die Drücke.

---

*) Vergl. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1886, S. 110; daselbst befindet sich eine Sammlung von Werten von p.

4. Eigenschaften der Konstanten R. Daltonsches Gesetz.

Für verschiedene Gase verhalten sich die Konstanten R umgekehrt wie ihre Molekulargewichte und umgekehrt wie ihre Dichtigkeiten:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{\gamma_1}{\gamma},$$

worin ε und ε_1 die zu R bezw. R_1 gehörigen Molekulargewichte, γ und γ_1 die Dichtigkeiten bezeichnen.

Für die Konstante von **Gasgemischen** gilt die Beziehung:

$$R_m = \frac{\Sigma R G}{\Sigma G} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

Es bedeutet hierin G das Gewicht und R die Konstante der verschiedenen zur Mischung gelangenden Gase; die Zustandsgleichung für Gasgemische lautet somit

$$p v = \frac{\Sigma R G}{\Sigma G} T = R_m T.$$

Diese Gleichung drückt das **Daltonsche Gesetz** aus, welches lautet:

Der von einem Gasgemisch ausgeübte specifische Druck ist gleich der Summe der specifischen Drücke, welche die einzelnen Gase ausüben würden, wenn jedes für sich einen Raum erfüllte, welcher gleich dem von der Mischung erfüllten ist.

Beispiel. Es ist die Konstante für die Abgase einer Gasmaschine zu bestimmen, welche wie folgt zusammengesetzt seien:

Kohlensäure 11, Wasserdampf 9, Sauerstoff 6, Stickstoff 74 G.-T.

Nach der Tafel a. S. 251 ergiebt sich:

$$R_m = \frac{19{,}20 \,.\, 11 + 46{,}95 \,.\, 9 + 26{,}47 \,.\, 6 + 30{,}13 \,.\, 74}{100} = 30{,}22.$$

Wird der Wasserdampf kondensiert, so ist

$$R_m = \frac{19{,}20 \,.\, 11 + 26{,}47 \,.\, 6 + 30{,}13 \,.\, 74}{91} = 28{,}57.$$

5. Specifisches Gewicht von Gasen, Gasgemischen und überhitzten Dämpfen.

Specifisches Gewicht von Gasen u. s. w. bei $t = 0^\circ$ C und $p = 10000$ kg f. d. qm s. Tafel S. 251.

Sind für ein Gas oder Gasgemisch der specifische Druck und die Temperatur bekannt, so ergiebt sich das Gewicht von 1 cbm zu

$$\gamma = \frac{p}{R T} = \frac{p}{R (273 + t)},$$

wenn p in kg f. d. qm gegeben ist.

Ist der Druck in mm Quecksilbersäule $= p'$ gegeben, so ist:

$$\gamma = 13{,}59 \frac{p'}{R T} = 13{,}59 \frac{p'}{R (273 + t)}.$$

V cbm **trockene Luft** wiegen somit

$$0{,}034165 \frac{p V}{273 + t} \text{ kg}$$

$$\text{bezw. } 0{,}4643 \frac{p' V}{273 + t} \text{ kg.}$$

Für **Gasgemische** ist der Wert R_m aus Gleichung II einzuführen.

Feuchte, aber nicht vollständig gesättigte **Luft** ist als ein Gemisch von Luft und überhitztem Wasserdampf anzusehen und ist somit nach der Formel für Gasgemische zu behandeln.

Beispiel. Wie viel wiegt 1 cbm feuchter Luft von 4 $\frac{0}{0}$ Wassergehalt bei einer Temperatur von 50° C und 750 mm Barometerstand? — Nach Formel II und Tafel a. S. 251 ist:

$$R_m = \frac{4 \cdot 46{,}95 + 96 \cdot 29{,}27}{100} = 29{,}98,$$

$$\gamma = 13{,}59 \frac{750}{29{,}98\,(273 + 50)} = 1{,}053 \text{ kg.}$$

Bei überschläglichen Rechnungen genügt für Luft mittlerer Feuchtigkeit die Formel:

$$\gamma = 1{,}3 - 0{,}004\,t \text{ kg},$$

und für **Rauchgase** mittlerer Zusammensetzung:

$$\gamma = 1{,}25 - 0{,}0027\,t \text{ kg};$$

da indes die Zusammensetzung der Rauchgase je nach dem verwandten Brennstoff und der mehr oder weniger reichlichen Luftzuführung eine sehr wechselnde ist, so empfiehlt sich die genauere Berechnung auf Grund der Analyse der Gase.

b. Zustandsgleichungen für gesättigte Dämpfe.

1. Allgemeines.

Der Druck gesättigter, nasser Dämpfe ist unabhängig von dem specifischen Volumen und somit eine Funktion der Temperatur allein:

$$p = f(t).$$

Die Funktion ist sehr verwickelter Natur. Man hat aus den Versuchen von Regnault eine grofse Zahl Formeln abgeleitet, von denen die Biotsche die gebräuchlichste ist:

$$\log p = a + b\,\alpha^{t - t_0} + c\,\beta^{t - t_0};$$

hierin sind a, b, c, α, β, t_0 Konstanten, t_0 ist willkürlich als Temperatur, welche dem kleinsten Drucke der Versuchsreihe entspricht, gewählt.

Man benutzt indes gewöhnlich Tafeln, welche nach dieser oder ähnlichen Formeln berechnet sind (vergl. die Tafeln a. S. 257 bis 259, welchen vorstehende Formel zu Grunde liegt).

Neben den schon a. S. 251 angeführten Bedeutungen der Gröfsen p, v, γ, t, T bezeichne:

A das Wärmeäquivalent der Arbeit $= \frac{1}{428}$ WE. f. 1 mkg (vergl. mechanische Wärmetheorie, S. 301),

q die **Flüssigkeitswärme,** d. h. diejenige Wärmemenge in WE., welche 1 kg einer Flüssigkeit zugeführt werden mufs, um deren Temperatur ohne Aenderung der Aggregatform von 0° auf t° C zu

erhöhen (da man hierbei wegen der verhältnismäfsig geringen Ausdehnung die äufsere Arbeit vernachlässigen kann, so ist der äufsere Druck gleichgültig),

c_2 die specifische Wärme der Flüssigkeit,

r die **Verdampfungswärme**, auch latente Wärme genannt, d. h. diejenige Wärmemenge in WE., welche erforderlich ist, um 1 kg der Flüssigkeit von t^0 entgegen dem konstanten äufseren Drucke in Dampf von derselben Temperatur zu verwandeln,

λ die **Gesamtwärme**, d. h. die Summe aus der Flüssigkeits- und der Verdampfungswärme; es ist also vorausgesetzt, dafs die Flüssigkeit von 0^0 sofort unter den der Temperatur t entsprechenden Druck gesetzt, bei diesem auf t^0 erwärmt und schliefslich in Dampf von t^0 verwandelt wird,

ϱ die **innere Verdampfungswärme**, d. i. der Teil der Verdampfungswärme, welcher zur Vermehrung der inneren Wärme verwandt wird,

J die **Dampfwärme**, d. h. die Differenz der in 1 kg Dampf von t^0 und der in 1 kg der Flüssigkeit von 0^0 enthaltenen Wärmemengen,

w das Volumen von 1 kg Flüssigkeit in cbm,

u die Differenz $v - w$.

Für **gesättigten Dampf** sind die Gröfsen γ (oder v), p, t durch eine von ihnen bestimmt.

Der Wärmewert der bei der Verdampfung von 1 kg Flüssigkeit zur Ueberwindung des konstanten, äufseren Druckes p verwandten Arbeit ist gleich Apu. Im Gegensatze zu ϱ nennt man diese Wärmemenge **äufsere Verdampfungswärme**.

Es ist:

$$\lambda = q + \varrho + Apu; \qquad \ldots \ldots \quad 1)$$

$$r = \varrho + Apu; \qquad \ldots \ldots \quad 2)$$

$$J = q + \varrho; \qquad \ldots \ldots \quad 3)$$

hiernach ergiebt sich folgendes Bild:

$$\overbrace{q \qquad \varrho \qquad Apu.}^{\lambda}$$

$$\underbrace{q \qquad \varrho}_{J}\underbrace{\qquad Apu}_{r}$$

Zur Berechnung von Apu dient die **Clapeyronsche Gleichung:**

$$Apu = \frac{pr}{T\dfrac{\partial p}{\partial t}}; \qquad \ldots \ldots \quad 4)$$

u wird daraus durch Multiplikation mit $\dfrac{428}{p}$ gefunden.

Die Flüssigkeitswärme ist:

$$q = \int c_2\, dt; \qquad \ldots \ldots \quad 5)$$

2. Anwendung auf gesättigten Wasserdampf.

Die specifische Wärme des Wassers ist nach Regnault:

$$c_w = 1 + 0{,}000\,04\,t + 0{,}000\,0009\,t^2;\text{*)}$$

folglich die Flüssigkeitswärme:

$$q = \int_0^t c_w\,dt = t + 0{,}000\,02\,t^2 + 0{,}000\,0003\,t^3.$$

Die Gesamtwärme ist nach Regnault:

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\,t.$$

Die innere Verdampfungswärme ergiebt sich aus:

$$\varrho = \lambda - q - Apu.$$

Da man annähernd w als unabhängig von der Temperatur annehmen und konstant = 0.001 setzen kann, so wird:

$$v = u + 0{,}001$$

und:

$$\gamma = \frac{1}{u + 0{,}001}.$$

Diese Gleichungen genügen nebst den unter **1.** angeführten, allgemeinen Gleichungen zur Berechnung der Werte der Tafel a. S. 257 u. f.

Da die Benutzung der Clapeyronschen Gleichung zur Berechnung von Apu wegen der verwickelten Form der Funktion $p = f(t)$ schwierig ist, so hat Zeuner folgende empirische Näherungsformeln aufgestellt:

$$\varrho = 575{,}40 - 0{,}791\,t;$$

folglich:

$$Apu = \lambda - q - \varrho = 31{,}10 + 1{,}096\,t - q;$$

$$\gamma = 0{,}5877\,p_1^{0{,}9393},$$

worin p_1 den Druck in kg f. d. qcm (Atm.) bedeutet.

3. Anwendung auf gesättigten Ammoniakdampf.

Die specifische Wärme kann nach Zeuner gesetzt werden: **)

$$c_a = 1{,}012\,35 + 0{,}008\,378\,t,$$

die Flüssigkeitswärme somit:

$$q_a = 1{,}012\,35\,t + 0{,}004\,189\,t^2,$$

die Gesamtwärme:

$$\lambda_a = 314{,}865 + 0{,}369\,32\,t - 0{,}000\,525\,t^2;$$

ferner, ähnlich wie unter **2.**:

$$Apu = 30{,}248 + 0{,}069\,38\,t - 0{,}000\,235\,t^2;$$
$$\varrho = 284{,}617 - 0{,}712\,41\,t - 0{,}004\,479\,t^2;$$
$$r = 314{,}865 - 0{,}643\,03\,t - 0{,}004\,714\,t^2.$$

---

*) In technischen Rechnungen setzt man häufig c_w = konst. = 1,0224.

**) Vergl. Zeuner, Technische Thermodynamik II. Teil, S. 258.

Tafel für gesättigten Wasserdampf. *) Nach Temperaturen geordnet.

Temperatur in Graden C.	Spannung in mm Quecksilbersäule.	Gesamtwärme in WE.	Flüssigkeitswärme in WE.	Latente Wärme in WE.	Innere Verdampfungswärme in WE.	Aeufsere Verdampfungswärme in WE.	Differenz der spec. Volumen von Dampf und Wasser in cbm f. d. kg.	Gewicht des Dampfes in kg f. d. cbm.
t	p_1	λ	q	$r=\lambda-q$	ϱ	Apu	$u=v-w$	$\gamma=\frac{1}{v}$.
— 20	0,927	600,400	— 19,994	620,394	590,824	29,570	1004,17	0,000996
— 15	1,400	601,925	— 14,996	616,921	586,994	29,927	672,88	0,001486
— 10	2,093	603,450	— 9,998	613,448	583,152	30,296	455,68	0,002195
— 5	3,113	604,975	— 4,999	609,974	579,297	30,677	310,23	0,003223
0	4,600	606,500	0	606,500	575,429	31,071	212,67	0,004702
+ 5	6,534	608,025	5,000	603,025	571,550	31,475	151,66	0,006594
10	9,165	609,550	10,002	599,548	567,656	31,892	109,54	0,009129
15	12,699	611,075	15,005	596,070	563,752	32,318	80,103	0,01248
20	17,391	612,600	20,010	592,590	559,845	32,755	59,281	0,01687
25	23,550	614,125	25,017	589,108	555,907	33,201	44,382	0,02253
30	31,548	615,650	30,026	585,624	551,968	33,656	33,583	0,02978
35	41,827	617,175	35,037	582,138	548,019	34,119	25,678	0,03894
40	54,906	618,700	40,051	578,649	544,061	34,588	19,831	0,05042
45	71,390	620,225	45,068	575,157	540,093	35,064	15,460	0,06468
50	91,980	621,750	50,087	571,663	536,119	35,544	12,164	0,08220
55	117,475	623,275	55,110	568,165	532,138	36,027	9,6524	0,10359
60	148,786	624,800	60,137	564,663	528,151	36,512	7,7260	0,12942
65	186,938	626,325	65,167	561,158	524,162	36,996	6,2299	0,16049
70	233,082	627,850	70,201	557,649	520,171	37,478	5,0617	0,19752
75	288,500	629,375	75,239	554,136	516,781	37,955	4,1415	0,24140
80	354,616	630,900	80,282	550,618	512,193	38,425	3,4111	0,29308
85	433,002	632,425	85,329	547,096	508,211	38,885	2,8270	0,35360
90	525,392	633,950	90,381	543,569	504,237	39,332	2,3566	0,42416
95	633,692	635,475	95,438	540,037	500,275	39,762	1,9753	0,50600
100	760,000	637,000	100,500	536,500	496,295	40,205	1,6654	0,60011
105	906,410	638,525	105,568	532,957	492,326	40,631	1,4111	0,70816
110	1075,370	640,050	110,641	529,409	488,361	41,048	1,2016	0,83153
115	1269,410	641,575	115,721	525,854	484,397	41,457	1,0281	0,97173
120	1491,280	643,100	120,806	522,294	480,436	41,858	0,8836	1,1304
125	1743,880	644,625	125,898	518,727	476,477	42,250	0,7627	1,3094
130	2030,280	646,150	130,997	515,153	472,519	42,634	0,6611	1,5104
135	2353,730	647,675	136,103	511,572	468,562	43,010	0,5753	1,7353
140	2717,630	649,200	141,215	507,985	464,608	43,377	0,5024	1,9865
145	3125,550	650,725	146,334	504,391	460,656	43,735	0,4402	2,2654
150	3581,230	652,250	151,462	500,788	456,702	44,086	0,3875	2,5739
155	4088,560	653,775	156,598	497,177	452,749	44,428	0,3420	2,9155
160	4651,620	655,300	161,741	493,559	448,798	44,761	0,3029	3,2902
165	5274,540	656,825	166,892	489,933	444,847	45,086	0,2690	3,7036
170	5961,660	658,350	172,052	486,298	440,895	45,403	0,2397	4,1546
175	6717,430	659,875	177,220	482,655	436,944	45,711	0,2142	4,6468
180	7546,390	661,400	182,398	479,002	432,990	46,012	0,1919	5,1843
185	8453,230	662,925	187,584	475,341	429,037	46,304	0,1724	5,7667
190	9442,700	664,450	192,780	471,670	425,081	46,589	0,1553	6,4000
195	10519,630	665,975	197,985	467,990	421,126	46,864	0,1402	7,0817
200	11688,960	667,500	203,200	464,300	417,167	47,133	0,1269	7,8198

*) Nach Zeuner, Technische Thermodynamik; 3. Auflage; die Spalten u und γ sind unter Annahme des mechanischen Wärmeäquivalents $1:A = 428$ mkg f. d. WE. umgerechnet, (während der Quelle 424 zu grunde gelegt ist).

Tafel für gesättigten Wasserdampf.*)

Spannung in Atmosphären, kg f. d. qcm.	Spannung in mm Quecksilbersäule.	Temperatur in Graden C.	Flüssigkeitswärme in WE.	Innere Verdampfungswärme in WE.	Aeussere Verdampfungswärme in WE.	Differenz der spec. Volumen von Dampf und Wasser in cbm f. d. kg.	Werte von	Gewicht des Dampfes in kg f. d. cbm.
p	p_1	t	q	ϱ	Apu	$u = v - w$	$\frac{\varrho}{u}$	$\gamma = \frac{1}{v}$
0,10	73,6	45,58	45,649	539,634	35,119	15,0309	35,90	0,0665
0,20	147,1	59,76	59,890	528,347	36,488	7,8084	67,66	0,1281
0,30	220,7	68,74	68,934	521,175	37,357	5,3296	97,79	0,1876
0,40	294,2	75,47	75,710	515,808	37,999	4,0659	126,86	0,2459
0,50	367,8	80,90	81,169	511,476	38,509	3,2964	155,17	0,3033
0,60	441,3	85,48	85,818	507,826	38,929	2,7769	182,88	0,3600
0,70	514,9	89,47	89,844	504,659	39,285	2,4020	210,09	0,4161
0,80	588,4	93,00	93,427	501,847	39,592	2,1182	236,93	0,4719
0,90	662,0	96,19	96,639	499,337	39,861	1,8956	263,41	0,5273
1,00	735,5	99,09	99,576	497,048	40,098	1,7162	289,62	0,5823
1,10	809,1	101,76	102,281	494,899	40,356	1,5702	315,18	0,6365
1,20	882,6	104,21	104,792	492,934	40,566	1,4469	340,69	0,6907
1,30	956,2	106,55	107,138	491,098	40,761	1,3420	365,95	0,7446
1,40	1029,7	108,72	109,339	489,378	40,942	1,2517	390,98	0,7983
1,50	1103,3	110,76	111,416	487,756	41,111	1,1730	415,80	0,8518
1,60	1176,8	112,70	113,382	486,221	41,270	1,1040	440,43	0,9050
1,70	1250,4	114,54	115,252	484,762	41,420	1,0428	464,86	0,9580
1,80	1323,9	116,29	117,032	483,375	41,561	0,9882	489,12	1,0109
1,90	1397,5	117,97	118,837	481,955	41,688	0,9391	513,23	1,0637
2,00	1471,0	119,57	120,369	480,776	41,824	0,8950	537,16	1,1161
2,10	1544,6	121,11	121,935	479,557	41,946	0,8549	560,95	1,1684
2,20	1618,1	122,59	123,443	478,385	42,062	0,8183	584,61	1,2206
2,30	1691,7	124,02	124,897	477,254	42,174	0,7848	608,12	1,2726
2,40	1765,2	125,39	126,301	476,163	42,281	0,7540	631,57	1,3245
2,50	1838,8	126,73	127,658	475,109	42,384	0,7256	654,76	1,3763
2,60	1912,3	128,02	128,972	474,090	42,483	0,6993	677,90	1,4280
2,70	1985,9	129,26	130,246	473,101	42,579	0,6750	700,94	1,4793
2,80	2059,4	130,48	131,483	472,141	42,671	0,6523	723,86	1,5307
2,90	2133,0	131,65	132,684	471,210	42,760	0,6311	746,68	1,5820
3,00	2206,5	132,80	133,853	470,304	42,846	0,6113	769,40	1,6332
3,10	2280,1	133,91	134,992	469,422	42,929	0,5927	792,00	1,6843
3,20	2353,6	135,00	136,102	468,563	43,010	0,5753	814,53	1,7352
3,30	2427,2	136,06	137,183	467,726	43,088	0,5588	836,96	1,7864
3,40	2500,7	137,09	138,239	466,908	43,165	0,5434	859,30	1,8369
3,50	2574,3	138,10	139,271	466,111	43,238	0,5287	881,53	1,8879
3,60	2647,8	139,08	140,279	465,331	43,311	0,5149	903,70	1,9384
3,70	2721,4	140,05	141,265	464,569	43,381	0,5018	925,79	1,9889
3,80	2794,9	140,99	142,230	463,824	43,449	0,4894	947,79	2,0392
3,90	2868,5	141,92	143,175	463,093	43,516	0,4776	969,72	2,0894
4,00	2942,0	142,82	144,102	462,377	43,581	0,4663	991,55	2,1400
4,10	3015,6	143,71	145,010	461,677	43,644	0,4556	1013,3	2,1901
4,20	3089,1	144,58	145,901	460,989	43,706	0,4454	1035,0	2,2401
4,30	3162,7	145,43	146,775	460,315	43,766	0,4356	1056,7	2,2904
4,40	3236,2	146,27	147,633	459,653	43,825	0,4263	1078,2	2,3403
4,50	3309,8	147,09	148,475	459,004	43,883	0,4174	1099,8	2,3901
4,60	3383,3	147,90	149,303	458,365	43,940	0,4088	1121,2	2,4402
4,70	3456,9	148,69	150,117	457,738	43,995	0,4006	1142,6	2,4900
4,80	3530,4	149,47	150,918	457,121	44,049	0,3928	1163,9	2,5394
4,90	3604,0	150,24	151,705	456,514	44,103	0,3852	1185,0	2,5893

*) Nach Fliegner, vergl. Civilingenieur 1874.

Die Spalten u, $\frac{\varrho}{u}$ und γ sind unter Annahme des mechanischen Wärme-

Nach Spannungen geordnet.

Spannung in Atmosphären, kg f. d. qcm.	Spannung in mm Quecksilbersäule.	Temperatur in Graden C.	Flüssigkeitswärme in WE.	Innere Verdampfungswärme in WE.	Aeußere Verdampfungswärme in WE.	Differenz der spec. Volumen von Dampf und Wasser in cbm f. d. kg.	Werte von	Gewicht des Dampfes in kg f. d. cbm.
p	p_1	$t°$	q	ϱ	Apu	$u = v - w$	$\frac{\varrho}{u}$	$\gamma = \frac{1}{v}$
5,00	3677,6	150,99	152,480	455,917	44,155	0,3780	1206,2	2,6412
5,10	3751,1	151,73	153,242	455,331	44,206	0,3710	1227,3	2,6882
5,20	3824,7	152,47	153,993	454,753	44,256	0,3643	1248,4	2,7375
5,30	3898,2	153,19	154,733	454,183	44,305	0,3578	1269,4	2,7871
5,40	3971,8	153,90	155,462	453,623	44,353	0,3515	1290,4	2,8369
5,50	4045,3	154,59	156,180	453,071	44,400	0,3455	1311,3	2,8860
5,60	4118,9	155,28	156,888	452,526	44,447	0,3397	1332,1	2,9351
5,70	4192,4	155,96	157,586	451,989	44,493	0,3341	1352,9	2,9842
5,80	4266,0	156,63	158,274	451,460	44,538	0,3287	1373,6	3,0331
5,90	4339,5	157,29	158,954	450,938	44,582	0,3234	1394,4	3,0826
6,00	4413,1	157,94	159,625	450,423	44,625	0,3183	1415,0	3,1319
6,10	4486,6	158,59	160,287	449,914	44,668	0,3134	1435,5	3,1807
6,20	4560,2	159,22	160,940	449,413	44,710	0,3086	1456,1	3,2300
6,30	4633,7	159,85	161,585	448,918	44,751	0,3040	1476,6	3,2787
6,40	4707,3	160,47	162,222	448,428	44,792	0,2995	1497,1	3,3278
6,50	4780,8	161,08	162,852	447,945	44,832	0,2952	1517,4	3,3761
6,60	4854,4	161,68	163,474	447,468	44,871	0,2910	1537,8	3,4247
6,70	4927,9	162,28	164,088	446,997	44,910	0,2869	1558,1	3,4734
6,80	5001,5	162,87	164,696	446,530	44,949	0,2829	1578,4	3,5224
6,90	5075,0	163,45	165,296	446,070	44,987	0,2790	1598,5	3,5714
7,00	5148,6	164,03	165,890	445,615	45,024	0,2753	1618,7	3,6193
7,25	5332,4	165,44	167,347	444,498	45,115	0,2663	1668,9	3,7411
7,50	5516,3	166,82	168,764	443,413	45,202	0,2580	1718,9	3,8610
7,75	5700,2	168,15	170,146	442,354	45,287	0,2501	1768,6	3,9825
8,00	5884,1	169,46	171,493	441,323	45,369	0,2427	1818,3	4,1034
8,25	6068,0	170,73	172,808	440,316	45,449	0,2358	1867,5	4,2230
8,50	6251,8	171,98	174,093	439,334	45,526	0,2292	1916,6	4,3440
8,75	6435,7	173,19	175,349	438,373	45,601	0,2231	1965,4	4,4623
9,00	6619,6	174,38	176,578	437,434	45,674	0,2172	2013,9	4,5830
9,25	6803,5	175,54	177,780	436,515	45,745	0,2117	2062,3	4,7015
9,50	6987,4	176,68	178,958	435,616	45,823	0,2064	2110,5	4,8216
9,75	7171,2	177,79	180,111	434,735	45,881	0,2014	2158,5	4,9407
10,00	7355,1	178,89	181,243	433,871	45,946	0,1966	2206,4	5,0607
10,25	7539,6	179,96	182,353	433,024	46,010	0,1921	2254,0	5,1787
10,50	7722,9	181,01	183,442	432,193	46,072	0,1878	2301,3	5,2966
10,75	7906,7	182,04	184,513	431,376	46,133	0,1837	2348,6	5,4142
11,00	8090,6	183,05	185,563	430,576	46,192	0,1797	2395,7	5,5340
11,25	8274,5	184,05	186,597	429,788	46,250	0,1760	2442,6	5,6497
11,50	8458,4	185,03	187,612	429,015	46,306	0,1723	2489,4	5,7703
11,75	8642,2	185,99	188,611	428,255	46,361	0,1689	2535,9	5,8858
12,00	8826,1	186,94	189,594	427,506	46,415	0,1655	2582,4	6,0060
12,25	9010,0	187,87	190,561	426,770	46,468	0,1624	2628,6	6,1200
12,50	9193,9	188,78	191,513	426,046	46,520	0,1593	2674,8	6,2383
12,75	9377,8	189,68	192,452	425,331	46,571	0,1563	2720,6	6,3573
13,00	9561,6	190,57	193,376	424,629	46,620	0,1535	2766,5	6,4725
13,50	9929,4	192,31	195,184	423,254	46,717	0,1481	2857,6	6,7069
14,00	10297,1	194,00	196,944	421,916	46,810	0,1431	2948,3	6,9396
14,50	10664,9	195,64	198,656	420,615	46,900	0,1384	3038,5	7,1737
15,00	11032,7	197,24	200,324	419,349	46,986	0,1341	3128,0	7,4019

Äquivalents $\frac{1}{A} = 428$ mkg f. d. WE. umgerechnet (während der Quelle 436 zu grunde gelegt ist).

Tafel der Drücke für gesättigte Dämpfe nach Regnault.

Temperatur in Graden C. t	Kohlensäure.	Ammoniak.	Schweflige Säure.	Aether.	Alkohol.
	Drücke in mm Quecksilbersäule.*)				
— 30	11138,62	876,28	288,04	—	—
— 25	13007,02	1111,88	373,92	—	—
— 20	15142,44	1397,64	479,56	—	—
— 15	17582,48	1741,16	608,00	—	—
— 10	20340,20	2149,28	762,28	—	—
— 5	23441,34	2632,64	946,96	—	—
0	26906,60	3197,32	1165,08	184,39	12,7
+ 5	30753,80	3854,72	1421,20	—	—
10	34998,65	4612,44	1719,88	286,83	24,23
15	39646,86	5480,36	2064,92	—	—
20	44716,58	6466,84	2461,73	432,78	44,6
25	50207,32	7581,76	2916,12	—	—
30	56119,05	8832,72	3431,40	634,80	78,52
35	—	10228,08	4015,08	—	—
40	—	11748,84	4670,20	907,04	133,69
50	—	—	—	1264,83	219,90
60	—	—	—	1725,01	350,21
70	—	—	—	2304,90	541,15
80	—	—	—	3022,79	812,91
90	—	—	—	3898,26	1189,30
100	—	—	—	4953,30	1697,55
110	—	—	—	6214,63	2367,64
120	—	—	—	7719,20	3231,73

C. Zustandsänderungen.

a. Allgemeines.

1. Neben den auf S. 251 angegebenen Bezeichnungen von Gröfsen bedeute

Q die Wärmemenge, welche bei einer Zustandsänderung einem kg eines Gases oder Dampfes zugeführt wird (WE. f. d. kg),

L die bei einer Zustandsänderung geleistete äufsere Arbeit,

U die in 1 kg Gas, Dampf, Gemisch von Flüssigkeit und Dampf enthaltene innere Arbeit,

$A\,U = \frac{1}{428}\,U$ den dieser Arbeit entsprechenden Wärmewert (vergl. Mechanische Wärmetheorie, S. 301),

---

*) Zur Umrechnung in neue Atmosphären kann die Tafel S. 258, Spalte 1 u. 2 dienen.

x die in 1 kg Gemisch von Flüssigkeit und Dampf enthaltene Dampfmenge,

c die specifische Wärme eines Gases bei konstantem Volumen (vergl. S. 287),

c_1 die specifische Wärme bei konstantem Druck (vergl. S. 287),

$n = \frac{c_1}{c}$ (vergl. Tafeln a. S. 251 u. 287).

2. Verändern sich eine oder mehrere der drei Gröfsen Druck, Volumen, Temperatur, so nennt man diesen Vorgang eine Zustandsänderung: bei Gemischen von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf kommt noch als vierte Veränderliche die specifische Dampfmenge hinzu. Einer Veränderung des Volumens entspricht eine Arbeit von der Gröfse

$$L = \int p\,dv.$$

Zur Bestimmung der Arbeit bei einer Zustandsänderung ist somit die Kenntnis der Funktion

$$p = F(v)$$

erforderlich; die Art der Funktion ist von dem Gesetz abhängig, nach welchem Wärme zu- oder abgeführt wird.

Für die meisten Zustandsänderungen von Gasen, Dämpfen und Gemischen von Flüssigkeiten und Dämpfen hat mit hinreichender Genauigkeit die Funktion die Form

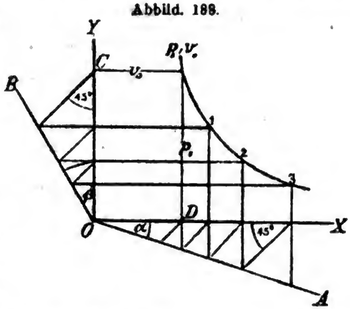
$$p\,v^m = p_0 v_0^m = \text{konst.},$$

worin m eine von der Art der Wärmezuführung abhängige Konstante ist, und p_0 und v_0 die dem Anfangszustande entsprechenden Werte von p und v sind. Die durch diese Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten dargestellte Kurve heifst **polytropische Kurve.**

3. Die wichtigsten Zustandsänderungen

1. Druck konstant;
2. Volumen konstant;
3. Temperatur konstant (isothermische Zustandsänderung);
4. Ohne Zu- oder Abfuhr von Wärme (adiabatische Zustandsänderung).
5. Die innere Wärme bleibt konstant (isodynamische Zustandsänderung);
6. Die Wärme-Zu- oder -Abfuhr ist proportional der Temperaturänderung $\left(\frac{dQ}{dT} = \text{konst.}\right)$.

Abbild. 188.



4. Konstruktion der polytropischen Kurve*) (Abbild. 188).

Man ziehe OA unter dem beliebigen Winkel α gegen

*) Nach Brauer. Vergl. Z. d. V. d. Ing. 1885. S. 433.

die x-Achse geneigt, bestimme den Winkel $YOB = \beta$ aus der Gleichung:

$$(1 + \operatorname{tg} \beta) = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^m \;;$$

ziehe von den dem gegebenen Anfangszustande $p_0 v_0$ entsprechenden Punkten C und D abwechselnd Normalen und unter 45° geneigte Linien zu den Koordinatenachsen in der aus der Abbild. ersichtlichen Weise, so sind die Punkte 1, 2, 3 Punkte der Kurve.

5. Untersuchung von Expansionskurven.

(Ermittlung der Konstanten m.)

Es seien v_1 und v_2 die absoluten Volumen zweier Zustände, p_1 und p_2 die specifischen Drücke, dann ist

$$m = \frac{\log v_2 - \log v_1}{\log p_1 - \log p_2}.$$

Die Berechnung von m für mehr als zwei Punkte lehrt, ob und in welchen Grenzen m als konstant betrachtet werden kann und in wie weit eine Zustandsänderung nach der polytropischen Kurve angenommen werden darf. $m = 1$ ergiebt die gleichseitige Hyperbel (Mariottesche Linie).

Die Arbeit, welche der polytropischen Kurve entspricht, ist:

$$L = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right]$$

$$= \frac{p_1 v_1}{m-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right].$$

b. Zustandsänderung von Gasen und überhitzten Dämpfen.

1. Allgemeines.

$$A = \frac{c_1 - c}{R}.$$

Die zu- oder abgeführte Wärme ergiebt sich aus:

$$dQ = \frac{1}{R}(c\,v\,dp + c_1\,p\,dv)$$

$$= c\,dT + A\,p\,dv$$

$$= c\,dT + A\,dL;$$

$$Q = c\,(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

$$= c\,(t_2 - t_1) + A\,L.$$

Aus

$$dU = \frac{c}{A}\,dT$$

folgt als Zunahme der inneren Arbeit:

$$U_2 - U_1 = \frac{c}{A}(t_2 - t_1) = \frac{c}{AR}(p_2 v_2 - p_1 v_1).$$

2. Besondere Fälle.

α. Zustandsänderung eines Gases bei konstantem Volumen v_1.

$$m = \infty. \quad \left| \begin{array}{l} Q = c\,(t_2 - t_1) = \dfrac{c\,v_1}{R}\,(p_2 - p_1); \\ L = 0; \qquad U_2 - U_1 = \dfrac{Q}{A}. \end{array} \right.$$

β. Zustandsänderung eines Gases bei konstantem Drucke p_1.

$$m = 0. \quad \left| \begin{array}{l} Q = c_1\,(t_2 - t_1) = \dfrac{c_1\,p_1}{R}\,(v_2 - v_1); \\ L = p_1\,(v_2 - v_1) = R\,(t_2 - t_1); \\ U_2 - U_1 = \dfrac{c}{A}\,(t_2 - t_1). \end{array} \right.$$

γ. Zustandsänderung eines Gases bei konstanter absoluter Temperatur T_1 (isothermische Zustandsänderung).

$$m = 1. \quad \left| \begin{array}{l} p\,v = p_0\,v_0; \\ Q = A\,R\,T_1 \ln \dfrac{p_1}{p_2} = A\,R\,T_1 \ln \dfrac{v_2}{v_1}; \\ L = R\,T_1 \ln \dfrac{p_1}{p_2} = R\,T_1 \ln \dfrac{v_2}{v_1}; \\ U_2 - U_1 = 0. \end{array} \right.$$

δ. Zustandsänderung eines Gases, ohne Zu- oder Abfuhr von Wärme (adiabatische Zustandsänderung).

$$m = n. \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{p_2}{p_1} = \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^n; \qquad p_2\,v_2^{\,n} = p_1\,v_1^{\,n}; \\ \dfrac{T_2}{T_1} = \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}. \end{array} \right.$$

Ueber Werte von n vergl. die Tafel a. S. 251 u. 287, Konstruktion der Kurve $p_2\,v_2^{\,n} =$ konst. vergl. S. 261, auch kann zur Konstruktion der Kurve, sowie zur Berechnung der Temperaturen für **atmosphärische Luft** folgende Tafel dienen.

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{v_1}{v_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{v_1}{v_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{v_1}{v_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$
1,1	1,070	1,028	1,9	1,577	1,205	5,5	3,350	1,642
1,2	1,138	1,054	2,0	1,635	1,223	6,0	3,564	1,684
1,3	1,205	1,079	2,5	1,915	1,305	6,5	3,772	1,723
1,4	1,270	1,103	3,0	2,180	1,376	7,0	3,975	1,761
1,5	1,333	1,125	3,5	2,431	1,440	7,5	4,174	1,797
1,6	1,395	1,147	4,0	2,673	1,497	8,0	4,370	1,831
1,7	1,457	1,167	4,5	2,906	1,549			
1,8	1,518	1,186	5,0	3,131	1,597			

(Vorstehende Beziehungen führen den Namen der **Poisson**schen Gleichungen.)

$m = n.$ | $$Q = 0; \qquad L = \frac{c}{A}(t_1 - t_2),$$

oder:

$$L = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}\right] = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right];$$

$$U_2 - U_1 = -L.$$

Für **überhitzte Dämpfe** gelten die vorstehenden Beziehungen unter Einführung der Werte aus Tafel a. S. 251 nur näherungsweise (vergl. die genaueren Zustandsgleichungen a. S. 252.).

c. Zustandsänderung für Mischungen von Dampf und Flüssigkeit.

Bezeichnungen vergl. S. 254 u. 255.

In einem geschlossenen Raume befinde sich 1 kg einer Mischung von Flüssigkeit und Dampf; das Gewicht des vorhandenen Dampfes sei x, also $(1 - x)$ das Gewicht der Flüssigkeit, alsdann ist bei einer beliebigen, unendlich kleinen Zustandsänderung die **Veränderung der inneren Wärme** der gesamten Mischung:

$$A\,dU = dq + d\,(x\varrho);$$

die **von aufsen zuzuführende Wärme**:

$$dQ = dq + T d\left(\frac{xr}{T}\right);$$

die **in äufsere Arbeit verwandelte Wärme**:

$$A\,dL = T d\left(\frac{xr}{T}\right) - d\,(x\varrho).$$

Die letzten beiden Gleichungen dürfen nur dann in Anwendung gebracht werden, wenn die Mischung während ihrer Zustandsänderung unter einem äufseren Drucke steht, der ihrer Spannung fortwährend gleich ist.

α. **Die Zustandsänderung sei eine solche, dafs das Verhältnis der Flüssigkeits- und Dampfmenge ungeändert bleibt.**

$$A\,dU = dq + x\,d\varrho;$$

$$dQ = dq + xT d\left(\frac{r}{T}\right);$$

$$A\,dL = x\left[T d\left(\frac{r}{T}\right) - d\varrho\right].$$

Für $x = 1$ wird:

$$dQ = \left(c + \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}\right) dT.$$

Der Ausdruck in der Klammer heifst **Clausiussche Temperaturfunktion**; für Wasserdampf ist er bei den in der Technik vor-

kommenden Temperaturen negativ. Es mufs daher Wärme zugeführt werden, wenn reiner gesättigter Dampf expandieren und kein Niederschlag erfolgen soll, und Wärme abgeführt werden, wenn bei der Kompression des Dampfes eine Ueberhitzung vermieden werden soll.

β. **Die Zustandsänderung finde ohne Zu- oder Abfuhr von Wärme statt** (adiabatische Zustandsänderung).

Giebt man den veränderlichen Gröfsen für den Anfangszustand den Zeiger 1, für den Endzustand den Zeiger 2, so ist:

$$x_2 = \left(\frac{x_1 r_1}{T_1} - \tau_2 + \tau_1\right)\frac{T_2}{r_2},$$

worin, unter c_2 die specifische Wärme der Flüssigkeit verstanden:

$$\tau_1 = \int_0^{T_1} \frac{c_2\, dT}{T} = \int_0^{T_1} \frac{dq}{T}; \qquad \tau_2 = \int_0^{T_2} \frac{c_2\, dT}{T} = \int_0^{T_2} \frac{dq}{T},$$

oder annähernd für Wasserdampf:

$$\tau_2 - \tau_1 = 1{,}0224 \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Die bei der Expansion sich **niederschlagende Dampfmenge** ist:

$$x_1 - x_2 = \frac{T_2}{r_2}\left[x_1\left(\frac{r_2}{T_2} - \frac{r_1}{T_1}\right) + \tau_2 - \tau_1\right].$$

Ferner ist:

$$L = U_1 - U_2; \qquad AL = q_1 - q_2 + x_1 \varrho_1 - x_2 \varrho_2.$$

γ. **Die Temperatur der Mischung werde ohne Veränderung des Volumens von t_1^0 auf t_2^0 gebracht.**

Das ursprüngliche Dampfgewicht x_1 geht dabei über in:

$$x_2 = \frac{x_1 u_1}{u_2},$$

und die **zuzuführende Wärmemenge** ist:

$$Q = c_2 (t_2 - t_1) + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_2}{u_2} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right).$$

(Bedeutung von μ_1, μ_2, ϱ_1 und ϱ_2 vergl. S. 255.)

Die Temperatur t', bei der die ganze Flüssigkeit in Dampf verwandelt wird, findet man mit Benutzung der Tafel a. S. 260 aus der Gleichung:

$$u' = x_1 u_1.$$

Die Zeit, innerhalb welcher eine in einem Raum von unveränderlicher Gröfse eingeschlossene Flüssigkeits- und Dampfmenge vom Gewicht g von dem Druck p_1 auf p_2 steigt, ergiebt sich hieraus:

$$\vartheta = \frac{GQ}{Q'},$$

worin Q' die dem Gemisch in der Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge bezeichnet.

δ. **Die Temperatur der Mischung bleibe konstant** (isothermische Zustandsänderung).

$$p = \text{konst.}$$

Die Isotherme gesättigter nasser Dämpfe ist eine Parallele zur Abscissenachse.

$$Q = r_1 (x_2 - x_1),$$
$$L = pu (x_2 - x_1).$$

d. Anwendung auf Wasserdampf und die Dampfmaschine.

In die vorstehenden allgemeinen Gleichungen sind zur Rechnung mit Wasserdampf die Werte aus der Tafel a. S. 257 u. f. einzuführen.

Der Fall unter α. entspricht mit $x = 1$ der alten Pambourschen Dampfmaschinentheorie (der bei Beginn trockene Dampf bleibt auch während der Expansion trocken); wie oben bemerkt, ist hierzu Wärmezuführung erforderlich.

Die Gleichung der Druckkurve lautet:

$$p v^{1,0646} = \text{konst.}$$

Konstruktion der Kurve $pv^m = \text{konst.}$ (vergl. S. 261).

Einer **adiabatischen Zustandsänderung** des Wasserdampfes entspricht nach Zeuner hinreichend genau:

$$pv^{m_1} = \text{konst.}$$
$$m_1 = 1{,}035 + 0{,}1\,x,$$

worin x dem Anfangszustande entspricht.

Hiernach ist:

$$L = \frac{p_1 v_1}{m_1 - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{m_1 - 1}\right],$$

oder, wenn man das Expansionsverhältnis $\frac{v_2}{v_1}$ mit $\frac{1}{\varepsilon}$ bezeichnet:

$$L = \frac{p_1 v_1}{m_1 - 1}\left(1 - \varepsilon^{m_1 - 1}\right).$$

Die Annahme einer adiabatischen Expansion (vergl. S. 265) ist wegen des beträchtlichen Einflusses der Cylinderwandungen nicht ohne weiteres zulässig.

Meist wird für die Expansionskurve $m_1 = 1$ gesetzt, d. h. eine gleichseitige Hyperbel angenommen. Dagegen wird für die Kompressionskurve neben der Hyperbel auch häufig die obige Adiabate eingeführt.

D. Ausflufs der Gase und Dämpfe aus Gefäfsen.

a. Ausflufs permanenter Gase aus Gefäfsen.

1. Bezeichnet:

p_0 die (absolute) specifische Spannung in einem grofsen Ausflufsgefäfse, welchem fortwährend die ausströmende Gasmenge wieder zugeführt wird, in kg f. d. qm,
p die konstante specifische Spannung im Ausblaseraum in kg f. d. qm,
t_0 die Temperatur im Ausflufsgefäfse in Graden C,
v_0 das specifische Volumen in cbm f. d. kg, bei der Spannung p_0 und der Temperatur t_0 $\left(=\frac{1}{\gamma_0}\right)$, *)
n das Verhältnis der specifischen Wärme bei konstantem Drucke zu jener bei konstantem Volumen (für Luft $n = 1{,}41$), s. S. 251,
F den Querschnitt der Ausflufsöffnung in qm,
α den Kontraktions-Koefficienten, φ den Geschwindigkeits-Koefficienten, μ den Ausflufs-Koefficienten: vergl. S. 223, Tafel s. S. 268;
g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m,
R die Konstante des Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetzes (vergl. S. 251),

so ist die **Geschwindigkeit** des ausströmenden Gases*) nach Grashof:

$$u = \varphi \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

wobei für atmosphärische Luft:

$$\sqrt{2 g p_0 v_0} = 23{,}96 \sqrt{273 + t_0}.$$

Tafel für $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ vergl. S. 268.

Die **Temperatur** t des ausströmenden Gases ist:

$$t = t_0 - \frac{u^2}{2gR} \frac{n-1}{n};$$

für $\varphi = 1$ würde: $t = (273 + t_0)\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 273.$

Das **specifische Volumen** v des ausströmenden Gases folgt aus:

$$v = \frac{R(273 + t)}{p}.$$

*) In den Kapiteln D. und E. ist ausnahmsweise die Geschwindigkeit der Luft mit u bezeichnet, die Bezeichnung v dagegen für das specifische Volumen vorbehalten.

Die **Ausflufsmenge** Q_0 in cbm i. d. Sek., gemessen bei der Spannung p_0 und der Temperatur t_0, beträgt:

$$Q_0 = \mu F \sqrt{2\,g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]},$$

für atmosphärische Luft:

$$Q_0 = 44.4\,\mu F \sqrt{273 + t_0} \sqrt{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1,41844} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1,70922}}$$

Letztere Formel (für Luft) gilt nur so lange, als

$$p \gtreqless 0,527\,p_0.$$

2. Nach Zeuner ist, ähnlich wie für gesättigten Wasserdampf (s. unter **b.** S. 269) zu setzen:

$$Q_0 = \alpha F \sqrt{2\,g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}$$

u. zw. für alle Werte von $\frac{p}{p_0}$. Dabei bedeutet n den Wert 1,41, während der Ausflufsexponent $m = \frac{n(1+\zeta)}{1+n\zeta}$ ist, unter ζ einen Widerstandskoefficienten verstanden.

3. Näherungsweise ist für mäfsige Druckunterschiede:

$$u = \varphi \sqrt{2\,g\,R\,(273 + t_0)\left(1 - \frac{p}{p_0}\right)},$$

oder wenn δ den Druckverlust in % bezeichnet:

$$u = \varphi \sqrt{\frac{2\,g\,R}{100}} \sqrt{(273 + t_0)\,\delta} = \varphi \sqrt{\frac{2\,g}{100}} \sqrt{p_0 v_0 \delta}.$$

Für mittelfeuchte Luft ist hiernach:

$$u = 24\varphi \sqrt{(273 + t_0)\left(1 - \frac{p}{p_0}\right)}$$

$$= 2,4\,\varphi \sqrt{(273 + t_0)\,\delta} = 0,443\,\varphi \sqrt{p_0 v_0 \delta}.$$

Ferner ist: $Q = \alpha F u.$

Diese Formeln sind für praktische Bedürfnisse etwa bis $\delta = 10\%$ (wobei der Fehler noch nicht 2% beträgt) genau genug.

4. Für $p = 0,5\,p_0$ bis p_0 ist nach Weisbach und Grashof*):

	μ	α	φ	ζ	m	
bei kreisförmiger Mündung von 14 mm Durchmesser in dünner, ebener Wand	0,64	0,65	0,981	0,04	1,388	
bei kurzem cylindrischen Ansatzrohr von 14 mm Durchmesser ohne innere Abrundung	0,815	1	0,821	0,490	1,243	bei $p_0 : p = 1,08$
	0,813	1	0,838	0,444	1,252	„ $p_0 : p = 1,41$
	0,831	1	0,866	0,362	1,271	„ $p_0 : p = 1,70$
bei kurzem kegelförmigen Mundstücke von 10 mm Mündungsdurchmesser	0,97	1	0,974	0,034	1,392	

*) Vergl. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I. S. 580 bis 592.

Nach v. Hauer ist für **kegelförmige Gebläsedüsen:** $\mu = 0{,}86$, für **cylindrische Ansatzrohre** bei Bessemergebläsen: $\mu = 0{,}78$.

b. Ausflufs des gesättigten Wasserdampfes aus Gefäfsen.*)

1. Das Gefäfs sei so grofs, dafs die Geschwindigkeit im Inneren gleich Null gesetzt werden kann. Es bezeichne:

p_0 die absolute (specifische) Spannung im Inneren des Gefäfses in kg f. d. qm,
v_0 das entsprechende (specifische) Volumen in cbm f. d. kg (vergl. S. 256 u. f.),
p die (specifische) Spannung im äufseren Raume in kg f. d. qm,
F den Querschnitt der Ausflufsöffnung in qm,
α den Kontraktionskoefficienten,
ζ den Widerstandskoefficienten der Mündung bezw. des Mundstücks,
u die Ausflufsgeschwindigkeit in m i. d. Sek.,
G die Ausflufsmenge in kg i. d. Sek.,
Q_0 das ausfliefsende Volumen in cbm i. d. Sek. (bei der Spannung p_0 gemessen),
g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m.

Der Dampf im Inneren des Gefäfses sei **feucht** und die Wassermenge in 1 kg betrage $(1 - x)$ kg. Ferner sei:

$$m_1 = 1{,}035 + 0{,}1\,x; \qquad m = \frac{m_1 (1 + \zeta)}{1 + m_1 \zeta} \text{ (der Ausflufsexponent).}$$

Dann ist, wenn der ausströmende Dampf nicht überhitzt wird, (was selbst für $x = 1$, um so mehr für $x < 1$ so lange nicht der Fall ist, als $\zeta < 0{,}96$)

$$\text{für } p \geqq p_0 \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}:$$

$$\begin{cases} \dfrac{u^2}{2g} = \dfrac{m_1}{m_1 - 1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right], \text{**)} \\[2ex] G = \dfrac{Q_0}{v_0} = \alpha F \sqrt{2g \dfrac{m_1}{m_1 - 1} \dfrac{p_0}{v_0} \left[\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}; \end{cases}$$

$$\text{für } p < p_0 \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}:$$

$$\begin{cases} \dfrac{u^2}{2g} = \dfrac{1}{1+\zeta} \dfrac{m}{m+1} p_0 v_0; \text{ **)} \\[2ex] G = \dfrac{Q_0}{v_0} = \alpha F \sqrt{\dfrac{g m}{1+\zeta} \left(\dfrac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}} \dfrac{p_0}{v_0}}. \end{cases}$$

*) Vergl. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I, §§ 111—113.

**) Zur Berechnung von u aus $\frac{u^2}{2g}$ vergl. Tafel S. 141.

Bei **trockenem** Wasserdampf insbesondere ist $x = 1$ und $m_1 = 1{,}135$; mithin:

für $\zeta =$	0	0,05	0,1	0,25	0,5
$m =$	1,135	1,128	1,121	1,105	1,086
$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} =$	1,7319	1,7274	1,7232	1,7138	1,7021

In diesen Fällen kann gesetzt werden:

$$G = \alpha C F p_0^{0,97}$$

worin, falls p_0 **in Atm. ausgedrückt ist,** für:

$\zeta =$	0	0,05	0,1	0,25	0,5
$C =$	152,6	148,6	144,9	135,2	122,6

Werte von $p_0^{0,97}$.

$p_0 =$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
$p_0^{0,97} =$	1,48	1,96	2,43	2,90	3,37	3,83	4,30	4,76	5,22	5,68	6,14
$p_0 =$	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
$p_0^{0,97} =$	6,60	7,05	7,51	7,96	8,42	8,87	9,32	9,77	10,22	10,67	11,12

In Ermanglung besonderer Versuche sind die Koefficienten α und ζ in obigen Formeln nach Maſsgabe der unter ähnlichen Umständen für Wasser gültigen Werte anzunehmen (α etwas gröſser, ζ etwas kleiner, als für Wasser); vergl. S. 224 u. f.

Näherungsweise ist auch nach Navier:

$$G = \nu F \sqrt{\frac{(p_0 - p)p}{p_0 v_0}}, \text{ für } p_0 < 2p;$$

$$G = 0{,}5\, \nu F \sqrt{\frac{p_0}{v_0}}, \text{ für } p_0 > 2p,$$

unter ν einen Koefficienten verstanden, welcher, wenn p_0 und p in Atm. ausgedrückt sind, gefunden wurde:

für eine Kreismündung in dünner Wand: $\nu = 382$;

für ein kurzes, cylindrisches Ansatzrohr mit Abrundung am inneren Rande: $\nu = 420$.

2. Für das **Sicherheitsventil** eines Dampfkessels ist, wenn d den Durchmesser des Ventilrohres, h die Ventilerhebung in m bezeichnet, nach Kolster die i. d. Sek. abgeblasene Dampfmenge (in kg):

$$G = 595{,}2 \frac{h}{d} \frac{\pi d^2}{4} p_0^{0,97}.$$

(Werte von $p_0^{0,97}$ s. oben stehende Tafel).

Der **Querschnitt** F des Sicherheitsventils (mit Ausschluſs der Sitzfläche), welches:

1) bei der Dampfspannung p_0 Atm. anfangen soll, abzublasen und
2) eine gegebene Dampfmenge G kg i. d. Sek. entweichen lassen soll, wenn die Spannung auf p_1 Atm. gestiegen ist, wird:

$$F = \frac{56\,G}{\left(1 - \sqrt{\frac{p_0}{p_1}}\right) p_1^{0,97}} \text{ qcm.}$$

Die erforderliche **Belastung** K (einschl. Eigengewicht des Ventils) ist, wenn a die (möglichst klein anzunehmende) wagerechte Projektion der Sitzfläche in qcm bezeichnet:

$$K = (F + 0,6\,a)(p_0 - 1) \text{ kg.}$$

Soll das Sicherheitsventil bei der höchsten zulässigen Dampfspannung p_1 die ganze, bei voller Feuerung gleichzeitig im Kessel in einer Sekunde entwickelte Dampfmenge G entweichen lassen, so setze man unter der Annahme $p_0 = 0,8\,p_1$:

$$F = \frac{581\,G}{p_1^{0,97}} \text{ qcm.}$$

Da G außer vom Grade der Anstrengung des Kessels wesentlich von der Heizfläche H desselben abhängig ist, so setzt man in der Praxis den Querschnitt des Sicherheitsventils für 1 qm Heizfläche:

$$\frac{F}{H} = f = \varphi(p_1).$$

(Vergl. Siebenter Abschnitt unter Dampfkessel-Armaturen).

E. Bewegung der Gase und Dämpfe durch Rohrleitungen.

a. Grundgleichungen.

Es bezeichne:

F den Querschnitt an irgend einer Stelle eines ruhenden Rohres, in qm,

dl das Element der Rohrstrecke vom Querschnitte F,

u die Geschwindigkeit, mit welcher sämtliche Teilchen eines Gases oder Dampfes den Querschnitt F durchfließen, in m i. d. Sek.,

ψ den Winkel, welchen u mit der Richtung der Schwerkraft einschließt,

G das unveränderliche Gewicht der durch F fließenden Gasmenge, in kg i. d. Sek.,

p den specifischen (absoluten) Druck im Querschnitte F, in kg f. d. qm,

v das specifische Volumen, in cbm f. d. kg,

$\frac{1}{A}$ das mechanische Aequivalent der Wärme $= 428$ mkg f. d. WE.,

R die Konstante des Gay-Lussac-Mariotteschen Gesetzes (s. S. 251),

g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9,81$ m,

dT die auf der Rohrstrecke dl erfolgende Temperaturveränderung,

dQ die auf der Rohrstrecke dl dem Gase zugeführte Wärmemenge,

dB die mechanische Arbeit der auf der Rohrstrecke dl überwundenen äufseren und inneren Widerstände.

Alsdann sind die **Grundgleichungen der gleichförmigen Bewegung** des Gases oder Dampfes:*)

1) die Kontinuitätsgleichung: $Fu = Gv$;

2) die Gleichung des gesamten Arbeitsvermögens:

$$\frac{u\,du}{g} + \frac{R\,dT}{n-1} = \cos\psi\,dl - d(pv) + \frac{dQ}{A}; \quad \left(n = \frac{c_1}{c} \text{ s. S. 251}\right);$$

3) die Wärmegleichung:

$$\frac{dQ}{A} + dB = \frac{R\,dT}{n-1} + p\,dv;$$

4) die Gleichung des äufseren Arbeitsvermögens:

$$\frac{u\,du}{g} = \cos\psi\,dl - v\,dp - dB.$$

$\frac{R\,dT}{n-1}$ ist dabei die Aenderung des inneren Arbeitsvermögens,

$p\,dv$ die Expansionsarbeit.

b. Bewegung der Luft durch Rohrleitungen.

Druckverlust. 1. Nach eingehenden Versuchen von Riedler und Gutermuth bei der **Druckluft-Anlage zu Paris****) beträgt der Druckverlust z zwischen Anfang und Ende der Leitung, gemessen in Atm. (kg f. d. qcm):

$$z = \frac{533}{10^{10}}\gamma\frac{l}{d}\,u^2 = \frac{864}{10^{10}}\gamma\,l\,\frac{Q^2}{d^5},$$

worin bezeichnet:

γ das mittlere Gewicht von 1 cbm Luft in der Leitung, in kg,
l die Länge der Leitung in m,
d den Durchmesser der Leitung in m,
u die mittlere Luftgeschwindigkeit in m i. d. Sek.,
Q das **sekundliche** Volumen der Luft, gemessen bei der mittleren Spannung und Temperatur in der Leitung, in cbm.

Die Versuche sind ausgeführt bei etwa $u = 6{,}5$ m, $d = 0.300$ m, bei Leitungslängen bis zu $l = 16\,500$ m Im Mittel ergab sich ein Druckverlust von 0,05 kg f. d. qcm für je 1000 m Leitungslänge bei einer Luftgeschwindigkeit von 6,5 m i. d. Sek.

Hierbei sind jedoch die in den Entwässerungssyphons und den Absperrschiebern auftretenden Verluste mit einbegriffen.

Bei Rücksicht auf vier vorhandene gröfsere Entwässerungsbehälter (deren jeder einen Druckverlust von 0,07 bis 0,17 Atm. bei $u = 5{,}58$ bis 8,70 m zur Folge hat) beträgt der gesamte Druckverlust für je 1000 m Leitungslänge 0,07 Atm.

---

*) Vergl. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I. S. 60.

**) Z. d. V. d. Ing. 1891. S. 188.

2. Nach Versuchen von Stockalper am **Gotthard-Tunnel**,*) deren Ergebnis wegen ihrer geringen Anzahl unsicher ist, beträgt der Druckverlust (in Atm.) für lange gufseiserne Leitungen von 0,15 bis 0,20 m Durchmesser bei den obigen Bezeichnungen:

$$z = \frac{785}{10^{11}}\gamma\frac{l}{d}\left(5+\frac{1}{d}\right)u^2 = \frac{1272}{10^{11}}\gamma l\left(5+\frac{1}{d}\right)\frac{Q^2}{d^5}.$$

Beziehungen zwischen specifischem Druck, Volumen und Temperatur s. S. 253.

Sind Q und p gegeben, und d und z zu bestimmen, so kann ähnlich verfahren werden, wie es unter b. a. f. S. für Dampfleitungen angegeben ist.

3. Druckverlust für **Leuchtgas-Leitungen** vergl. Abschnitt Technologie, Gasfabrikation.

b. Bewegung des Wasserdampfes durch Rohrleitungen.

Berechnung langer Dampfleitungen.**)

Für die Bestimmung des zweckmäfsigsten Dampfleitungsdurchmessers sind der Druckverlust durch Leitungswiderstand und der Dampfverlust durch äufsere Abkühlung mafsgebend. Ersterer Verlust nimmt mit Verkleinerung des Durchmessers zu, letzterer ab.

1. **Leitungswiderstand.**

Nach Versuchen an Schachtleitungen beträgt der Druckverlust zwischen Anfang und Ende einer Dampfleitung, gemessen in Atm. (kg f. d. qcm):

$$z = \frac{15}{10^8}\gamma\frac{l}{d}u^2 = \frac{185,18}{10^{16}}\frac{l}{\gamma}\frac{G_s}{d^5},$$

worin bezeichnet:

- γ das Gewicht eines cbm Dampf von der in der Leitung herrschenden mittleren absoluten Spannung p in kg (s. Tafel von Fliegner S. 258 und 259),
- d den Durchmesser der Leitung in m,
- l die Länge der Leitung in m,
- u die mittlere Dampfgeschwindigkeit in m i. d. Sek.,
- G_s das mittlere **stündlich** durch die Leitung strömende **Dampfgewicht** in kg.

Zur bequemen Ermittlung von z kann nachstehende Tafel dienen. Diese enthält für verschiedene d und p (bezw. γ) die Werte von $\frac{G_s}{u}$ (in den oberen Zeilen) und die zugehörigen Werte eines Hülfsfaktors φ, dessen Bedeutung ersichtlich ist, wenn die obige Gleichung geschrieben wird:

$$z = \varphi\frac{l}{100}\left(\frac{u}{100}\right)^2.$$

*) Vergl. Dinglers Polytechn. Journal, September 1880.

**) Nach Gutermuth, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1887, S. 670 u. f.

Sind nun, wie es in der Regel der Fall ist, G_s und p gegeben und d sowie z zu bestimmen, so wähle man u, berechne $\frac{G_s}{u}$, suche für das vorgeschriebene p (in den oberen Zeilen) einen sich dem ermittelten $\frac{G_s}{u}$ möglichst nähernden Wert und entnehme den darunter stehenden Wert von φ, sowie aus der ersten Spalte den erforderlichen Durchmesser d. Die obige Hülfsformel ergiebt alsdann den Wert von z. Entsprechend ist vorzugehen, wenn zwei andere Gröfsen gegeben sind.

Tafel der Werte $\frac{G_s}{u}$ und φ.

d m	$p = 3$	$p = 3{,}5$	$p = 4$	$p = 4{,}5$	$p = 5$	$p = 5{,}5$	$p = 6$	
	Atmosphären							
0,075	25,975	30,026	34,035	38,013	42,006	45,900	49,811	$G_s : u$
	3,266	3,776	4,280	4,780	5,282	5,772	6,264	φ
0,100	46,178	53,379	60,507	67,579	74,678	81,600	88,553	$G_s : u$
	2,450	2,832	3,210	3,585	3,962	4,329	4,698	φ
0,125	72,153	83,405	94,542	105,59	116,69	127,50	138,36	$G_s : u$
	1,960	2,265	2,568	2,868	3,169	3,463	3,758	φ
0,150	103,90	120,10	136,14	152,05	168,03	183,60	199,24	$G_s : u$
	1,633	1,888	2,140	2,390	2,641	2,886	3,132	φ
0,175	141,42	163,47	185,30	206,96	228,70	249,90	271,19	$G_s : u$
	1,400	1,618	1,834	2,049	2,264	2,474	2,684	φ
0,200	184,71	213,52	242,03	270,31	298,71	326,40	354,21	$G_s : u$
	1,225	1,416	1,605	1,793	1,981	2,165	2,349	φ
0,225	233,78	270,23	306,32	342,12	378,06	413,10	448,30	$G_s : u$
	1,089	1,259	1,427	1,593	1,761	1,924	2,088	φ
0,250	288,61	333,62	378,17	422,37	466,74	510,00	553,45	$G_s : u$
	0,980	1,133	1,284	1,434	1,585	1,732	1,879	φ
0,275	349,22	403,68	457,59	511,06	564,76	617,10	669,68	$G_s : u$
	0,891	1,030	1,167	1,304	1,441	1,574	1,708	φ
0,300	415,60	480,41	544,56	608,21	672,10	734,40	796,97	$G_s : u$
	0,817	0,944	1,070	1,195	1,321	1,443	1,566	φ

Bei Druckverlusten über 2 Atm. und bei Dampfgeschwindigkeiten über 20 m i. d. Sek. ist vorstehende Formel nur für rohe Rechnungen noch hinreichend genau. Für genauere Rechnungen sind nach Fischer folgende Gleichungen zu benutzen:*)

*) Vergl. Dinglers Polytechn. Journal, Bd. 236.

$$p_2 = \sqrt{(0{,}12 + p_1)^2 - \frac{l}{4000\,d^5}[3\,G_s^2 + (3\,G_s + kn\,d\,l)\,kn\,d\,l]} - 0{,}12,$$

wenn $p_1 < 3{,}6$ Atm.,

$$p_2 = \sqrt{(0{,}3 + p_1)^2 - \frac{l}{3766\,d^5}[3\,G_s^2 + (3\,G_s + kn\,d\,l)\,kn\,d\,l]} - 0{,}3,$$

wenn $p_1 > 3{,}6$ Atm.,

$$z = p_1 - p_2;$$

hierin bedeutet:

p_1 die absolute Anfangsspannung in Atm.,
p_2 die absolute Endspannung in Atm.,
z den Druckverlust in Atm.,
d den lichten Rohrdurchmesser, l die Länge der Leitung, beides in m,
G_s das **stündliche Dampfgewicht**, welches aus der Leitung ausströmt, in kg,
k die stündliche Kondensationswassermenge in kg f. d. qm Rohrinnenfläche (s. S. 276),
$k\pi dl$ die stündlich in der ganzen Leitung gebildete Kondensationswassermenge in kg.

2. **Aeufsere Abkühlung.**

Die Gröfse des Dampfverlustes durch äufsere Abkühlung ist weniger abhängig von dem zur Umhüllung der Leitung verwandten Isoliermaterial als von der Art und Güte der Ausführung. Der Dampfverlust wächst mit der Zunahme des Dampfdruckes und der Abnahme der Dicke der Umhüllung.

Ueber die wirkliche Gröfse des Kondensationsverlustes giebt folgende Zusammenstellung von Versuchsergebnissen an verschiedenen Leitungen und mit verschiedenen Isolierstoffen Aufschlufs. (S. 276.) Da die betreffenden Versuche unter von einander wesentlich abweichenden äufseren Umständen ausgeführt wurden, sind die den verschiedenen Umhüllungsstoffen zugehörigen Zahlenwerte unter einander nicht vergleichbar.

3. Nach dem Zusammenhang zwischen Leitungswiderstand, Dampfverlust und Leitungsdurchmesser ergiebt sich für die Ermittlung des zweckmäfsigsten Leitungsdurchmessers folgender **Rechnungsvorgang**, unter Zugrundelegung der am Ende der Dampfleitung nötigen Dampfmenge und des nötigen Dampfdruckes:

α) Kesselspannung vorgeschrieben. Dann ist der zulässige Spannungsabfall bestimmt, und die Dampfgeschwindigkeit sowie der Leitungsdurchmesser ermitteln sich somit aus der Formel für den Leitungswiderstand ohne Rücksicht auf die Kondensationsverhältnisse in der Leitung. Der Kondensationsverlust ist alsdann ohne Erhöhung des Spannungsverlustes (d. i. ohne Verminderung des Leitungsdurchmessers) nicht günstiger zu gestalten.

Stündliche Kondensationswassermenge *k* in kg für 1 qm Rohrinnenfläche.

Versuchs-Dampfleitung.	Isolierung der Leitung.	Dampfspannung in Atm. Ueberdruck	Stündliches Kondensationswasser in kg *k*. Flanschen nicht umhüllt.	Flanschen umhüllt.	Bemerkungen.
Gufseiserne Leitung $l = 323$ m $d = 0{,}140$ m.	Grünzweig & Hartmannsche Isoliermasse, 20 mm dick + 10 mm Filz und Blechmantel	3,0 4,0 5,0 6,0	1,03 1,09 1,21 1,33		Schachtleitungen.
$l = 365$ m $d = 0{,}294$ m.	40 mm Korkschalen + 8 mm Asbestmasse	5,2	0,732		
Schweifseiserne Leitung $l = 330$ m $d = 0{,}075$ m.	Grünzweig & Hartmannsche Isoliermasse, 20 mm dick + 10 mm Filz	3,0 4,0 5,0 6,0	1,10 1,21 1,29 1,35		
Schweifseiserne Leitung $l = 22$ m $d = 0{,}120$ m.	alte Kieselguhrschnur, 25 mm dick	3,0 5,0	1,11 1,24		Wagerechte Leitungen.
	neue Kieselguhrschnur, 30 mm dick	3,0 5,0	0,93 1,13		
	Knochsche Masse, 30 mm dick	3,0 5,0	0,93 1,128		
	Nackte Leitung	3,0 5,0	3,39 4,17		
	Oertgen & Schulte. Kieselguhrmasse, 20 mm dick	3,0 5,0	0,96 1,128	0,85 0,956	
	Oertgen & Schulte. Torfschalen, 35 mm dick, mit Asbestunterlage	3,0 5,0	0,62 0,70	0,54 0,64	
	Oertgen & Schulte. Asbest-Seidenformstücke 26 mm dick mit Asbestunterlage	3,0 5,0	0,71 0,812		

β. Kesseldruck nicht vorgeschrieben. Alsdann müssen Vergleichsrechnungen über den Dampfverbrauch der ganzen Dampfmaschinenanlage samt Leitung bei großem und kleinem Spannungsabfall, also bei enger und weiter Leitung, sowie die besonderen praktischen Anforderungen an den Maschinenbetrieb den Leitungsdurchmesser bestimmen.

Im allgemeinen wird sich hinsichtlich der Dampfkosten großer Spannungsabfall und enge Leitung vorteilhafter erweisen als geringer Spannungsabfall und weite Leitung.

Den Durchmesser der Dampf-Zu- und -Ableitung bei Dampfmaschinen aus dem Querschnitt der Dampfkanäle am Cylinder abzuleiten, ist grundsätzlich unrichtig.

F. Winddruck und Luftwiderstand.

1. Winddruck auf ruhende Flächen.

1. Die Fläche ist senkrecht zur Windrichtung.

Bezeichnet:

P den Winddruck auf eine ruhende Fläche **senkrecht** zu P in kg,
F den Inhalt der Fläche in qm,
v die Geschwindigkeit des Windes in m i. d. Sek.,
g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m,
ζ einen Erfahrungskoefficienten, der mit der Größe der Fläche von 1,86 bis 3 wächst,
γ das Gewicht von 1 cbm Luft in kg (vergl. S. 251 u. 253),

so ist, genau wie für den Stoß des unbegrenzten Wassers (s. S. 248):

$$P = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

also der Winddruck in kg f. d. qm:

$$p = \zeta \gamma \frac{v^2}{2g}.$$

Für $\zeta = 1{,}86$ und $\gamma = 1{,}293$ kg f. d. cbm (für trockene Luft von 0° C und bei 760 mm Quecksilberdruck) ergiebt sich hieraus:

$$P = 0{,}12248\, F v^2; \qquad p = 0{,}12248\, v^2,$$

wonach folgende Tafel berechnet ist:

v	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
p	1,102	4,409	9,921	17,637	27,558	39,684	54,01	70,55	89,29	110,23	133,38	158,73

Nach dieser Formel sind die Drücke in der Beaufortschen **„Internationalen Skala für Windstärken“** (s. Abteil. II, Abschnitt Schiffbau) berechnet.

Dieselbe Gleichung gilt auch für den Widerstand, welchen ruhende Luft einer Fläche entgegensetzt, welche normal zu ihrer Ebene sich bewegt. ζ ist dabei abhängig von v und von der Beschleunigung der Bewegung.*)

*) Vergl. Handb. d. Baukunde I. S. 844.

2. Die Fläche ist geneigt zur Windrichtung.

Stöfst der Wind auf eine ruhende Fläche F, welche mit der Windrichtung den Winkel α bildet, so ist der Winddruck normal zur Fläche:

$$P = p_1 F,$$

worin, unter p den Wert unter 1. verstanden, zu setzen ist:

1) nach früheren Annahmen:

$$p_1 = p \sin^2 \alpha;$$

2) nach F. R. v. Lössl:

$$p_1 = p \sin \alpha;$$

3) nach Rayleigh und E. Gerlach:

$$p_1 = p \frac{(4 + \pi) \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}. \text{ *)}$$

Zur Zeit fehlt es an genügenden Versuchen darüber, welche Formel die richtige ist. Die erste Formel giebt die kleinsten, die dritte die gröfsten Werte.

Nach einem Gutachten der Königl. Preufs. Akademie des Bauwesens**) genügt es für deutsche meteorologische Verhältnisse, für die Berechnung der Standfestigkeit hoher Bauwerke $p = 125$ kg f. d. qm und $p_1 = p \sin^2 \alpha$ zu setzen.***) Rücksicht auf besondere örtliche Lage ist indes nicht ausgeschlossen. (Für Leuchttürme hat man bis $p = 330$ kg f. d. qm gewählt.)

Nach einem Erl. d. Min. d. öffentl. Arb. v. 16. Mai 1890 ist $p \geqq 125$, bei freistehenden Gebäuden nötigenfalls bis zu 250 kg f. d. qm zu setzen. Die Windrichtung ist wagerecht anzunehmen. Bei offenen Hallen ist aufserdem ein Winddruck von innen nach aufsen mit $p = 60$ kg f. d. qm zu berücksichtigen.

Der Normaldruck $P = p_1 F$ zerlegt sich in zwei Seitenkräfte:

in der Richtung des Windes . . . $P_1 = p_1 F \sin \alpha$;

normal zu dieser . . . . $P_2 = p_1 F \cos \alpha$.

3. Der Winddruck auf einen **Kreiscylinder**, dessen Achse normal zur Windrichtung ist, wird:

gemäfs Formel 1):

$$P_1 = \tfrac{2}{3} pF = 0{,}667\, pF,$$

gemäfs Formel 2):

$$P_1 = \tfrac{1}{4} \pi p F = 0{,}785\, pF,$$

worin F die Projektion der Cylinderfläche normal zur Windrichtung bedeutet. †)

4. Der Winddruck auf ein **Prisma** mit quadratischem Querschnitt (von der Seite a) ist:

wenn die Windrichtung normal zur Quadratseite:

$$P = pa \text{ kg f. d. lfd. m der Höhe,}$$

---

*) S. Centralbl. d. Bauverw. 1885. S. 203. Daselbst Vergleich der Ergebnisse dieser drei Formeln durch Zeichnung.

**) S. Centralbl. d. Bauverw. 1869. S. 279.

***) Nach demselben Gutachten soll für derartige Bauwerke bei diesem Winddrucke die Mittelkraft aus Eigengewicht des über dem gefährlichen Querschnitte liegenden Teils und ungünstigstem Winddruck noch im Mauerwerk verbleiben und dem äufseren Rande nicht so nahe treten, dafs die zulässige Druckbeanspruchung des Materials überschritten wird, selbst dann, wenn ein ungehindertes Klaffen der Lagerfugen windseitig möglich ist.

†) Zeichnerische Darstellung dieser Drücke s. Centralbl. d. Bauverw. 1884. S. 534 u. 1885 S. 60.

wenn die Windrichtung normal zur Diagonale:

nach Formel 1): $P = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, p a$ } kg f. d. lfd. m
nach Formel 2): $P = p a$ } der Höhe.

5. Bei **Belastungen** von **Dächern** u. s. w. durch den Wind ist zu berücksichtigen, dafs dieser bis zu 10^0 gegen die Wagerechte geneigt einfällt. (Vergl. jedoch den u. 2. genannten Min.-Erl.)

Bezeichnet β den Neigungswinkel der Dachfläche gegen die Wagerechte, so ist nach Formel 1) in 2.:

1) die Wind-Belastung des Daches normal zur Dachfläche:
$= p \sin^2(\beta + 10^0)$ kg f. d. qm der Dachfläche;

2) die lotrechte Wind-Belastung des Daches:
$= p \sin^2(\beta + 10^0)$ kg f. d. qm der wagerechten Projektion der Dachfläche. ($p = 125$ kg f. d. qm).

2. Winddruck auf bewegte Flächen (Windmühlenräder).

Bezeichnet:

v die Geschwindigkeit des Windes in der Achsenrichtung eines Windmühlenrades, in m i. d. Sek.,
ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades in m i. d. Sek.,
$w_x = x\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit eines Elementes dF einer Flügelfläche im Abstande x von der Achse, in m i. d. Sek.,
l die Länge eines Flügels in m,
w_l die Umfangsgeschwindigkeit im Abstande l in m i. d. Sek.,
b die konstante Flügelbreite in m,
a die Anzahl der Flügel (gew. $= 4$),
φ den veränderlichen Wert des Neigungswinkels der Flügelfläche gegen die Windrichtung, von $\varphi = \beta$ bis $\varphi = \alpha$ wachsend,
γ und ζ (gewöhnlich $= 3$), s. u. **1.**,

so ist der **Triebdruck** gegen das Flächenelement dF im Abstande x von der Flügelachse

$$= \zeta \gamma\, dF \frac{(v \sin\varphi - w_x \cos\varphi)^2}{2g} \cos\varphi .$$

Dieser Wert wird ein Maximum, wenn:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}\frac{w_x}{v} + \sqrt{2 + \left(\frac{3}{2}\frac{w_x}{v}\right)^2} \text{ ist.}$$

Durch Beobachtungen ist festgestellt worden, dafs für $l = 12$ m:

$$\frac{w_l}{v} = \frac{l\omega}{v} = 2{,}32,$$

also:

$$\frac{w_x}{v} = \frac{x\omega}{v} = 0{,}193\, x \text{ ist.}$$

Hiernach ergiebt sich (mit Hülfe obiger Gleichung für tg φ) für:

x	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m
φ	60°	64° 39′	68° 27′	71° 30′	73° 57′	75° 24
x	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m	12 m
φ	77° 29′	78° 48′	79° 50′	80° 54′	81° 29′	82° 8′

Die vom Winddruck auf das Flügelrad übertragene **mechanische Arbeit** in mkg i. d. Sek. ist:

$$E = \frac{2}{81} a \zeta \gamma \frac{b v^4}{\omega g} \Big(\Phi(\alpha) - \Phi(\beta) \Big),$$

wobei $$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{\cos^3 \varphi + \cos \varphi}{2 \sin^4 \varphi} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Der **achsial wirkende Winddruck** in kg gegen das Flügelrad ist:

$$D = \frac{2}{27} a \zeta \gamma \frac{b v^3}{\omega g} \Big(\Psi(\alpha) - \Psi(\beta) \Big),$$

worin $$\Psi(\varphi) = \frac{1 - 2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} + 2 \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Für oberflächliche Schätzungen kann man setzen:

die Arbeitsleistung: $E = 0{,}0302\, F_n\, v^3$ mkg i. d. Sek.

oder: $$N = \frac{F_n v^3}{2500} \text{ PS},$$

wenn F_n die gesamte Flügeloberfläche in qm bedeutet.

DRITTER ABSCHNITT.

WÄRME.

A. Messung der Wärme.

1. Es bezeichne:

R die einer bestimmten Temperatur entsprechenden Grade nach Réaumur,

C nach Celsius,

F nach Fahrenheit, so ist:

$$F = 32 + \tfrac{9}{5}C = 32 + \tfrac{9}{4}R,$$
$$C = \tfrac{5}{4}R = \tfrac{5}{9}(F - 32),$$
$$R = \tfrac{4}{5}C = \tfrac{4}{9}(F - 32).$$

Tafel zur Vergleichung der Thermometergrade.

C	*R*	*F*	*C*	*R*	*F*	*C*	*R*	*F*	*C*	*R*	*F*
−20	−16	−4	−2	−1,6	+28,4	+16	+12,8	+60,8	+34	+27.2	+93,2
−19	−15,2	−2,2	−1	−0,8	30,2	17	13,6	62,6	35	28,0	95,0
−18	−14,4	−0,4	0	0	32,0	18	14,4	64,4	36	28,8	96,8
−17	−13,6	+1,4	+1	+0,8	33.8	19	15,2	66,2	37	29,6	98,6
−16	−12,8	3.2	2	1,6	35,6	20	16,0	68,0	38	30.4	100,4
−15	−12,0	5,0	3	2,4	37,4	21	16,8	69,8	39	31,2	102,2
−14	−11,2	6,8	4	3,2	39.2	22	17,6	71,6	40	32,0	104,0
−13	−10,4	8,6	5	4,0	41,0	23	18,4	73,4	41	32.8	105,8
−12	−9,6	10,4	6	4,8	42.8	24	19,2	75,2	42	33.6	107,6
−11	−8,8	12,2	7	5,6	44,6	25	20,0	77,0	43	34,4	109,4
−10	−8,0	14,0	8	6,4	46,4	26	20,8	78.8	44	35,2	111,2
−9	−7,2	15,8	9	7,2	48,2	27	21,6	80,6	45	36,0	113,0
−8	−6,4	17,6	10	8,0	50,0	28	22,4	82,4	46	36,8	114,8
−7	−5,6	19,4	11	8,8	51,8	29	23.2	84,2	47	37,6	116,6
−6	−4,8	21,2	12	9,6	53.6	30	24,0	86,0	48	38,4	118,4
−5	−4,0	23,0	13	10,4	55.4	31	24,8	87,8	49	39,2	120,2
−4	−3,2	24,8	14	11,2	57,2	32	25,6	89,6	50	40,0	122,0
−3	−2,4	26,6	15	12,0	59,0	33	26,4	91,4	51	40,8	123,8

C	R	F	C	R	F	C	R	F	C	R	F
+52	+41,6	+125,6	+ 77	+61,6	+170,6	+102	+ 81,6	+215,6	+127	+101,6	+260,6
53	42,4	127,4	78	62,4	172,4	103	82,4	217,4	128	102,4	262,4
54	43,2	129,2	79	63,2	174,2	104	83,2	219,2	129	103,2	264,2
55	44,0	131,0	80	64,0	176,0	105	84,0	221,0	130	104,0	266,0
56	44,8	132,8	81	64,8	177,8	106	84,8	222,8	131	104,8	267,8
57	45,6	134,6	82	65,6	179,6	107	85,6	224,6	132	105,6	269,6
58	46,4	136,4	83	66,4	181,4	108	86,4	226,4	133	106,4	271,4
59	47,2	138,2	84	67,2	183,2	109	87,2	228,2	134	107,2	273,2
60	48,0	140,0	85	68,0	185,0	110	88,0	230,0	135	108,0	275,0
61	48,8	141,8	86	68,8	186,8	111	88,8	231,8	136	108,8	276,8
62	49,6	143,6	87	69,6	188,6	112	89,6	233,6	137	109,6	278,6
63	50,4	145,4	88	70,4	190,4	113	90,4	235,4	138	110,4	280,4
64	51,2	147,2	89	71,2	192,2	114	91,2	237,2	139	111,2	282,2
65	52,0	149,0	90	72,0	194,0	115	92,0	239,0	140	112,0	284,0
66	52,8	150,8	91	72,8	195,8	116	92,8	240,8	141	112,8	285,8
67	53,6	152,6	92	73,6	197,6	117	93,6	242,6	142	113,6	287,6
68	54,4	154,4	93	74,4	199,4	118	94,4	244,4	143	114,4	289,4
69	55,2	156,2	94	75,2	201,2	119	95,2	246,2	144	115,2	291,2
70	56,0	158,0	95	76,0	203,0	120	96,0	248,0	145	116,0	293,0
71	56,8	159,8	96	76,8	204,8	121	96,8	249,8	146	116,8	294,8
72	57,6	161,6	97	77,6	206,6	122	97,6	251,6	147	117,6	296,6
73	58,4	163,4	98	78,4	208,4	123	98,4	253,4	148	118,4	298,4
74	59,2	165,2	99	79,2	210,2	124	99,2	255,2	149	119,2	300,2
75	60,0	167,0	100	80,0	212,0	125	100,0	257,0	150	120,0	302,0
76	60,8	168,8	101	80,8	213,8	126	100,8	258,8	151	120,8	303,8

2. Bis zu + 280° C sind **Quecksilberthermometer** allen anderen unbedingt vorzuziehen; bei kurzer Dauer des Versuches kann man sie selbst bis 350° C anwenden, namentlich dann, wenn das Thermometer-Rohr mit Stickstoff gefüllt ist, welcher bei steigendem Quecksilberspiegel durch seine Kompression das Zerreifsen des Quecksilberfadens, durch die Quecksilberdämpfe bewirkt, verhütet.

Zur Messung niederer Temperaturen (bis — 100° C) dienen **Alkoholthermometer.**

Höhere Temperaturen werden durch **Pyrometer** gemessen, deren Anordnung teils auf der Formänderung zweier aufeinander gelöteter, verschiedener Metallstreifen, teils auf dem Unterschiede der Ausdehnungen zweier verschiedener Körper*), teils auf der Mischung von heifser und kalter Luft beruhen (Bestimmung der Temperatur von heifsem Gebläsewind), ferner durch das Thalpotasimeter von Schäffer & Budenberg und durch das elektrische Widerstands-Pyrometer von Siemens.**)

Sehr hohe Temperaturen kann man dadurch bestimmen, dafs man einen geeigneten Körper (z. B. eine Platin- oder Eisenkugel), dessen Gewicht G (in kg) und für dessen Material die mittlere specifische Wärme c (S. 286) bekannt ist, die Temperatur des zu untersuchenden Körpers (z. B. flüssigen Metalls) annehmen läfst. Bringt man demnächst jenen Körper in eine abgewogene Menge Q

---

*) Graphit-Pyrometer von Steinle u. Hartung, vergl. Handb. d. Baukde. I. S. 802.
**) Vergl. ebendaselbst S. 803 u. 804.

kg Wasser von bekannter Temperatur t_1, so wird die Temperatur des Wasser auf t_2 erhöht, und es folgt dann die Temperatur des zu untersuchenden Körpers:

$$t = t_2 + \frac{(t_2 - t_1)\,Q}{G\,c}.$$

Für c ist die mittlere specifische Wärme für die Temperaturgrenzen t und t_2 einzuführen; für Schweifseisen ist z. B. nach Weinhold:

$$c = 0{,}105\,907 + 0{,}000\,032\,69\,(t + t_2) + 0{,}000\,000\,011\,08\,[t^2 + t_2^2 + (t + t_2)^2].$$

Hat man die Temperatur eines flüssigen Metalls zu bestimmen, so giefst man eine beliebige Menge davon in Wasser, mifst die Temperaturerhöhung und wiegt das Metall nach dem Erkalten.

Die teilweise Verdampfung des Wassers, die gleichzeitige Erwärmung des Gefäfses u. s. w. beeinflussen die nach diesen Verfahren erhaltenen Werte.

Pyrometergrade nach Wedgewood

verglichen mit Thermometergraden nach Celsius.

Pyrometergrade nach Wedgewood.	Thermometergrade nach Celsius.	Glühfarben des Eisens.	Pyrometergrade nach Wedgewood.	Thermometergrade nach Celsius.
0° W	575° C	Im Dunkeln rot glühend.	15° W	1663° C
1	648		16	1735
2	720	Dunkelrot.	17	1808
3	793	Dunkelkirschrot.	18	1880
4	865		19	1953
5	938	Kirschrot (900).	20	2025
6	1010	Hellkirschrot.	21	2098
7	1083	Dunkelorange.	22	2170
8	1155	Helles Glühen.	23	2243
9	1228	Hellorange.	24	2315
10	1300	Weifsglühend.	25	2388
11	1373	Starkes Weifsglühen.	26	2460
		Schweifshitze (1400).	27	2533
12	1445		28	2605
13	1518	Blendend weifs.	29	2678
14	1590		30	2750

B. Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

a. Ausdehnung starrer Körper.

Unter dem **linearen Ausdehnungskoefficienten** (α) eines Körpers versteht man die Verlängerung, um welche die Längeneinheit desselben bei 1° Temperaturerhöhung zunimmt. Der Koefficient für

die Flächenausdehnung ist (annähernd) doppelt $= 2\alpha$, der für die räumliche Ausdehnung dreimal so grofs $= 3\alpha$.

Der Ausdehnungskoefficient α wächst im allgemeinen mit der Temperatur, kann jedoch, wie hier geschehen, annähernd als konstant betrachtet werden.

Bezeichnen:

l_1 und l_2 die Längen, F_1 und F_2 die Querschnitte, V_1 und V_2 die Rauminhalte eines Körpers bei den Temperaturen t_1 und t_2,

so ist:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}$$ und fast genau:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1 + 2\alpha t_1}{1 + 2\alpha t_2}; \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + 3\alpha t_1}{1 + 3\alpha t_2}.$$

1. Tafel über die Ausdehnung starrer Körper

bei der Temperaturzunahme von 0 bis 100 Grad C.

Der Koefficient der Längenausdehnung (für $100^0 = 100\alpha$) ist für:

Blei	0,002848	1: 351	Messingdraht	0,001933	1: 517
Bronze . . .	0,001820	1: 541	Platin . . .	0,000884	1:1131
Eiche	0,000764	1:1340	Schweifseisen	0,001211	1: 819
Eisendraht . .	0,001235	1: 812	„ (0 bis 300°)	0,001468	1: 681
Glas	0,000861	1:1161	Silber . . .	0,001909	1: 524
„ bleihaltiges	0,000872	1:1147	Stabeisen . .	0,001235	1: 812
„ englisches.	0,000812	1:1243	Stahl, gehärtet	0,001240	1: 807
Gold, ausgeglüht	0,001514	1: 661	„ weich*)	0,001079	1: 927
Gufseisen . . .	0,001067	1: 901	Tanne . . .	0,000352	1:2841
Kalkstein . .	0,000809	1:1236	Zink gegossen	0,002941	1: 340
Kupfer . . .	0,001643	1: 582	„ gehämmert	0,003108	1: 322
„ (0 bis 300°	0,001883	1: 531	Zinn . . .	0,001938	1: 516
Messing, gegossen	0 001875	1: 533			

Die **Ausdehnungs- oder Zusammenziehungskraft** einer prismatischen Stange bei einer Temperatur-Veränderung von t^0 C ist:

$$P = \alpha E t F,$$

wenn α den Ausdehnungs-Koefficienten, E den Elasticitätsmodul (s. Vierter Abschnitt, Festigkeitslehre) und F den Querschnitt bezeichnet.

---

*) Nach Rudeloff, Z. d. V. d. Ing. 1891. S. 381: 0,0012161 bis 0,0011106 bei 0,09 bis 0,97 % Kohlenstoff-Gehalt.

2. Lineares Schwindmafs einiger Metalle.

Blei	1 : 92	Stabeisen, gewalzt	1 : 54 bis 1 : 55
Bronze	1 : 63	Flufsstahl	1 : 64
Feinkorneisen	1 : 72	Wismut	1 : 265
Glockenmetall	1 : 65	Zink, gegossen	1 : 62
Gufseisen	1 : 96	Zinn	1 : 128
Kanonenmetall	1 : 134	100 G.-T. Kupfer, 12,5 „ Zinn	1 : 134
Messing	1 : 65		
Puddelstahl	1 : 72		

In Walzwerken rechnet man 12 mm Schwindung f. d. lfd. m.

b. Ausdehnung flüssiger Körper.

Bei Flüssigkeiten und Gasen handelt es sich nur um die räumliche Ausdehnung.

Der Ausdehnungskoefficient der Flüssigkeiten ist wesentlich von der Temperatur abhängig, und zwar ist zu setzen das Volumen bei t^0:

$$V_t = V_0 (1 + at + bt^2 + ct^3 + dt^4);\ 3\alpha = a + bt + ct^2 + dt^3.$$

Tafel der Koefficienten *a*, *b*, *c*, *d*.

Flüssigkeit.	*a*	*b*	*c*	*d*
Aether (bis 120°)	0,001 348 906	0,000 006 554	— 0,000 000 034 491	0,000 000 000 338
Alkohol	0,000 738 923	0,000 010 552	0,000 000 092 481	0,000 000 000 404
Olivenöl	0,000 798	— 0,000 000 773	0,000 000 008 274	—
Terpentinöl (bis 160°)	0,000 686 614	0,000 005 002	— 0,000 000 025 536	0,000 000 000 069
Quecksilber (bis 300°)	0,000 179 05	0,000 000 025 2	—	—

Für **Quecksilber** kann zwischen 0 und 100° $a = 3\alpha =$ konstant $= 0{,}00018153 = 1 : 5509$ gesetzt werden.

Für **Wasser** ist bei 4° C die Dichtigkeit am gröfsten. Setzt man das Volumen bei 4° C = 1, so ist es nach Jolly und Hirn bei:

0° … 1,000 126	50° … 1,011 877	100° … 1,043 116	150° … 1,090 30
10° … 1,000 257	60° … 1,016 954	110° … 1,051 19	160° … 1,101 79
20° … 1,001 732	70° … 1,022 384	120° … 1,059 93	170° … 1,113 95
30° … 1,004 234	80° … 1,029 003	130° … 1,069 36	180° … 1,126 78
40° … 1,007 627	90° … 1,035 829	140° … 1,079 49	190° … 1,140 26

200° … 1,154 38.

c. Ausdehnung gasförmiger Körper.

Nach der Annahme von Gay-Lussac ist für alle Gase der Ausdehnungskoefficient α konstant $= 0{,}003665 = 1 : 273$.*)

Nach Regnault ist jedoch α (vergl. auch S. 252) für:

Wasserstoff	0,003 661 3	Kohlenoxyd	0,003 668 8
Luft	0,003 670 6	Kohlensäure	0,003 709 9
Stickoxydul	0,003 719 5	Schweflige Säure	0,003 902 8

*) Es ist ausdrücklich hervorzuheben, dafs hier und in allen Anwendungen der (räumliche) Ausdehnungskoefficient der Gase mit α, nicht mit 3α, bezeichnet wird.

C. Specifische Wärme.

1. Wärmeeinheit (Kalorie) = 1 WE. ist die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg Wasser von 0° auf 1° C zu erhöhen.

2. Specifische Wärme eines Körpers ist die Wärmemenge (Anzahl Wärme-Einheiten), welche erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg des Körpers um 1° C zu erhöhen.

G kg eines Körpers von der specifischen Wärme *c* erfordern demnach zu einer Temperaturerhöhung um *t* Grad C:

$$c G t \text{ Wärme-Einheiten (genau } G\int c\,dt \text{ WE.).}$$

3. Tafel der specifischen Wärme.

α) **Für starre und flüssige Körper.** Wasser (H_2O) = 1.

Körper.	Spec. Wärme.	Körper.	Spec. Wärme.	Körper.	Spec. Wärme.
Aether	0,5207	Holz (Fichten-)	0,6500	Schwefel, starr	0,1764
Alkohol (ab-		„ (Tannen-)	0,6540	„ geschmolzen	0,2026
sol.), spec.		Holzkohle	0,2411	Schwefelsäure	0,3350
Gew. 0,81	0,7000	Holzgeist	0,5901	Silber	0,0570
Antimon	0,0512	Kieselsäure	0,1950	Stahl, weicher	0,1165
Asche	0,2000	Koks	0,2031	„ harter	0,1184
Blei	0,0314	Kupfer	0,0952	Terpentinöl	0,4720
Bleioxyd	0,0512	Magnesium	0,2469	Wismut	0,0305
Borsäure	0,2374	Marmor	0,2099	Ziegelsteine	
Calcium	0,1709	Messing	0,0939	0,1890 bis	0,2410
Eis	0,505	Oelbild. Gas		Zink	0,0955
Flintglas	0,1900	(C_2H_4)	0,404	Zinn	0,0562
Gips	0,1966	Olivenöl	0,3096		
Glas, gekühltes	0,1937	Phosphor	0,1896		
„ sprödes	0,1923	Platin	0,0324		
Gold	0,0324	Quarz	0,1894		
Graphit	0,1960	Quecksilber	0,0330	SO_2	0,155
Grubengas		Roheisen	0,1298	Mn_3O_4	0,165
(CH_4)	0,593	„ zw. 0° u.		Fe_2O_3	0,170
Hochofen-		200°	0,1300	MnO	0,191
schlacke	0,1950	„ zw. 0° u.		SiO_2	0,191
Holz (Birn-		1200°	0,1600	Al_2O_3	0,210
baum-)	0,500	„ flüssig	0,2500	$CaCO_3$	0,215
Holz (Eichen-)	0,5700	Schweifseisen	0,1138	$MgCO_3$	0,220

Die specifische Wärme des **Wassers** ist nach Regnault:

$$c = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}0000009\,t^2.$$

In technischen Rechnungen setzt man häufig die specifische Wärme des Wassers konstant gleich 1,0224. — Tafel der Flüssigkeitswärme des Wassers s. S. 257 (auch 258 u. 259), Sp. 4.

β) Für Gase und Dämpfe. Wasser = 1.

Die specifische Wärme ist nahezu unabhängig von der Temperatur.

Körper.	Sp. W. bei konstantem Drucke. c_1	Sp. W. bei konstantem Volumen. c	$n = \frac{c_1}{c}$.	Sp. W. bei konstantem Drucke für Luft = 1.
Atmosphärische Luft .	0,2375	0,1685	1,4098	1,0000
Sauerstoff	0,2175	0,1551	1,4026	0,9180
Stickstoff	0,2438	0,1727	1,4114	1,0265
Wasserstoff	3,4090	2,4119	1,4132	14,3231
Aetherdampf	0,4810	0,3411	—	2,0235
Alkoholdampf . . .	0,4513	0,3200	—	1,8986
Kohlensäure bei 0° .	0,1870	i. M. 0,1714	i. M. 1,265	0,7874
„ „ 100° .	0,2145			0,9032
„ „ 200° .	0,2396			1,0088
Kohlenoxyd	0,2450	0,1736	1,411	1,0793
Wasserdampf . . .	0,4750	0,3337	1,300	1,9794
desgl. mäfsig überhitzt	0,4805	0,3694	1,301	2,0232
Grubengas	0,5929	0,4679	1,267	2,4964
Oelbildendes Gas . .	0,4040	0,3326	1,215	1,7011

4. Temperatur von Mischungen.

$G + G_1$ kg einer Mischung, entstanden aus G kg eines Körpers von t^0 und der specifischen Wärme c, und aus G_1 kg eines Körpers von $t_1{}^0$ und der specifischen Wärme c_1, haben eine Temperatur von:

$$t_m = \frac{c\,G\,t + c_1\,G_1\,t_1}{c\,G + c_1\,G_1} \text{ Grad.}$$

Um G kg eines Körpers von der specifischen Wärme c und der Temperatur t^0 auf die Temperatur t_m^0 zu bringen, sind erforderlich:

$$G_1 = \frac{c}{c_1}\,G\,\frac{t_m - t}{t_m - t_1} \text{ kg}$$

eines Körpers von der specifischen Wärme c_1 und von $t_1{}^0$.

5. Kältemischungen.

Die niedrigste Temperatur, welche eine Kältemischung hervorbringen kann, ist der Gefrierpunkt der entstehenden Lösung.

Mischungen.	G.-T.	Celsius-Thermometer sinkt von	auf	Mischungen.	G.-T.	Celsius-Thermometer sinkt von	auf
Natriumphosphat	9	12,5	— 6	Natriumsulfat	6	10	—25
Salmiak	6			Ammoniumnitrat	5		
verd. Salpeters.	4			verd. Salpeters.	4		

Mischungen.	G.-T.	Celsius-Thermometer sinkt von	auf	Mischungen.	G.-T.	Celsius-Thermometer sinkt von	auf
Salmiak Salpeter Wasser	5 5 16	10	—12	Natriumsulfat Salmiak Salpeter verd. Salpeters.	6 4 2 4	10	—23
Natriumcarbonat Ammoniumnitrat Wasser	1 1 1	10	—14	Chlornatrium Schnee	1 3	0	—17,7
Natriumsulfat verd. Salpeters.	3 2	10	—19	Salpeter Salmiak Wasser	1 1 1	8	—24
Natriumsulfat Salpeter Salmiak Wasser	8 5 5 16	10	—15	verd. Salpeters. Schnee	1 1	—14	—35
Natriumsulfat Salzsäure	8 5	10	—18	Kali Schnee	4 3	0	—37
Natriumsulfat verd. Schwefels.	5 4	10	—16	verd. Schwefels. verd. Salpeters. Schnee	1 1 2	—19	—40
Chlornatrium Schnee	1 1	0	—18	verd. Schwefels. Schnee	1 1	—5	—41
Ammoniumnitrat Wasser	1 1	10	—16	Chlorcalcium Schnee	3 2	0	—33
Natriumphosphat verd. Salpeters.	9 4	15	—9	Chlorcalcium Schnee	2 1	0	—42

D. Aenderung der Aggregatform durch die Wärme.

a. Schmelz- oder Gefrierpunkte verschiedener Körper.

Körper.	Grad C.	Körper.	Grad C.
Platin	2500	Emailfarben	963,5
Schweifseisen . . .	1500—1600	Delta-Metall	950
Nickel	1400—1500	Silber	954
Stahl, strengflüssig .	1400	Bronze	900
„ weichflüssig .	1300	Aluminium	600—700
Eisenhochofenschlacke	1300—1430	Antimon	425
Gufseisen, graues . .	1200	Zink	412
„ weifses .	1100	Blei	334
Glas, bleifrei . . .	1200	Wismut	260
„ bleihaltig . .	1000	Zinn	228
Kupfer	1090	Kautschuk	125
Gold	1037	Schwefel	109
Messing	1015	Natrium	96

Körper.	Grad C.	Körper.	Grad C.
Gelbes Wachs . . .	62,5	Terpentinöl . . .	— 10
Kalium	62,5	Kochsalzlösung ges. .	— 18
Paraffin	55	Quecksilber	— 39
Wallrat	49	Chlorcalciumlauge . .	— 40
Stearin	49—43	Ammoniak	— 75
Phosphor	43	Schweflige Säure . .	— 76
Seewasser	— 2,5	Flüssige Kohlensäure	— 78
Rüböl	— 3 — 4	Alkohol	—100

Wismutlote *) für leicht schmelzbares bleihaltiges Zinn	schmelzbar bei	100° C	3 Zinn	5 Blei	8 Wismut
	„ „	94 „	1 „	1 „	2 „
	„ „	123 „	1 „	1 „	1 „
	„ „	116 „	2 „	2 „	1 „
	„ „	124 „	3 „	3 „	1 „
	„ „	128 „	4 „	4 „	1 „
Weichlote für verzinntes Eisenblech, Kupfer, Messing, Zinn, Zink, Blei u. s. w.	schmelzbar bei	135° C	3 Zinn	2 Blei	
	„ „	137 „	2 „	1 „	
	„ „	144 „	3 „	1 „	
	„ „	149 „	4 „	1 „	
	„ „	151 „	1 „	1 „	
	„ „	155 „	6 „	1 „	
	„ „	183 „	1 „	2 „	
	„ „	194 „	5 „	1 „	
	„ „	207 „	1 „	4 „	

b. Siedepunkte.

1. Siedepunkte verschiedener Flüssigkeiten unter dem Drucke von 760 mm Quecksilbersäule.

Flüssigkeit.	Grad C.	Flüssigkeit.	Grad C.
Schwefel	448	Kochsalzlösung (ges.)	108,4
Quecksilber . . .	357,3	Seewasser	103
Schwefelsäure (spec. Gew. 1,85) . . .	325	Benzol (Benzin) . .	80,4
		Steinöl	80
Fette	300—325	Alkohol (spec. Gew. 0,79 bei 20°) . .	78,3
Fette Oele	310—320		
Leinöl	316	Holzgeist	65,5
Paraffin	300	Chloroform	61
Phosphor	290	Schwefelkohlenstoff .	46,3
Naphtalin	218	Schwefelsäure - Anhydrid	46
Chlorcalciumlösung (ges.)	179,5	Aether	35,0
Terpentinöl	157	Schweflige Säure .	—10
Salpetersäure (spec. Gew. 1,52) . . .	130	Ammoniak	—33
		Kohlensäure . . .	—78

*) Ueber Schmelzpunkte von Cadmium-Legierungen s. Gl. Ann. 1890. II. S. 88.

2. Siedepunkte des Wassers bei verschiedenen Barometerständen.

Barometerstand in mm.	Siedepunkt Grad C.	Barometerstand in mm.	Siedepunkt Grad C.	Barometerstand in mm.	Siedepunkt Grad C.
725,35	98,7	746,50	99,5	768,20	100,3
727,96	98,8	749,18	99,6	770,95	100,4
730,58	98,9	751,87	99,7	773,73	100,5
733,21	99,0	754,57	99,8	776,50	100,6
735,85	99,1	757,28	99,9	779,26	100,7
738,50	99,2	760,00	100,0	782,04	100,8
741,16	99,3	762,73	100,1	784,83	100,9
743,83	99,4	765,47	100,2	787,63	101,0

c. Schmelzwärme.

Schmelzwärme eines starren Körpers ist diejenige Anzahl von Wärmeeinheiten, welche verbraucht (latent) wird, um 1 kg des Körpers aus der starren in die flüssige Aggregatform ohne Erhöhung der Temperatur überzuführen. Dieselbe Wärmemenge wird beim Erstarren des flüssigen Körpers frei.

Tafel der Schmelzwärme verschiedener Körper.*)

Schwefel . . .	9,37	Salpeters. Kali .	48,90	Blei . . .	5,37
Phosphor . . .	5,03	Chlorcalcium . .	40,70	Zink . . .	28,13
Wasser (Eis) . .	79,25	Zinn	14,25	Silber . .	21,07
Salpeters. Natron	64,87	Wismut . . .	12,64	Quecksilber	2,82

d. Verdampfungswärme.

Verdampfungswärme (r) einer Flüssigkeit ist diejenige Anzahl von Wärmeeinheiten, welche verbraucht (latent) wird, um 1 kg der Flüssigkeit entgegen dem (konstanten) äufseren Drucke in Dampf von gleicher Temperatur zu verwandeln. Dieselbe Wärmemenge wird frei, wenn der Dampf sich kondensiert.

Die Verdampfungswärme (r) ist abhängig von der Temperatur (t), bei welcher die Verdampfung stattfindet.

Für **Wasserdampf** ist

1) nach Regnault:

$$r = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3 \text{ WE. f. d. kg,}$$

2) nach Clausius:

$$r = 607 - 0{,}708\,t \text{ WE. f. d. kg,}$$

*) Vergl. Person, Ann. d. Ch. et Ph. 3. Ser. XXI. 295.

3) überschläglich nach Watt:

$r = 540$ WE. f. d. kg.

Tafel der Werte von r für Wasserdampf s. S. 257 u. f., Formeln für r bei anderen Dämpfen s. S. 256.

E. Verbrennung, Heizeffekte und Verdampfungsfähigkeit.

1. Allgemeines.

100 G.-T. atmosphärischer Luft enthalten 23,58 O und 76,42 N. 100 R.-T. enthalten 21,33 O und 78,67 N. Hierin sind einbegriffen 0,8 Raum-% Wasserdampf und 0,041 Raum-% CO_2.

Bei **vollkommener Verbrennung** eines Brennstoffes verbindet sich der freie H unmittelbar mit dem C entweder zu leichtem Kohlenwasserstoff (Sumpf- oder Grubengas) CH_4, oder zu schwerem Kohlenwasserstoff (ölbildendes Gas) C_2H_4, welche beide, leicht brennbar, mit dem O der Luft zu CO_2 und zu H_2O verbrennen. Das Wasser des Brennstoffes wird zersetzt, H verbindet sich mit C zu einem Kohlenwasserstoff, O mit C zu CO; beide Gase verbrennen mit dem O der Luft zu CO_2 und H_2O.

Unvollkommene Verbrennung findet statt, sobald brennbare Gasarten unverbrannt entweichen.

H_2O	enthält	11,11	Gew.-% H	und	88,89	Gew.-% O,
CO_2	„	27,27	Gew.-% C	und	72,73	Gew.-% O,
CO	„	42,85	Gew.-% C	und	57,15	Gew.-% O.

CO_2 in Berührung mit glühendem C reduziert sich zu CO ($CO_2 + C = 2\,CO$). Die Wärmemenge ist dieselbe, ob C erst zu CO und dann zu CO_2, oder unmittelbar zu CO_2 verbrennt.

Für alle Verbrennungserscheinungen gilt die Regel:

Die Wärmemenge, welche bei der Verbindung zweier Stoffe frei wird, wird bei der Zerlegung wieder gebunden.

Absoluter Heizeffekt (Verbrennungswärme) eines Brennstoffes ist die Anzahl Wärmeeinheiten (WE.), welche bei der Verbrennung von 1 kg des Brennstoffes entwickelt werden.

Specifischer Heizeffekt eines Brennstoffes ist diejenige Anzahl Wärmeeinheiten, welche bei der Verbrennung von 1 l entwickelt werden. Er ist gleich dem Produkt aus absolutem Heizeffekt und specifischem Gewicht des Brennstoffes.

Pyrometrischer Heizeffekt (T) eines Brennstoffes ist die bei der Verbrennung erzeugte Temperatur in Graden C.

Nutzbarer Heizeffekt eines Brennstoffes ist die Menge Wasser von 0° in kg, welche 1 cbm des Brennstoffes zu verdampfen im stande ist.

2. Tafel der absoluten Heizeffekte.

1 kg des verbrannten Körpers liefert bei vollkommener Verbrennung mit Sauerstoff:

Verbrannte Körper.	WE.	Verbrannte Körper.	WE.
Aether	9028	CO zu CO_2	2403
Alkohol	7184	Kupfer (Cu zu CuO) .	683
Antimon	961	Leuchtgas	11—12000
Baumöl	11200	Petroleum	10000
Blei	266	Phosphor (P zu P_2O_5) .	5953
Eisen zu FeO	1258	Rüböl.	9300
„ „ Fe_3O_4 . . .	1677	Schwefel (S zu SO_2) .	2200
„ „ Fe_2O_3 . . .	1887	Schwefelkohlenstoff . .	3400
Grubengas CH_4 zu CO_2 +		Schwefelwasserstoff . .	2741
$2H_2O$ flüssig . . .	13346	Silicium (Si zu SiO_2) .	7830
CH_4 zu $CO_2 + 2H_2O$ Gas	11996	Talg	8370
C_2H_4 zu $2CO_2 + 2H_2O$		Terpentinöl	10852
flüssig	11958	Wachs	9000
C_2H_4 zu $2CO_2 + 2H_2O$ Gas	11186	Wasserstoff H zu H_2O	
Holzgeist	5307	flüssig	34180
C (Holzkohle) zu CO_2 .	8080	H zu H_2O Gas . . .	28780
C „ „ CO .	2473	Zink (Zn zu ZnO) . .	1301

Bemerkung. Unter den Angaben mit der Bemerkung „flüssig“ ist die Kondensationswärme des bei der Verbrennung gebildeten Wassers mit gerechnet. Bei den Angaben mit der Bemerkung „Gas“ ist nur die Bildung von Wasserdampf in betracht gezogen und daher dessen Verdampfungswärme nicht berücksichtigt.

3. Bedeutet:

k den Gehalt von 1 kg eines Brennstoffes an C, welcher zu CO_2,
k_1 den, welcher zu CO verbrennt, in kg,
h, w und A den Gehalt an Wasserstoff bezw. an chemisch gebundenem Wasser und Asche in kg,
p und p_1 den absoluten Heizeffekt des zu CO_2 bezw. CO verbrennenden C in WE.,
p_2 den absoluten Heizeffekt des H in WE.,
n das Gewicht des (von der zur Verbrennung erforderlichen atmosphärischen Luft mitgeführten) N in kg,
c, c_1, c_2, c_3 und c_4 die specifischen Wärmen bezw. der CO_2, des CO, des N, des Wasserdampfes und der Asche (s. S. 287),
$r = 540$ die Verdampfungswärme des Wasserdampfes (s. S. 291),

so ist (unter Voraussetzung einer Anfangstemperatur der beteiligten Körper von 0° C, eines konstanten Luftdrucks von 760 mm Quecksilbersäule und, wenn nur die zur Verbrennung gerade hinreichende

Luftmenge zutritt) der **pyrometrische Heizeffekt** dieses Brennstoffes in Graden Celsius:

$$T = \frac{p k + p_1 k_1 + (p_2 h - 9 h r) - w r}{8{,}67\, k c + 2{,}33\, k_1 c_1 + 9\, h c_3 + n c_2 + w c_3 + A c_4}, \text{ worin:}$$

$(k + k_1 + h + w + A) = 1$ und: $n = (2{,}67\, k + 1{,}33\, k_1 + 8\, h)\, 3{,}19$ ist.

Wenn sämtlicher C zu CO_2 verbrennt, so ist $k_1 = 0$ und die Formel wird nach Einsetzung der obigen Zahlenwerte:

$$T = \frac{2785\, k + 102000\, h - 226\, w}{k + 0{,}16\, w + 3{,}65\, h + 0{,}07\, A}.$$

Hiernach ergiebt sich nach Harmann folgende

Tafel der pyrometrischen Heizeffekte.

1 kg C in O verbrennend zu CO_2 = 10015° C, in Luft = 2716° C.
1 „ CO „ O „ „ CO_2 = 6950° C, „ „ = 2967° C.
1 „ H „ O „ „ H_2O = 6744° C, „ „ = 2694° C.

Brennstoff.	Mittlere Zusammensetzung in Gew.-% C	H	H_2O	Asche	Absoluter Heizeffekt. p WE.	Pyrometrischer Heizeffekt. T Grad C	Zur Verbrennung von 1 kg erforderliche theoretische Luftmenge kg	(bei 0° und 760 mm Druck) cbm	Aus der Verbrennung von 1 kg hervorgehende Gasmenge, reduziert auf 760 mm Quecksilberdruck und 0° C cbm	300° C cbm
Lufttrockenes Holz .	39,6	—	59,4	1	2820	1969	4,48	3,466	4,201	8,826
Lufttrockener Torf .	42,0	1,4	51,6	5	3550	2146	5,23	4,044	4,759	9,998
Faserige Braunkohle	44,4	0,9	47,2	8	3600	2191	5,33	4,123	4,755	9,990
Erdige „	50,4	1,8	37,8	10	4450	2357	6,32	4,884	5,449	11,448
Muschelige „	57,0	2,8	35,2	5	5350	2450	7,40	5,724	6,313	13,264
Sinterkohle	70,4	3,1	23,5	3	6600	2595	9,02	6,977	7,435	15,621
Backkohle	76,6	4,1	16,3	3	7500	2664	10,1	7,782	8,206	17,241
Sandkohle	79,6	4,1	13,3	3	7760	2688	10,4	8,045	8,431	17,713
Anthracit	87,7	3,1	7,2	2	8110	2734	11,0	8,491	8,744	18,371
Koks	92,0	—	—	5	7430	2774	9,6	7,441	8,043	16,898
Holzkohle	88,0	2,0	8,0	2	7750	2104	10,3	8,016	8,429	17,709
Leuchtgas*) . . .	—	—	—	—	13745	2390	16,0	12,4	17,05	—

Nach Péclet ist aufserdem die theoretisch erforderliche Luftmenge (Spalte 8):

für vollkommen trockenes Holz . . . 6,07,
für vollkommen trockenen Torf . . . 7,29,
für Torfkohle (m. 20% Asche) . . . 9,18,
für mittlere Steinkohle . . . . 10,8 kg f. d. kg.

*) Von 0,38 specifischem Gewicht und einer Zusammensetzung in Gew.-% = 4 C_2H_4, 51 CH_4, 42 H, 3 CO.

Die thatsächlich erforderliche Luftmenge ist gleich der doppelten theoretischen (Spalte 8) zu nehmen, weil sonst eine innige Mischung der Luft und Brenngase nicht eintritt.

4. Tafel für das Gewicht und den nutzbaren Heizeffekt verschiedener Brennstoffe.*)

Brennstoff.	Verkehrseinheit.	Gewicht in kg f. d. cbm.	Nutzbarer Heizeffekt (bei mittl. Wassergehalt). 1 cbm Brennstoff verdampft Wasser von 0°: kg
Kiefernholz	1 Klafter zu 3,34 cbm	374—397	1430—1660
Elsenholz	1 Klafter zu 3,34 cbm	350	1340
Birkenholz	1 Klafter zu 3,34 cbm	416	1560
Eichenholz	1 Klafter zu 3,34 cbm	468	1750
Rotbuchenholz	1 Klafter zu 3,34 cbm	465	1690
Weifsbuchenholz	1 Klafter zu 3,34 cbm	465	1700
Torf	1 Klafter zu 4,28 cbm	260—380	950—1390
Braunkohle	1 Tonne zu 4 Scheffel = 0,22 cbm	610—700	2395—1575
Torfkohle	1 Tonne zu 4 Scheffel = 0,22 cbm	285	2020
Koks	1 Tonne zu 4 Scheffel = 0,22 cbm	520—570	3840—4330
Steinkohle	1 Tonne zu 4 Scheffel = 0,22 cbm	740—960	4975—6945
Kiefernkohle	1 Tonne zu 3 Scheffel	194	1360

5. Bei mangelhafter Verbrennung erhält man geringere Wärmemenge und höhere Temperatur als bei vollkommener Verbrennung.

Der Wirkungsgrad einer Feuerungsanlage schwankt bei feststehenden Kesseln zwischen $\eta_1 = 0{,}8$ und 0,9; bei beweglichen Kesseln zwischen $\eta_1 = 0{,}7$ und 0,8. (Vergl. u. Dampfkessel.)

Das Ausstrahlungsverhältnis $\sigma = \dfrac{\text{ausgestrahlte Wärme}}{\text{auf dem Rost nutzbar gemachte Wärme}}$

beträgt nach Péclet: für Innenfeuerung 0,25 bis 0,3; für Unterfeuerung 0,2 bis 0,25.

F. Wärmeverbreitung.**)

a. Wärmeabgabe der Körper-Oberflächen.

Bezeichnet:

w_1 die durch Strahlung } abgegebene Anzahl WE.
w_2 „ „ Leitung (Berührung) } i. d. Std. und f. d. qm,

*) Nach Brix.

**) Mit Benutzung des Abschnittes „Wärmedurchgang" im Handb. d. Baukde. I. S. 806 u. f.

t_1 die Oberflächen-Temperatur in ° C,
t_2 „ Luft-Temperatur in ° C,
s den Strahlungs-Koefficienten,
b den Berührungs-Koefficienten,

so ist nach Dulong und Petit:

$$w_1 = 125\,s\,(1{,}0077^{t_1} - 1{,}0077^{t_2}),$$
$$w_2 = 0{,}55\,b\,(t_1 - t_2)^{1{,}233},$$

daher die gesamte Wärmeabgabe der Oberfläche F (in qm) i. d. Std.:

$$W = F(w_1 + w_2).$$

Werte des Strahlungs-Koefficienten s.

(Nach Péclet.)

Eisenblech, gewöhnl.	2,77	Gufseisen, verrostet	3,36	Rufs	4,01
„ poliert	0,45	Kohlenstaub	3,42	Sägespäne	3,53
„ verrostet	3,36	Kupfer	0,16	Sand, fein	3,62
„ verbleit	0,65	Messing, poliert	0,26	Silber, poliert	0,13
Gips, Holz, Ziegel	3,60	Oel	7,24	Wasser	5,31
Glas	2,91	Oelanstrich	3,71	Zink	0,24
Gufseisen, neu	3,17	Papier (Tapete)	3,77	Zinn	0,22

b ist von der Form und Ausdehnung der Körperoberfläche und von der Geschwindigkeit der bewegten Luftteilchen abhängig.

Nach Valérius ist:

$b = 4$ für eingeschlossene Luft,
$b = 5$ bis 6 für freie Luft.

Tafel zur Berechnung von W.

t	$1{,}0077^t$	$t^{1{,}233}$	t	$1{,}0077^t$	$t^{1{,}233}$	t	$1{,}0077^t$	$t^{1{,}233}$
10	1,080	17,10	90	1,994	256,8	170	3,684	562,5
20	1,165	40,20	100	2,153	292,4	180	3,978	603,5
30	1,259	66,27	110	2,325	328,9	190	4,295	645,2
40	1,359	94,48	120	2,510	366,1	200	4,637	687,4
50	1,467	124,4	130	2,711	404,0	225	5,617	794,8
60	1,584	153,8	140	2,927	442,8	250	6,804	905,0
70	1,711	188,4	150	3,160	482,1	275	8,242	1017,8
80	1,847	222,1	160	3,412	522,1	300	9,984	1133,2

Beispiel: Wieviel Wärme giebt eine gufseiserne Kugel von 500 mm Durchm. und 200° C konstanter Temperatur an die sie umgebende freie Luft von 20° C i. d. Min. ab?

Es ist:

$F = 0{,}7854$ qm, $t_1 = 200$, $t_2 = 20$, $s = 3{,}17$, $b = 5$;

also $W_m = \frac{1}{60} \cdot 0{,}7854 \left[125 \cdot 3{,}17\,(4{,}637 - 1{,}165) + 0{,}55 \cdot 5 \cdot 603{,}5\right]$

$= 0{,}01309\,(1375{,}8 + 1659{,}7) = 39{,}73$ WE.

b. Wärmedurchgang für Körper von gleichmäſsiger Dicke.

1. Allgemeines.

Es bezeichne:

W die Anzahl der i. d. Std. durchgehenden WE.,
t_1 die höhere, t_2 die niedrigere Temperatur in ^{0} C,
$\tau = t_1 - t_2$ die Temperaturabnahme beim Wärmedurchgang, in ^{0} C,
F_1 die Wärme aufnehmende Fläche in qm,
F_2 „ „ abgebende Fläche in qm,
δ die Gesamtstärke des Körpers in m,
$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$ die Stärken der einzelnen n Schichten in m,
α_1 bezw. α_2 die Wärme-Uebergangskoefficienten für die Flächen F_1 bezw. F_2,
$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \mu_{n-1}$ die Wärme-Uebergangskoefficienten für die Berührungsflächen der einzelnen Schichten,
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$ die Wärme-Leitungskoefficienten der einzelnen Schichten,
λ den Gesamt-Leitungskoefficienten,
C den Wärme-Durchgangskoefficienten, d. i. den Wärmedurchgang in WE. f. d. qm Fläche i. d. Std. und f. 1^0 C Temperaturunterschied.

Für α, λ und μ gelten dieselben Einheiten wie für C.

Für Wände, Mauern, Zwischendecken, Thüren u. s. w. ist $F_1 = F_2 = F$ und allgemein:

$$W = CF\tau,$$

wobei
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum_1^n \left(\frac{\delta}{\lambda}\right) + \sum_1^{n-1} \left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Es ist hierbei einbegriffen, daſs eine oder mehrere der n Schichten aus eingeschlossener Luft bestehen. — Aus der Formel für W S. 295 ergiebt sich:

$$\alpha_2 = \frac{w_1 + w_2}{t_1 - t_2} = 125\, s\, \frac{1{,}0077^{t_1} - 1{,}0077^{t_2}}{t_1 - t_2} + 0{,}55\, b\, (t_1 - t_2)^{0{,}233}$$

Werte des Gesamt-Leitungskoefficienten λ.*)

Baumwolle	0,04	Guttapercha	0,173
Blei	30	Holzasche	0,06
Bruchstein-Mauerwerk	1,3 — 2,1	Holzkohlenpulver	0,079
Eichenholz (über Hirn)	0,21	Kalkstein, feinkörnig	1,7 — 2,1
v. Einsiedelsche Isoliermasse	0,139	Kautschuk	0,173
Eisen	60	Kieselguhrkomposition	0,136
Eisenfeilspäne	0,158	Kieselguhrschnur	0,092
Filz	0,05	Knocksche Trockenmasse	0,12
Gasretorten-Graphit	4,96	Kokspulver	0,16
Gipsmörtel (Stuck)	0,4 — 0,63	Kork	0,143
Glas	0,75 — 0,88	Korkmasse	0,08

*) Nach Péclet, Lorenz, Weber, Kirchhoff und Hansemann.

Kreidepulver	0,09	Papier, Schreib-	0,043
Kupfer	260	Quarzsand	0,27
Leinwand	0,043—0,052	Sägemehl	0,065
Leroysche Masse	0,091	Schlackenwolle	0,101
Luft (eingeschlossen)	0,04	Tannenholz (über Hirn)	0,1
Marmor, grau, feinkörnig	3,48	„ (parallel z. d. Fasern)	0,17
„ weifs, grobkörnig	2,78	Thon, gebrannt	0,5—0,7
Mehnertsche Masse	0,119	Wolle	0,04
Messing, rot	89—102	Ziegelmauerwerk	0,7
„ gelb	73,5—91,5	Zink	92—110
Papier, Druck-	0,034	Zinn	51—58

Wird F_2 von stark bewegter Luft berührt, so ist zu setzen:

$$\alpha_2 = \infty\,.$$

Für den Wärmeeintritt aus gesättigtem Wasserdampf in eine reine Metallwand ist . . . . $\alpha_1 = 5000.$

Für den Wärmeaustritt aus reiner Metallwand in siedendes Wasser ist . . . . $\alpha_2 = 5000.$

Für den Wärmeübergang aus nicht siedendem, heifsem Wasser in reine Metallwand und umgekehrt ist:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 400 + 10\,\tau.$$

2. Wärmedurchgang durch Voll-Mauern.

Es ist hier:

$$W = CF\tau,$$

wobei

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}.$$

Für Ziegelmauerwerk ist $\lambda = 0{,}7$, für Bruchsteinmauerwerk $\lambda = 1{,}3$ bis $2{,}1$ je nach der Dichtigkeit der Steinart.

Für Zwischenmauern ist $\alpha_1 = \alpha_2 = 8$, für Aufsenmauern $\alpha_1 = 8$ und $\alpha_2 = 10$ bezw. bei starkem Wind $\alpha_2 = \infty$. Die hiermit berechneten Werte von C sind zur Sicherheit um 10% zu erhöhen.

Werte von C für Voll-Mauern.

Ziegelmauerwerk ($\lambda = 0{,}7$).				Bruchsteinmauerwerk ($\lambda = 1{,}7$).		
Mauerstärke δ in m.	Zwischenmauern.	Aufsenmauern bei Windstille.	Aufsenmauern bei starkem Wind.	Mauerstärke δ in m.	Aufsenmauern bei Windstille.	Aufsenmauern bei starkem Wind.
0,13	2,53	2,68	3,54	0,30	2,74	3,65
0,25	1,81	1,90	2,28	0,40	2,39	3,05
0,38	1,39	1,43	1,65	0,50	2,12	2,63
0,51	1,12	1,15	1,29	0,60	1,90	2,30
0,64	0,94	0,97	1,06	0,70	1,73	2,05
0,77	0,81	0,83	0,90	0,80	1,58	1,85
0,90	0,72	0,73	0,78	0,90	1,46	1,68
1,03	0,64	0,64	0,67	1,00	1,35	1,54
1,16	0,58	0,58	0,62	1,15	1,22	1,37
1,29	0,53	0,53	0,55	1,30	1,11	1,24

3. Wärmedurchgang durch Hohlmauern und Mauern mit Isolierschicht.

Unter Benutzung der allgemeinen Gleichung unter 1. hat man:

$$W = CF\tau,$$

wobei

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}.$$

Ist die Trennungsschicht Luft von der Dicke δ_2, so ist $\lambda_1 = \lambda_3$, wenn die Innen- und Aufsenschicht aus demselben Material bestehen. Zur Sicherheit vernachlässigt man den Widerstand der Luftschicht gegen Wärmeleitung, setzt also $\lambda_2 = \infty$. Ferner wähle man $\mu_1 = \mu_2 = 8$; α_1 und α_2 wie bei Vollmauern unter 2. C ist zur Sicherheit noch um 10% zu erhöhen.

Beispiele: Eine Hohlmauer aus Ziegeln von 0,64 m Stärke enthält eine Luftschicht von 0,14 m Dicke und bietet nach aufsen dem stark bewegten Wind eine Angriffsfläche von 70 qm. Die Innentemperatur ist 20° C, die Aufsentemperatur ist —15° C. Wie grofs ist der Wärmeverlust i. d. Std.?

Es ist:

$\alpha_1 = 8$; $\alpha_2 = \infty$; $\lambda_1 = \lambda_3 = 0{,}7$; $\lambda_2 = \infty$; $\delta_1 = \delta_3 = 0{,}25$ m; $\delta_2 = 0{,}14$ m

$\mu_1 = \mu_2 = 8$; $F = 70$ qm; $\tau = 35^0$.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{8} + \frac{0{,}25}{0{,}7} + \frac{0{,}25}{0{,}7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{5}{7} = \frac{61}{56}.$$

Mithin das um 10% vergröfserte $C = \frac{56 + 5{,}6}{61} = \frac{61{,}6}{61} = 1{,}01$ und

$W = 1{,}01 . 70 . 35 = 2475$ WE. i. d. Std.

Wäre der Zwischenraum mit Kokspulver verfüllt, für welches $\lambda_2 = 0{,}16$ (s. Tafel S. 296), so würde das um 10% vergröfserte $C = 0{,}56$ und . . . . $W = 1372$ WE. i. d. Std.

Für eine Vollmauer von 0,64 m Wandstärke wäre laut Tafel S. 297 $C = 1{,}06$, also für vorliegenden Fall . . . . $W = 2597$ WE. i. d. Std.

4. Wärmedurchgang durch Thüren und Holzwände.

Für Tannenholz ist $\lambda = 0{,}1$; für Eichenholz $\lambda = 0{,}21$. Für Wände und Thüren innen $\alpha_1 = \alpha_2 = 8$; für Wände und Thüren, die von ruhiger Aufsenluft berührt werden, $\alpha_1 = 8$ und $\alpha_2 = 10{,}3$; ist die Aufsenluft stark bewegt, so ist $\alpha_2 = \infty$ zu setzen.

Werte von C für einfache Thüren und Holzwände.

Stärke der Thür- oder Holzwand. cm	Tannenholz ($\lambda = 0{,}10$).			Eichenholz ($\lambda = 0{,}21$).		
	$\alpha_1 = \alpha_2 = 8.$	$\alpha_1 = 8$; $\alpha_2 = 10{,}3.$	$\alpha_1 = 8$; $\alpha_2 = \infty.$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 8.$	$\alpha_1 = 8$; $\alpha_2 = 10{,}3.$	$\alpha_1 = 8$; $\alpha_2 = \infty.$
2	2,22	2,37	3,08	2,90	3,15	4,55
3	1,82	1,92	2,35	2,55	2,74	3,73
4	1,54	1,61	1,90	2,27	2,43	3,17
5	1,33	1,39	1,60	2,05	2,17	2,75
6	1,18	1,22	1,38	1,87	1,97	2,43

Bei **Doppelthüren** und **doppelten Holzwänden** mit zwischenliegender Luftschicht ist C ähnlich zu berechnen wie bei Hohlmauern, S. 298.

Beispiel: Mittlere Stärke jeder Thür $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}03$ m; die äufsere Thürfläche grenzt an freie, ruhige Luft. Für Tannenholz ist

$$\frac{1}{C} = \frac{3}{8} + \frac{1}{10{,}3} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{0{,}10} = 0{,}472 + \frac{0{,}06}{0{,}10} = 1{,}072; \text{ mithin } C = 0{,}93.$$

Ist die Aufsenfläche der Thür starkem Winde ausgesetzt, so ist im vorigen Falle

$$\frac{1}{C} = \frac{3}{8} + \frac{0{,}06}{0{,}10} = 0{,}975, \text{ also } C = 1{,}03.$$

5. Wärmedurchgang durch Zwischendecken.

Mittlere Werte von C.

α) In der Richtung von unten nach oben:

Für gewöhnliche Zimmerdecken . . . . $C_o = 1{,}10$.

„ Gipsdecken mit Schalung, Wellerung und Fülllage . . . . $C_o = 0{,}50$.

β) In der Richtung von oben nach unten:

Für gewöhnliche Zimmerdecken . . . . $C_u = 0{,}65$.

„ Gipsdecken mit Schalung, Wellerung und Fülllage . . . . $C_u = 0{,}37$.

Für Decken, bestehend aus Fufsboden, Fülllage und Backstein-Untermauerung (Kellerkappen) . . . $C_u = 0{,}70$.

Für nicht unterkellerten Fufsboden, bestehend aus Holzbelag, Fülllage und Sand- oder Erdschicht . . . $C_u = 0{,}70$.

6. Wärmedurchgang durch Glastafeln.

Mittlere Werte von C.

Für einfache Fenster (Aufsenluft mäfsig bewegt) . . $C = 4{,}4$.
„ „ „ („ stark „) . . $C = 7{,}0$.
„ „ Oberlichter . . . . $C = 7{,}0$.
„ Doppelfenster (Aufsenluft mäfsig bewegt) . . . $C = 2{,}3$.
„ „ („ stark „) . . . $C = 3{,}2$.
„ doppelte Oberlichter . . . . $C = 3{,}2$.

Bei Oberlicht-Fenstern führe man bei Bestimmung von τ je nach der Höhe des Raumes für t_1 einen um 5 bis 10° C höheren Wert als die mittlere Temperatur des Raumes ein.

7. Wärmedurchgang durch cylindrische Rohrwände.

Bezeichnungen s. S. 296.

α) Die gleichmäfsige, höhere Temperatur t_1 herrsche innerhalb des Rohres, t_2 aufserhalb desselben.

Ferner bezeichne:

d den inneren } Durchmesser des Rohres, in m,
D den äufseren }
D_1 den äufseren Durchmesser der Rohrverpackung, in m,
l die Rohrlänge in m.

Die konstante Rohrdicke ist $\delta = \frac{1}{2}(D - d)$ und die Wärme abgebende Fläche $F = \pi D l$.

Es ist:
$$W = C F \tau,$$
wobei
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{D}{d} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{D}{2\lambda}\ln\frac{D}{d}.$$

Für $\frac{\delta}{d} \leqq 0{,}05$ genügt $\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}$.

Für verpackte Rohre, wobei $\delta_1 = \frac{1}{2}(D_1 - D)$ die Dicke der Packung, λ_1 deren Leitungskoefficient, und μ der Wärme-Uebergangskoefficient zwischen den Schichten δ und δ_1 ist, wird:
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{D}{d} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\mu}\frac{D}{D_1} + \frac{D}{2\lambda}\ln\frac{D}{d} + \frac{D}{2\lambda_1}\ln\frac{D_1}{D}.$$

β) Die gleichmäſsige, höhere Temperatur t_1 herrsche aufserhalb des Rohres, t_2 innerhalb desselben.

Die Wärme abgebende Fläche ist: $F = \pi d l$.

Es ist:
$$W = C F \tau,$$
wobei
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{D} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{d}{2\lambda}\ln\frac{D}{d}.$$

Für $\frac{\delta}{d} \leqq 0{,}05$ genügt auch hier $\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}$.

Beispiel: Ein wagerechtes guſseisernes Dampfheizrohr habe im lichten $d = 0{,}1$ m, eine Wandstärke $\delta = 7{,}5$ mm, eine Länge $l = 20$ m und werde mit Dampf von $t_1 = 130^0$ C gespeist. Die Temperatur des Werkstättenraumes sei $t_2 = 20^0$ C.

Nach S. 297 ist $\alpha_1 = 5000$; $\lambda = 60$. α_2 erhält man nach Formel S. 298, wenn $s = 3{,}36$, $b = 6$, $t_1 = 130$, $t_2 = 20$ gesetzt wird:
$$\alpha_2 = 125 \,.\, 3{,}36\,\frac{1{,}0077^{130} - 1{,}0077^{20}}{110} + 0{,}55 \,.\, 6 \,.\, 110^{0{,}233} = 15{,}75.$$

Es wird:
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{5000}\frac{115}{100} + \frac{1}{15{,}75} + \frac{115}{120}\ln\frac{115}{100} = 0{,}1978;\ \text{also } C = 5{,}06.$$
$$F = \pi \,.\, 0{,}115 \,.\, 20 = 7{,}23 \text{ qm};$$
also die i. d. Std. überführte Wärmemenge
$$W = 5{,}06 \,.\, 7{,}23 \,.\, 110 = 4024 \text{ WE}.$$
(Ueber den Druckverlust in der Dampfleitung vergl. S. 273.)

8. Wärmedurchgang durch Schornsteinwände.

Sind D und d in m die Seitenlängen des mittleren quadratischen Querschnitts eines Schornsteins, und wird die innere Temperatur t_1 auf die Schornsteinhöhe h (in m) als konstant betrachtet, so ist die Wärme abgebende Fläche $F = 4Dh$, welche in die Formel unter 7. α) oben einzuführen ist. Der Wert C ist derselbe wie dort. Nach Grashof ist $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 9$ und $\lambda = 0{,}8$. Für runde Schornsteine dienen dieselben Gleichungen, wenn man setzt $F = \pi D h$ und $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 10$, $\lambda = 0{,}8$.

G. Mechanische Wärmetheorie.

(Allgemeine Theorie.)

1. Die mechanische Wärmetheorie stützt sich auf folgenden empirischen Satz:

Wärme und Arbeit sind äquivalent;

d. h. in allen Fällen, wo durch Wärme Arbeit entsteht, verschwindet eine der erzeugten Arbeit proportionale Wärmemenge oder wird verbraucht, und umgekehrt, durch Verrichtung einer eben so grofsen Arbeit kann dieselbe Wärmemenge wieder erzeugt werden.

Diejenige mechanische Arbeit, welche durch den Verbrauch einer Wärmeeinheit entsteht, wird das „Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit“, auch „mechanisches Wärmeäquivalent“ genannt und soll hier mit $1 : A$ bezeichnet werden; umgekehrt heifst A das „Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit“. Es ist

$$1 : A = 428 \text{ mkg f. 1 WE.}$$

2. Es bezeichne:

v das specifische Volumen eines Körpers in cbm f. d. kg,

p den specifischen Druck, d. h. den vom umgebenden Medium senkrecht auf die Oberfläche des Körpers ausgeübten Druck in kg f. d. qm,

c die specifische Wärme des Körpers bei konstantem Volumen (s. S. 286),

c_1 die specifische Wärme bei konstantem Drucke,

n das Verhältnis $\frac{c_1}{c}$,

t die Temperatur in Graden C,

$T = a + t = 273 + t$ die absolute Temperatur,

U die in 1 kg des Körpers enthaltene, innere Arbeit in mkg,

AU die entsprechende innere Wärme (Wärmeeinheiten f. d. kg),

$$X = \frac{\partial U}{\partial p}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial v} + p,$$

Q die Wärmemenge, welche bei einer Zustandsänderung einem kg des Körpers zugeführt wird (Wärmeeinheiten f. d. kg),

$L = \int p\,dv$ die bei einer Zustandsänderung verrichtete, äufsere Arbeit (mkg f. d. kg).

Soll v um dv und p um dp wachsen, so ist die zuzuführende Wärmemenge gleich der Zunahme der inneren Wärme vermehrt um die Wärmemenge, welche der zu verrichtenden, äufseren Arbeit entspricht:

$$dQ = A\,(dU + p\,dv).$$

Die drei **Hauptgleichungen** der mechanischen Wärmetheorie sind:

1) . . . . $$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1;$$

2) . . . . $$T = Y\frac{\partial T}{\partial p} - X\frac{\partial T}{\partial v};$$

3) $$\begin{cases} dQ = A\,(X\,dp + Y\,dv), \\ dQ = \dfrac{A}{\dfrac{\partial T}{\partial p}}\left[X\,dT + T\,dv\right] = \dfrac{A}{\dfrac{\partial T}{\partial v}}\left[Y\,dT - T\,dp\right]. \end{cases}$$

Durch Einführung der specifischen Wärmen erhält man:

$$X = \frac{c}{A}\frac{\partial T}{\partial p} \quad \text{und} \quad Y = \frac{c_1}{A}\frac{\partial T}{\partial v},$$

und hieraus folgende Formen der drei Hauptgleichungen:

$$1\text{a)} \quad \dots\dots \quad A = \frac{\partial\left[c_1 \frac{\partial T}{\partial v}\right]}{\partial p} - \frac{\partial\left[c \frac{\partial T}{\partial p}\right]}{\partial v};$$

$$2\text{a)} \quad \dots\dots \quad AT = (c_1 - c)\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v};$$

$$3\text{a)}\begin{cases} \dots\dots \quad dQ = \frac{\partial T}{\partial p}dp + c_1 \frac{\partial T}{\partial v}dv, \\ \dots \quad dQ = c\,dT + \frac{AT}{\frac{\partial T}{\partial p}}dv = c_1\,dT - \frac{AT}{\frac{\partial T}{\partial v}}dp. \end{cases}$$

Die **Anwendung dieser Gleichungen auf Gase und Dämpfe** bildet den Gegenstand der „Mechanik der Gase und Dämpfe"; s. Zweiter Abschnitt, VII. S. 250.

3. Jede Zustandsänderung eines Körpers (Erklärung s. S. 261) wird durch eine Gleichung zwischen Druck und Volumen des Körpers dargestellt, welche in rechtwinkligen Koordinaten die **Kurve der Zustandsänderung** ergiebt.

Eine Zustandsänderung heifst **umkehrbar**, d. h. sie kann auch in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, wenn bei der gegenseitigen Umsetzung von Formänderungsarbeit und Wärme in einander die augenblicklichen Drücke und Temperaturen in allen Punkten des Körpers gleich grofs angenommen werden dürfen, wenn also der äufsere Druck stets nur unendlich wenig verschieden vom Körperdrucke ist.

Nicht umkehrbare Zustandsänderungen sind z. B. die Umsetzung der Arbeit sekundärer Bewegungs-Widerstände in Wärme, sowie ein unmittelbarer Uebergang der Wärme aus einem Körper von höherer Temperatur in einen Körper von niederer Temperatur durch Leitung oder Strahlung.

Eine Zustandsänderung, bei welcher der Körper wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt, heifst ein **vollständiger Kreisprocefs** (geschlossene Kurve der Zustandsänderung). Ist die Zustandsänderung dabei eine umkehrbare, so findet ein vollständiger, umkehrbarer Kreisprocefs statt.

Die bei einer beliebigen Zustandsänderung von 1 kg des Körpers geleistete **mechanische Arbeit** $L = \int p\,dv$ wird durch eine Fläche F dargestellt welche von der durch p und v in rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Kurve der Zustandsänderung begrenzt ist.

Für den vollständigen, umkehrbaren Kreisprocefs ist:

$$F = \int \frac{dQ}{A}; \qquad \int \frac{dQ}{AT} = 0.$$

VIERTER ABSCHNITT.

FESTIGKEITSLEHRE.

I. ALLGEMEINE GESETZE UND VERSUCHSWERTE.

1. Die **Formänderung** eines durch äufsere Kräfte in Anspruch genommenen Körpers zerfällt in α) eine mit der Belastung verschwindende (elastische) und β) eine bleibende. Die erstere ist für gewisse Körper (Schweifseisen, Stahl u. s. w.) innerhalb einer gewissen Grenze (der **Proportionalitätsgrenze**) proportional der Belastung, die letztere ist innerhalb der **Elasticitätsgrenze** verschwindend klein gegen die erstere.

2.*) Die **mechanische Arbeit**, die zum langsamen Abreifsen, bezw. Zerbrechen eines Stabes nötig ist, beträgt nach Versuchen:

$$P_1\,(\tfrac{1}{2}\varDelta_1 + \varphi\varDelta_2),$$

worin P_1 die Kraft bedeutet, welche den Stab bei ruhiger Einwirkung zerreifsen bezw. zerbrechen würde, $\varDelta_1$ die elastische, $\varDelta_2$ die bleibende Verlängerung bezw. Durchbiegung im Augenblicke des Bruches und φ einen Koefficienten, der zwischen $\tfrac{2}{3}$ und 1 liegt. Die Formel giebt auch die Arbeit an, die nötig ist, um einen Stab um $\varDelta_1 + \varDelta_2$ zu verlängern bezw. durchzubiegen.

3. Bei Metallen wird durch Hämmern, Walzen, Drahtziehen (bei Stahl auch durch Härten, bei Eisen durch einen geringen Phosphor- oder Kohlenstoffgehalt) die Elasticitätsgrenze und in geringerem Mafse auch die Festigkeitsgrenze erweitert, die Dehnbarkeit (bleibende Formänderung) aber vermindert. Ausglühen bewirkt das Gegenteil.

*) Vergl. Zeitschrift d. V. d. Ing., Bd. XII, Heft 6, S. 375 und Grashof, Festigkeitslehre, S. 24.

4. Die einer bestimmten Belastung entsprechende **bleibende Formänderung** bedarf zu ihrer Vollendung einer gewissen Zeit, die bei verschiedenen Materialien verschieden ist.

5. Spannung, Dehnung und Schiebung.

Im Inneren eines von äufseren Kräften beanspruchten Körpers erleidet ein kleines Parallelopipedon eine Formänderung, die im wesentlichen aus Aenderungen der Längen der Kanten und Verschiebungen der Seitenflächen gegen einander besteht.

Zerlegt man die auf ein Querschnittselement wirkende innere Kraft in eine solche senkrecht zum Querschnitt und eine zweite in den Querschnitt fallende, so heifst die erstere bezogen auf die Flächeneinheit **Normalspannung** σ, die zweite bezogen auf die Flächeneinheit **Schubspannung** τ. Die Normalspannung σ bewirkt eine Verlängerung (bezw. Verkürzung) in ihrer Richtung, deren Betrag bezogen auf die Längeneinheit, die

$$\textbf{Dehnung}\ \varepsilon = \sigma\alpha = \frac{\sigma}{E}\ \text{ist,}$$

worin α den Dehnungskoefficienten, $E = \frac{1}{\alpha}$ den **Elasticitätsmodul** bedeutet. Gleichzeitig findet in jeder zu ε senkrechten Riehtung eine **Querzusammenziehung** statt, wenn ε eine Verlängerung ist, dagegen eine Querausbauchung, wenn ε eine Verkürzung ist von dem verhältnismäfsigen Betrage $\frac{\varepsilon}{m}$. m ist eine vom Material abhängige Konstante, die für isotrope Körper im allgemeinen zwischen 3 und 4 liegt, für Metalle ~ 4, besser $\frac{10}{3}$ gesetzt wird.

Die **Schubspannungen** τ, welche eine Verschiebung zweier, ursprünglich rechtwinklig stehenden Seitenflächen um einen Winkel γ bewirken, sind einander gleich und es beträgt die

$$\textbf{Schiebung}\ \gamma = \beta\tau = \frac{\tau}{G},$$

worin β den Schubkoefficienten, $G = \frac{1}{\beta}$ den **Schubelasticitäts- oder Gleitmodul** bedeutet.

Es stehen E und G in folgender Beziehung:

$$G = \frac{mE}{2(m+1)};$$

hiernach liegt G im allgemeinen zwischen $\frac{3}{8}E$ und $\frac{2}{5}E$.

Es bezeichnen in folgendem:

x, y, z die Koordinaten eines Punktes im Inneren eines Körpers.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die Spannungen nach den Richtungen der Koordinatenachsen,

ξ, η, ζ die mit der Formänderung verbundenen Aenderungen der Koordinaten,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ die Dehnungen nach den Koordinatenachsen,

τ_x, τ_y, τ_z die Schubspannungen, welche die Ebenen XY gegen XZ, YZ gegen YX und ZX gegen ZY zu verdrehen streben,

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ die Aenderungen der rechten Winkel, welche diese Ebenen mit einander bilden, durch die Formänderung.

Es finden dann folgende Beziehungen statt:

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\Delta v}{m-2}\right); \qquad \tau_x = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right);$$

$$\sigma_y = 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\Delta v}{m-2}\right); \qquad \tau_y = G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right);$$

$$\sigma_z = 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\Delta v}{m-2}\right); \qquad \tau_z = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right),$$

worin $\Delta v = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ = Volumenausdehnungs-Koefficient.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + X = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + Z = 0,$$

worin X, Y, Z die Komponenten etwaiger äufseren Kräfte, z. B. der Schwerkraft, nach den Richtungen der Achsen sind.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

$$\gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \qquad \gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}; \qquad \gamma_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Die **Spannung** p, welche auf ein Flächenelement ausgeübt wird, dessen Normale mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, und die Winkel von p mit den Achsen, λ, μ, ν, folgen aus:

$$p \cos \lambda = \sigma_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma;$$
$$p \cos \mu = \tau_z \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_x \cos \gamma;$$
$$p \cos \nu = \tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma.$$

Die Summe der Quadrate der Spannungen ausgeübt auf drei Flächenelemente, welche in einem Punkte sich rechtwinklig schneiden, ist für diesen Punkt konstant.

In jedem Punkte des Körpers giebt es drei aufeinander senkrechte Ebenen, für welche die Schubspannungen gleich Null sind. Die Spannungen dieser Ebenen heifsen **Hauptspannungen**, und unter ihnen befindet sich die gröfste positive und kleinste negative Normalspannung für irgend eine durch diesen Punkt gelegte Ebene. Die Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 ergeben sich als Wurzeln der Gleichung dritten Grades:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_x - \sigma)\tau_x^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_y^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_z^2 + 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0.$$

Ebenso die **Hauptdehnungen** ε_1, ε_2 und ε_3 aus:

$$4(\varepsilon_x - \varepsilon)(\varepsilon_y - \varepsilon)(\varepsilon_z - \varepsilon) - (\varepsilon_x - \varepsilon)\gamma_x^2 - (\varepsilon_y - \varepsilon)\gamma_y^2 - (\varepsilon_z - \varepsilon)\gamma_z^2 + \gamma_x\gamma_y\gamma_z = 0.$$

Zwischen den Hauptspannungen und Hauptdehnungen bestehen für durchaus gleichartige (isotrope) Körper folgende Beziehungen:

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}; \quad E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}; \quad E\varepsilon_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}.$$

Für $\tau_x = 0$ und $\sigma_y = \sigma_z$ sind die drei Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \sigma_y;$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2};$$

das obere Zeichen der Wurzel entspricht σ_2, das untere σ_3.

Unter derselben Voraussetzung erhält man die Hauptdehnungen aus:

$$E\varepsilon_1 = -\frac{1}{m}\sigma_x + \frac{m-1}{m}\sigma_y;$$

$$\left.\begin{matrix}E\varepsilon_2\\ E\varepsilon_3\end{matrix}\right\} = \frac{m-1}{2m}\sigma_x + \frac{m-3}{2m}\sigma_y \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)}.$$

Ist im besonderen $\sigma_y = \sigma_z = 0$, so wird:

$$\sigma_1 = 0; \qquad \left.\begin{matrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)}}{2}.$$

Wenn zwei der Schubspannungen gleich Null sind, z. B.

$$\tau_y = \tau_z = 0,$$

so folgt:

$$\sigma_1 = \sigma_x; \qquad \left.\begin{matrix}\sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_y + \sigma_z \pm \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_x^2}}{2};$$

$$E\varepsilon_1 = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m};$$

$$\left.\begin{matrix}E\varepsilon_2\\ E\varepsilon_3\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{m}\sigma_x + \frac{m-1}{2m}(\sigma_y + \sigma_z) \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_x^2}.$$

Bemerkung. In den Kapiteln I bis VII ist für m überall der ältere Wert 4 angenommen. Nach Bach (Maschinenelemente, 1891, S. 1) ist gemäfs dem heutigen Stande der Versuchsergebnisse $m = \frac{10}{3}$ zu wählen (wie in Kapitel VIII, S. 362 u. f. bereits durchgeführt); die betr. Gleichungen würden entsprechend abzuändern sein.

Die Werte von C für die in nachstehender Tafel enthaltenen Eisensorten entsprechen dem Bachschen Werte von m.

6. Elasticitäts- und Festigkeits-Koefficienten.

(Ausführlichere Angaben, namentlich mit Rücksicht auf den verschiedenen Verwendungszweck, vergl. Abteil. II, Abschnitt Materialienkunde.)

kg f. d. qcm.

Baustoff.	Elasticitätsmodul für Zug und Druck.	Schubelasticitätsmodul.	Ruhende Bruchbelastung				Proportionalitätsgrenze.			
			Zug.	Druck.	Biegung.	Schub	Zug.	Druck.	Biegung.	Sch[u]b
	E	G	K_z	K	K_b	T_s	k'	k''	k'''	t'
			(33-4000)			(32-3500)	(13-1700)			
Schweifs-Stabeisen	2 000 000	770 000	3 800	3 800	5 000	3 500	1 600	1 600	—	—
„ -Eisenblech ‖	2 000 000	770 000	*) 3 300	—	—	2 400	—	—	—	—
„ -Eisenblech ⊥	—	—	**) 3 000	—	—	—	—	—	—	—
Bessemer-, Thomas- u. bas. Martinstabeisen, weich	2 150 000	830 000	37—4400	—	—	—	2000—2 400	2000—2 400	—	—
desgl. Blech	2 150 000	830 000	***) 3900 i. M.	—	—	—	—	—	—	—
Bessemer-, Thomas- und Martinstahl, ungehärtet	2 200 000	850 000	55—9000	—	8 000	4 000	3 000	3 000	3 000	1 450
Tiegelflufsstahl, ungehärtet	2 200 000	850 000	75—9000	—	—	—	—	—	—	1 450
Tiegelflufsstahl, gehärt. u. angel.	bis 2 500 000	940 000	> 8 000	—	—	—	6500—15 000	—	—	—
Stahlgufs (Martinformstahl)	2 150 000	830 000	35—7000	—	—	—	>2000	—	—	—
Gufseisen	nimmt ab mit Zunahme der Dehnung, i. Mittel 1 000 000	400 000	1 250	7 500	Bem. a. S. 309.	1 500	Proportionalität nicht vorhanden (S. Zeitschr. d. V. d Ing 1887, S. 222; 1888, S. 194.)			
Kupferblech, gehämmert	1 110 000	440 000	3 000	7 000	—	—	1 400	1 400	—	—
„ geglüht	1 070 000	401 200	2 100	4 100	—	—	—	Durch wiederholte Anstreng. auf das 2- bis 3-fache z. steigern.		
„ gewalzt	1 100 000	—	20—2300	—	—	—	2—400			
Deltametall, hart gewalzt	997 700	—	5 880	9 540	—	4 070	2 200	—	—	1 030
Phosphorbronze	950 000	380 000	4 000	—	—	—	1 300	—	—	—
Geschützbronze	1 100 000	—	30—3200	—	—	—	3—900	—	—	—
Rotgufs	900 000	280 000	2 000	—	—	—	300	—	—	—
Messing, gegossen	640 000	240 000	12—1500	730	—	—				
„ gehämmert	1 000 000	375 000	—	—	—	—				
Zink, gegossen	950 000 (?)	356200(?)	880	—	—	—				
„ gewalzt, bei 16° C	150 000	—	‖ 1 900	1 000	—	—				
Blei, weich (gewalzt oder gegossen)	50 000	18 750	—	150	—	k' = 80				
„ hart	—	—	130 (?)	300	—	—				
Zinn	400 000	150 000	350	—	—	k' = 130				
Aluminium	675 000	253 100	†) 2 030	—	—	—				
Glas	700 000	—	250	—	—	—				
Eschenholz ††) ‖	98 500	—	1 200	660	—	—				
Eschenholz ††) ⊥	—	—	—	350	—	—				
Eichenholz ‖	117 000	8 000	1 100	660	—	79				
Eichenholz ⊥										
Buchenholz										
Kiefernholz										

Baustoff.	Bruchbelast für Zug K_z.
Gegl. Stahlgufs von Krupp:	
als Martinstahlgufs	40 - 4800
„ Tiegelstahlgufs	45 - 7000

Nickelstahl (5 % Ni): $K_z = 8500$; $k' = 4—5000$.

Nickelstahl (25 % Ni): $K_z = 7—8000$; $k' = 35—6000$.

Zu[…]
s. Ab[…]

*) Für Drähte vergl. indes S. 314.

**) Fowler in Leeds erzeugt für landwirtschaftliche Maschinen Stahldraht von $K_z = 25300$; s. Centralbl. d. Bauverw. 1886 S. 371.

*) Eisenbahnfedern vergl. S. 372. **) S. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1888. S. 1024.
***) Daselbst 1889. Nr. 8.

7. Bruchbelastungen der Steine und Bindemittel.

α) für Druck. (kg f. d. qcm.)

Baustoff.	Druck K.	Baustoff.	Druck K.
Granit, Diorit, Syenit, Porphyr u. a.	600—2000	Getemp. Hochofenschlacke	1000—2500
Basalt	1000—3000	Klinker- Ziegelsteine	300—500
Trachyt	500—1000	Mittelbrand- Ziegelsteine	200—300
Basaltlava	500	Schwachbrand- Ziegelsteine	150—200
Grauwacke	500—1500	Poröse Vollsteine	150
Kohlensandstein	500—1800	Cement ohne Sandzusatz	250
Keupersandstein	700—1800	1 R.-T. Cement + 1 R.-T. Sand	200 (nach 28 Tagen, davon 27 unter Wasser)
Bruch- u. Quadersandstein	300—1000	1 " " + 2 " "	180 (nach 28 Tagen, davon 27 unter Wasser)
Kalkstein	500—1500	1 " " + 3 " "	160 (nach 28 Tagen, davon 27 unter Wasser)
Cement-Beton	60—190	Guter Kalkmörtel	40

Bruchbelastung (nach Bauschinger) für

	β) Zug.	γ) Biegung.	δ) Schub.	
Steine	$K_z = \frac{1}{16} K$.	$K_b = \frac{1}{8} K$.	$T_s = \frac{1}{18} K$.	*) K_z min = 16 kg f. d. qcm.
Cementmörtel	$K_z = \frac{1}{10} - \frac{1}{6} K$*)	$K_b = \frac{1}{4} K$.	$T_s = \frac{1}{6} K$.	
Kalkmörtel	$K_z = \frac{1}{8} K$.	—	—	

8. Elasticitäts- und Festigkeits-Koefficienten der Materialien für Zugorgane. *)

(Nach Bach, Reuleaux, Felten & Guilleaume u. A.)

kg f. d. qcm.

Zugorgan.	Elasticitäts-modul für Zug E	Ruhende Bruchbelast. für Zug. K_z	Proportionalitätsgrenze für Zug. k'	Bemerkungen.
Eisendraht, blank	1 050 000 (?)	5600(bis7000)	4 200	Genauere Werte von K_z für Drahtseile s. S. 444 u. f. Telegraph-Eisendraht K_z = 4000—4300. Für gegl Eisendraht ist G = 750 000 und (für Baukonstrukt.) k_z = 1200.
" geglüht	(2 000 000)	4 000	2 000	
Bessemerstahldraht, blank	1 300 000 (?)	6 500	5 200	
" geglüht	(2 150 000)	4 500	2 250	
Tiegelflufsstahldraht, blank	1 700 000 (?)	**) 12 000 (9000 - 18000)	10 000	
Zinkdraht	150 000	1 900	—	
Kupferdraht	1 300 000	4 000	1 200	
Bronzedraht	f. Telegraph.-	4600—7100	je nach Stützweite u. Leitungsfähigkeit.	
Siliciumbronzedraht	u. Telephondr.	6500—8500	je nach Stützweite u. Leitungsfähigkeit.	
Höpermetalldraht (verbess. Phosphorbronze)	—	8000—9000	—	
Deltametalldraht	—	bis 9 840	—	
Messingdraht	1 000 000	5 000	1 300	
Aluminiumdraht	—	2300—2700	Zuläss. Zugspannung k_z.	bei 460° K_z = 160.
Bleidraht	70 000	220		G = 26 250.
Lederriemen, neue	1 250	—	(10-)22,5-27,5	für Treibriemen.
" gebraucht	1 500—2 250	290 (k'=160)	35—40	für Aufzüge.
Manillahanfseil	8 000—9 500	1 700 neu	7,6—12,7	
Schleifshanfseil	10500—12500	500 alt	7,6—12,7	
Hanfgurt (für Aufzüge)	—	—	60—70	
Baumwollseil	—	—	7,6—12,7	

9. Zulässige Spannungen für Maschinenkonstruktionen (nach Bach). kg f. d. qcm.

Baustoff.	Zug k_z.			Druck k.		Biegung k_b.			Schub k_s.			Drehung k_d.		
	a	*b*	*c*	*a*	*b*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Schweifseisen¹) ‖ . .	900	600	300	900	600	900	600	300	720	480	240	360	240	120
Flufseisen²) . von	900	600	300	900	600	900	600	300	720	480	240	600	400	200
bis	1200	800	400	1200	800	1200	800	400	960	640	320	840	560	280
Flufsstahl²) . von	1200	800	400	1200	800	1200	800	400	960	640	320	900	600	300
bis	1500	1000	500	1500	1000	1500	1000	500	1200	800	400	1200	800	400
Stahlgufs . . von	600	400	200	900	600	750	500	250	480	320	160	480	320	160
(Martinformstahl) bis	900	600	300	1200	900	1050	700	350	840	560	280	840	560	280
Federstahl, ungehärt.	—	—	—	—	—	—	3600	—	—	—	—	—	—	—
„ gehärtet	—	—	—	—	—	—	4300*)	—	—	—	—	—	—	—
Gufseisen	300	200	100	900	600	—³)	—³)	—³)	300	200	100	—³)	—³)	—³)
Kupferblech, gewalzt.	600	400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Phosphorbronze . .	750	500	250	—	—	750	500	250	—	—	—	300	200	100
Geschützbronze . . .	300	200	100	—	—	300	200	100	—	—	—	—	—	—

Bemerkungen.

Die zulässigen Spannungen unter *a* gelten, wenn die Belastung eine **ruhende** ist.

Die zulässigen Spannungen unter *b* gelten, wenn die Belastung eine **beliebig oft wechselnde** ist, derart, dafs die durch sie hervorgerufenen Spannungen **abwechselnd von Null bis zu einem gröfsten Werte stetig wachsen und dann wieder auf Null zurücksinken** u. s. w. (z. B. wiederholte Dehnung, wiederholte Biegung, wiederholte Drehung nach **einer** Richtung hin).

Die zulässigen Spannungen unter *c* gelten, wenn die Belastung eine **beliebig oft wechselnde** ist, derart, dafs die durch sie hervorgerufenen Spannungen **abwechselnd von einem gröfsten negativen Wert stetig wachsen bis zu einem gröfsten positiven**, in absoluter Beziehung gleich grofsen Wert, denn wieder abnehmen u. s. w. (z. B. wiederholte Biegung und wiederholte Drehung nach **entgegengesetzten** Richtungen hin u. s. w.).

Für die **zwischenliegenden Beanspruchungen** können dazwischen gelegene, den Spannungsgrenzen entsprechende Werte genommen werden.

Wenn Konstruktionsteile gegen lebendige Kräfte widerstandsfähig zu machen sind, so ist besondere Rechnung anzustellen, unter Umständen der eigentümlichen Beanspruchung (Stöfse) durch Verminderung der zulässigen Spannung schätzungsweise Rechnung zu tragen.

---

¹) Für **vorzügliches Schweifseisen** können die angegebenen zulässigen Belastungen um Beträge bis zu einem Drittel höher genommen werden, sofern die hierdurch zugelassenen gröfseren Formänderungen in ihrer Gesamtheit mit dem besonderen Zweck des gerade in Frage stehenden Körpers vereinbar sind. Wo zu befürchten steht, dafs die Gesamtformänderung die mit Rücksicht auf den eigenartigen Zweck des Körpers als höchstens zulässig erachtete Grenze überschreitet, ist von dieser auszugehen.

²) Die höheren Werte sind nur bei durchaus zuverlässigem und nicht zu weichem Material anzuwenden ($K_z = 3400 - 4400$ bezw. $= 4500 - 10000$.) Für Draht gelten höhere Werte.

³) Für **bearbeitetes Gufseisen** (vergl. S. 316) ist nach Bach zu setzen:

$$k_b = \alpha \sqrt{\frac{e}{z_0}}\, k_z, \text{ worin } \alpha = 1{,}20 \text{ bis } 1{,}38 \text{ und}$$

e den Abstand der am stärksten gespannten Faser von der neutralen Achse,
z_0 den Abstand des Schwerpunktes der auf der einen Seite der neutralen Achse gelegenen Querschnittsfläche von der letzteren bezeichnet.

Die Versuche**) ergeben für rechteckigen Querschnitt: $k_b = 1{,}73\, k_z$, für kreisförmigen Querschnitt: $k_b = 2{,}05\, k_z$, für I-förmigen Querschnitt: $k_b = 1{,}45\, k_z$.

Für **Rohgufs** weisen die Versuche***) eine Verminderung von k_b bis zu einem Sechstel nach.

Für **vorzügliches Gufseisen** in Formen, welche Gewähr dafür bieten, dafs die Gufsspannungen gering sind und dafs die Dichtheit eine vollkommene ist, können die für die zulässige Spannung gegebenen Werte um Beträge bis zu einem Viertel höher genommen werden.

Ueber das Verhältnis $k_d : k_z$ s. S. 351 u. 352.

---

*) Eisenbahnfedern vergl. S. 372. **) S. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1888. S. 1094.
***) Daselbst 1889. Nr. 8.

10. Zulässige Spannungen für Baukonstruktionen.
kg f. d. qcm.

α. Vorschriften der Berliner Bau-Polizei vom 21. Febr. 1887 und der Bauabteilung des Ministeriums d. öffentl. Arbeiten vom 16. Mai 1890.

Baustoff.	Zug k_z.	Druck k.	Schub k_s.
Schmiedeisen	750	750	600
Bombiertes Eisenwellblech	[— 1000] 500	[- 1000] 500	[— 750] —
Eisendraht	1200	—	—
Gufseisen	250	500	(200)
Eichen- u. Buchenholz*)	100	80	(20)
Kiefern- und Tannenholz**)	100	60	(10)
Granit	—	45	—
Sandstein, je nach Härte	k = 15—30 (i. M. 20)		

Baustoff.	Druck k.
Rüdersdorfer Kalkstein	25
Kalksteinmauerwerk in Kalkmörtel	5
Ziegelmauerwerk, gewöhnliches	7
Ziegelmauerwerk in Cementmörtel	11 [12]
Bestes Klinkermauerw.	12-14 [12] (12—15)
Mauerwerk aus porösen Steinen	3—6
Guter Baugrund (aus festgelag. Sand und Kies)	2,5 [—5]

β. Zulässige Spannungen des Eisens.

Nach Vorschrift der Königl. Kanal-Kommission in Münster.

Eisensorte. ***)	Ruhende Last.			Stofsweise wirk. Last		
	Zug k_z.	Druck k.	Schub k_s.	Zug k_z.	Druck k.	Schub k_s.
Schweifseisen	800	800	650	650	650	550
Martinflufseisen	900	900	700	750	750	600
Martinflufsstahl	1200	1200	950	1000	1000	800
Tiegelflufsstahl	1500	1500	1200	1250	1250	1000
Gufseisen	250	500	200	200	400	150

γ. Andere Baustoffe.

Baustoff.	Druck k.
Basaltlava	(40)
Beton, gewöhnlich	(10)
„ beste Ausführung	(k_z = 1)
Glas	25
Marmor	24
Steine aus Cement, Schlacken u. Sand	12
Pfähle, je nach Bodenart	(20 – 40)
Zinkbl $k_b = k_z = k =$	200

Die [eckig] eingeklammerten Werte sind von der Bauabteilung des Ministeriums der öffentlichen Arbeiten (Runderlafs vom 16. Mai 1890) vorgeschrieben. Im übrigen gelten hier gleichfalls die Werte der Berliner Bau-Polizei. Die höheren Werte für Eisen gelten nur für solche Bauteile, welche Erschütterungen oder starken Belastungswechseln nicht ausgesetzt sind bei vorher bewirkter Materialprüfung.

Baugrund kann mit zunehmender Tiefe der Bausohle stärker beansprucht werden.

Die (rund) eingeklammerten Werte sind den von der Königl. Kanal-Kommission in Münster aufgestellten Normen entnommen.

Zulässige Spannungen des Schweifseisens für wiederholte Zug- und Druckbeanspruchungen s. S. 312.

*) Für vorübergehende Bauten (120), (90), (20).

**) Desgl. (120), (70), (15).

***) Dabei ist vorausgesetzt K_z = 3600, 4200, 5000, 6000, 1200.

II. ZUG- UND DRUCKFESTIGKEIT.

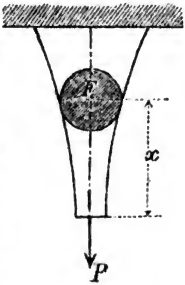
a. Allgemeine Formeln.

1. Die **Belastung** P in kg, welche ein auf Zug- oder Druckfestigkeit beanspruchter, prismatischer Körper vom Querschnitte F qcm zu tragen vermag, ist:

$$P = F k_z \text{ bezw. } P = F k,$$

wenn k_z die zulässige Zugspannung, k die zulässige Druckspannung in kg f. d. qcm bedeutet.

Abbild. 189.



Die **elastische Ausdehnung** bezw. Verkürzung des Stabes von der Länge l cm beträgt:

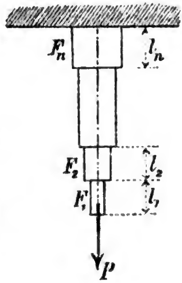
$$\varepsilon = \frac{k_z}{E} l \text{ (bezw. } \frac{k}{E} l) = \frac{Pl}{FE},$$

wenn E den Elasticitätsmodul für Zug bezw. Druck bezeichnet. (Vergl. S. 304 u. 307.)

2. Die Form eines Stabes von **gleicher Widerstandsfähigkeit** (Abbild. 189) gegen Zug und Druck ist, wenn seine Schwerachse in die Richtung der angreifenden Kraft fällt, durch die Gleichung bestimmt:

$$F = \frac{P}{k} e^{\frac{\gamma}{k} x}, \text{ oder } \log F = \log \frac{P}{k} + 0{,}4343 \frac{\gamma}{k} x.$$

Abbild. 190.



3. Für die aus prismatischen Stäben von verschiedenen Querschnitten zusammengesetzte **Annäherungsform** (Abbild. 190) gilt die Gleichung:

$$F_n = \frac{P k^{n-1}}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2) \ldots\ldots (k - \gamma l_n)}.$$

In 2. und 3. ist:

- F ein beliebiger Querschnitt des Stabes im Abstande x cm vom belasteten Ende, in qcm,
- P die Belastung in kg,
- k die zulässige Zug- oder Druckspannung in kg f. d. qcm,
- γ das Gewicht des Materials in kg f. d. ccm,
- e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen = 2,71828,
- l_n die Länge des n^{ten} prismatischen Stabes, vom belasteten Ende an gerechnet, in cm,
- F_n der Querschnitt dieses Stabes in qcm.

b. Querschnittsberechnung gröfserer Eisen-Konstruktionen.

Erfolgt zweckmäfsig, namentlich bei **eisernen Brücken**, auf grund der nachstehenden, von Bauschinger aufgestellten Gesetze:

1. Wenn bei wiederholten Beanspruchungen auf Zug, deren untere Grenze Null ist, die obere Grenze in der Nähe der ursprünglichen Elasticitätsgrenze (vergl. S. 303) liegt, so wird auch durch 5- bis 16-millionenmalige Wiederholung dieser Anstrengungen der Bruch nicht erreicht; woraus Bauschinger folgert:

„Wenn beide Grenzen der wechselnden Beanspruchungen unterhalb der Elasticitätsgrenze liegen und liegen bleiben, so kann auch durch noch so lang fortgesetzte Wiederholung der Anstrengungen der Bruch nicht erfolgen.“

2. Durch Belasten auf Zug und Druck über die Elasticitätsgrenze hinaus wird die Elasticitätsgrenze für Druck und Zug bedeutend erniedrigt, und zwar um so mehr, je höher jene Belastungen über der betreffenden Elasticitätsgrenze liegen; schon geringe Ueberschreitungen der Elasticitätsgrenze für eine Belastungsart werfen die Elasticitätsgrenze für die Belastung im entgegengesetzten Sinne bis auf Null hinab.

Wenn die Elasticitätsgrenze für Zug oder Druck durch vorangegangene Belastung auf Druck oder Zug, die über der ursprünglichen Elasticitätsgrenze lag, erniedrigt ist, so kann sie durch allmählich anwachsende, zwischen Zug und Druck wechselnde Belastungen wieder gehoben werden, aber nur bis zu einer Grenze, welche beträchtlich unter der ursprünglichen Elasticitätsgrenze liegt.

3. Die Grenzen der Schwingungen zwischen gleich grofsen Zug- und Druckspannungen dürfen die natürliche Elasticitätsgrenze (für Schweifseisen = 1050 kg f. d. qcm) nicht überschreiten, wenn der Stoff eine unbegrenzte Zahl solcher Schwingungen soll ertragen können. (Letzteren Satz giebt Bauschinger unter Vorbehalt.)

Bezeichnet für ein beliebiges Glied eines Trägers:

S_0 die durch das Eigengewicht allein hervorgerufene Spannkraft in kg,

S_1 die durch die ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Spannkraft, welche auf derselben Seite von Null liegt, wie S_0,

S_2 die durch die ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Spannkraft, welche auf der entgegengesetzten Seite von Null liegt, wie S_0. (Wenn also S_0 und S_1 den Stab auf Zug beanspruchen, so ist S_2 ein Druck und umgekehrt.)

k' die Spannung des Materials an der Elasticitätsgrenze in kg f. d. qcm, für Schweifseisen = 1600, für Flufseisen 2400 kg f. d. qcm (vergl. S. 307);

k die zulässige Beanspruchung bei ruhender Verkehrslast, in kg f. d. qcm;

ζ den Stoſskoefficienten der Verkehrslast;*)

μ einen Koefficienten, welcher Neben- und Zuschlagspannungen berücksichtigt;

F den Querschnitt in qcm,

S_{min}, S_{max} die absolut kleinste, bezw. gröſste Stabkraft auf grund des Eigengewichtes und der mit dem entsprechenden Stoſskoefficienten multiplizierten Verkehrslast, in kg,

so kann die **Querschnittsbestimmung** nach folgenden Formeln geschehen:

1. Formeln von Landsberg.**)

1. Für **nur gezogene oder nur gedrückte** Stäbe:

$$F = \frac{S_0}{1050} + \frac{S_1}{700}.$$

2. Für **gezogene und gedrückte** Stäbe, falls

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \text{ und } S_2 - S_1 < \frac{4}{3} S_0 \text{ ist:}$$

$$F = \frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{700} + \frac{S_2}{2100}.$$

3. Für **gezogene und gedrückte** Stäbe, falls

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \text{ und } S_2 - S_1 > \frac{4}{3} S_0 \text{ ist:}$$

$$F = -\frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{2100} + \frac{S_2}{700}.$$

2. Formeln von Häseler.

1. Ist der Stab **nur auf Zug oder nur auf Druck** (ohne Knickgefahr) beansprucht, so setze man:

$$F = \frac{S_0 + S_1}{k}; \quad k = \frac{k'}{\mu} \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta S_1}.$$

2. Ist der Stab kurz hintereinander **Zug- und Druckspannungen** (ohne Knickgefahr) unterworfen, so empfiehlt sich:

$$F = \frac{S_0 + S_1}{k}; \quad k = \frac{k'}{\mu} \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta S_1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{S_{min}}{S_{max}}\right).\text{***)}$$

*) Gerber empfiehlt $\zeta = 1{,}5$; Winkler $\zeta = 1{,}3$; Häseler nimmt ζ mit der Stützweite veränderlich an und empfiehlt:

für $l =$	5	10	15	20	40	60	80	100	150 m
$\zeta =$	1,7	1,6	1,5	1,3	1,3	1,25	1,2	1,2	1,2.

**) Diese Formeln gelten für Schweiſseisen. Für basisches Martinfluſseisen (mit etwa $K_z = 3700$ bis 4400 kg f. d. qcm) empfiehlt Krohn (s. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, S. 1121) eine Verminderung des erforderlichen Querschnittes auf das 0,8-fache, also statt der Divisoren 700; 1050; 1575; 2100 zu setzen: 875; 1312,5; 1970; 2625.

***) Müller-Breslau schlägt vor, in dieser Formel

$$\text{statt } 1 - \frac{1}{2} \frac{S_{min}}{S_{max}} \text{ zu setzen } 1 - \frac{1}{3} \frac{S_{min}}{S_{max}}.$$

Werte von μ bei schweifseisernen Balkenträgern auf 2 Stützen.

Art der Träger.	Neben-spannung	Zusatz-spannung	Zuschlag für etwaige Mehr-belastung	μ
	in Procenten der Spannkraft S.			
Blechträger	10	30	20	1,6 *)
Gegliederte Träger: . . .				
a) Knotenpunkte starr .	40	30	20	1,9
b) desgl. gelenkartig	15	15	20	1,5

c. Besondere Fälle.

1. Widerstand von Drähten gegen Zerreifsen.

Nach Versuchen von Karmarsch ergiebt sich die Bruchbelastung aus der Formel:

$$P = \alpha d + \beta d^2,$$

worin: P die Belastung in kg,
d den Durchmesser des Drahtes in **mm**,
α und β Konstanten bedeuten.

Hiernach ist die Bruchbelastung K_z (s. S. 308) abhängig von d.

Tafel der Konstanten α und β.

Drahtsorte.	ungeglüht. α	ungeglüht. β	geglüht. α	geglüht. β	Drahtsorte.	ungeglüht. α	ungeglüht. β	geglüht. α	geglüht. β
Stahldraht . .	21	50	3	45	Kupferdraht .	7,5	27,5	0	18,5
Bester Eisendraht	12,5	50	3	26	Platindraht . .	9,5	17,5	7,5	14,5
Gewöhnlicher Eisendraht .	18	36	5	22,5	Zinkdraht . . .	1,75	10	—	—
Messingdraht .	8	43	5,5	22,5	Hartes Blei . .	0	1,75	—	—
					Weiches Blei .	0	1,35	—	—

2. Der Durchmesser d (in cm) einer **Walze** von der Länge l cm, welche einen senkrecht zu ihrer Achse gerichteten Druck G kg zu ertragen vermag, ist nach Winkler, falls mit k die zulässige Druckspannung in kg f. d. qcm bezeichnet wird:

$$d = \frac{25600\, G^2}{l^2 k^3} \text{ für Gufs- oder Schweifseisen,}$$

$$d = \frac{14625\, G^2}{l^2 k^3} \text{ für Stahl.}$$

*) Bei Berechnung der Blechträger (s. Abteil. II, Abschnitt Statik der Baukonstruktionen) treten an Stelle der Spannkräfte S_0, S_1, S_2, S_{min}, S_{max} die Biegungsmomente M und an Stelle von F das Widerstandsmoment W.

III. SCHERFESTIGKEIT.

Wird ein Körper auf Scherfestigkeit beansprucht, so ist:

$$Q = F k_s.$$

Hierin bedeutet:

Q die Quer- oder Schubkraft in der Ebene des Querschnittes und durch dessen Schwerpunkt gehend, in kg,
F den Querschnitt des Körpers in qcm,
k_s die zulässige Scherspannung (Schubspannung) in kg f. d. qcm.

Nach Grashof ist:

$$Q = F k_s c,$$

worin c ein von der Gestalt des Querschnittes abhängiger Koefficient z. B. für das Rechteck $c = \frac{2}{3}$, für den Kreis $c = \frac{3}{4}$.

IV. BIEGUNGSFESTIGKEIT.

A. Erklärungen und allgemeine Gesetze.

Die Sätze unter **a.** bis **d.** gelten für Träger, die eine Symmetrieebene haben, in der alle Kräfte senkrecht zur geraden Schwerachse des Balkens angreifen.

a. Normalspannungen.

1. Bei dieser Beanspruchung auf Biegungsfestigkeit behalten nur die Fasern einer einzigen Schicht, der neutralen Faserschicht oder elastischen Fläche, ihre ursprüngliche Länge. Jeder zur Schwerachse normale Querschnitt wird von der elastischen Fläche in seiner neutralen Achse (Nulllinie) geschnitten. Die neutrale Achse ist gerade, enthält den Schwerpunkt des Querschnittes und trennt die gedehnten Fasern so von den verkürzten, dafs die bezügl. Zug- und Druckspannungen proportional der Entfernung von ihr zunehmen. (Vorausgesetzt wird, dafs die Biegung nur gering sei.)

Es bezeichne:

M_b das Biegungsmoment in dem Querschnitte,
Q die Querkraft (Schubkraft, „Vertikalkraft"),
σ die Normalspannung einer Faser,
y den Abstand derselben von der neutralen Achse,
e_1 den Abstand der entferntesten gezogenen Faser,
e_2 den Abstand der entferntesten gedrückten Faser,
e den gröfseren Wert beider Abstände,
k_z die gröfste zulässige Zugspannung,
k die gröfste zulässige Druckspannung,
J das äquatoriale Trägheitsmoment des Querschnittes für die neutrale Achse, dann gilt die **Grundgleichung**:

$$M_b = \sigma \frac{J}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Damit der Träger dem in dem Querschnitte wirkenden Biegungsmoment M_b widersteht, mufs sein:

$$M_b \overline{\gtrless} \frac{J}{e_1} k_z \quad \text{und} \quad M_b \overline{\gtrless} \frac{J}{e_2} k.$$

Die Werte $\frac{J}{e_1} = W_1$ und $\frac{J}{e_2} = W_2$ werden die **Widerstandsmomente** des Querschnittes für die Zug- bezw. die Druckseite genannt.

Für die meisten Materialien unterscheiden sich die zulässigen Spannungen für Zug und Druck nur wenig; die **zulässige Biegungsspannung** k_b darf dann $= k_z = k$ gesetzt werden, und das den Querschnitt voll belastende Biegungsmoment wird:

$$M_b = \frac{J}{e} k_b = W k_b \quad \ldots\ldots \quad \text{II)}$$

$W = \frac{J}{e}$ heifst das **Widerstandsmoment** des Querschnittes (gegen Biegung) schlechthin. (Tafel der Widerstandsmomente s. S. 320 u. f.)

Wenn k_z von k verschieden (Gufseisen u. s. w.), so ist stets auf die beiden ersten Formeln zurückzugreifen. Falls die neutrale Achse (d. i. die wagerechte Schwerachse) des Querschnittes eine Symmetrieachse, so ist die dem kleineren jener beiden k-Werte entsprechende Formel mafsgebend.

Der **gefährliche Querschnitt** (Bruchquerschnitt) des Trägers, welcher dessen Berechnung zu grunde zu legen ist, ergiebt sich aus der Bedingung $k_b = M_b : W = \max.$

Für prismatische Träger mit $W =$ konst. ist der gefährliche Querschnitt derjenige, in welchem M_b ein Maximum wird; es mufs also

$$\frac{d M_b}{d x} = 0,$$

wenn x in der Richtung der Längsachse des Trägers genommen ist (vergl. S. 317).

Träger gleicher Widerstandsfähigkeit gegen Biegung (s. S. 341) haben in jedem Querschnitt dasselbe $\sigma_{\max} = k_b$; hierfür ist also

$$M_b : W = \text{konst.}$$

2. Die bei der Ableitung der obigen Beziehungen zu grunde gelegten Voraussetzungen treffen für einige Körper, insbesondere für **Gufseisen***), nur in geringem Mafse zu.

1. Für Gufseisen ist die Voraussetzung, dafs die Fasern, aus denen der gebogene Stab gedacht werden kann, auf einander nicht einwirken, um so zutreffender, je mehr der Querschnitt sich in zwei schmalen von der neutralen Achse entfernten, ihr parallelen Streifen zusammendrängt. (Dieser Satz gilt für alle Materialien.)

2. Die weitere Voraussetzung, dafs die auftretenden Spannungen den Dehnungen proportional sind (dafs also der Elasticitätsmodul für alle Fasern gleich grofs), trifft für Gufseisen auch nicht angenähert zu. Die Spannungen in den am stärksten beanspruchten Fasern sind bedeutend kleiner, als sie sich nach der Gleichung $M_b = \sigma \frac{J}{y}$ ergeben würden.

---

*) S. Bach, Zeitschr. d. V. d. Ing., 1888, S. 193 u. f., sowie S. 1094 u. f.: Die Biegungslehre und das Gufseisen.

3. Die aus Biegungsversuchen auf grund der obigen Gleichungen bestimmte Biegungsfestigkeit überschreitet die Zugfestigkeit um so bedeutender, je mehr sich das Material nach der neutralen Achse zusammendrängt; sie nähert sich der Zugfestigkeit um so mehr, je mehr der Abstand z_0 des Schwerpunktes der auf der einen Seite der neutralen Achse gelegenen Querschnittsfläche dem Werte e gleichkommt. (Ueber die Gröfse der zulässigen Biegungsspannung k_b vergl. S. 309, 3.)

b. Schubspannungen.

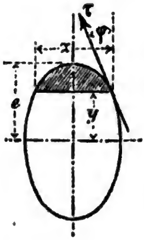
Aufser den obigen Bezeichnungen sei:

z die Breite des Querschnittes im Abstande y von der neutralen Achse,
τ die Schubspannung in diesem Streifen.

Wählt man die Längenrichtung des Trägers als x-Achse, so ist:

$$Q = \frac{d\,M_b}{d\,x} \quad \ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Abbild. 191.



Die Querkraft bei prismatischen Trägern wird Null im gefährlichen Querschnitt, wo $M_b =$ max. (vergl. S. 316).

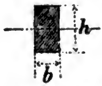
Die **Schubspannung** τ tritt nicht nur in der Ebene des Querschnittes in der Richtung von Q auf, sondern auch zugleich senkrecht zum gedachten Querschnitte; sie ist in demselben Punkte nach beiden Richtungen gleich grofs u. zw. (Abbild. 191):

$$\tau = \frac{Q}{J\,z\,\cos\varphi}\int_y^e y\,z\,dy.$$

Es wird also τ ein Maximum für $y = 0$, $\tau = 0$ für $y = e$.

Für einen **rechteckigen Querschnitt** $b\,h$ (Abbild. 192) ist:

Abbild. 192.



$$\tau = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{b\,h}\left[1 - \left(\frac{y}{e}\right)^2\right]; \quad e = \frac{h}{2};$$

$$\max\tau = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{b\,h} \quad \text{für } y = 0.$$

Für einen **Kreis** mit dem Halbmesser r (Abbild. 193) ist:

Abbild. 193.



$$\tau = \frac{4}{3}\,\frac{Q}{\pi r^2}\cos\varphi;$$

$$\max\tau = \frac{4}{3}\,\frac{Q}{\pi r^2} \quad \text{für } y = 0.$$

Für ein **übereck liegendes Quadrat** (Abbild. 194) ist:

Abbild. 194.

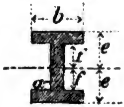


$$\tau = \frac{\sqrt{2}\,Q}{a^2}\left[1 + \frac{y}{e} - 2\left(\frac{y}{e}\right)^2\right]; \quad e = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$\max\tau = \frac{9}{4\sqrt{2}}\,\frac{Q}{a^2} \quad \text{für } y = \tfrac{1}{4}\,e.$$

Für einen **I-förmigen Querschnitt** (Abbild. 195) ist:

Abbild. 195.



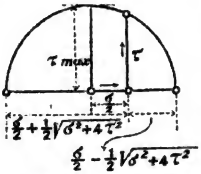
$$\max\tau = \frac{3}{4}\,\frac{Q}{a}\,\frac{b\,e^2 - (b-a)\,f^2}{b\,e^3 - (b-a)\,f^3} \quad \text{für } y = 0.$$

c. Hauptspannungen.

Für einen Punkt des Querschnittes, für den σ und τ die obige Bedeutung haben, werden die **gröfsten Normalspannungen (Hauptspannungen)**:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Abbild. 196.



(Konstruktion von σ_{max} s. Abbild. 196.)

Das eine Vorzeichen ergiebt die gröfste Zug-, das andere die gröfste Druckspannung.

Der Winkel ψ, unter dem σ_{max} gegen die Achse des Balkens geneigt ist, ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \mp \frac{2\sigma}{\tau}.$$

Das — Zeichen gilt für Zug-, das + Zeichen für Druckspannungen.

Die Richtung der gröfsten Zugspannung ist also senkrecht zur gröfsten Druckspannung.

Die **gröfste Schubspannung** hat den Wert:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Der Winkel ψ_τ, unter dem τ_{max} gegen die Achse geneigt ist, findet sich aus der Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2\psi_\tau = \frac{\sigma}{2\tau}.$$

Die gröfste Schubspannung bildet demnach mit der gröfsten Zug- und der gröfsten Druckspannung Winkel von 45°.

Die **gröfste Beanspruchung des Materials** ergiebt sich zu:

$$E\,\varepsilon_{max} = k = \frac{m-1}{2m}\sigma \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},^{*)}$$

mithin für Metalle mit $m = 4$ (vergl. hierzu die Bemerkung a. S. 306):

$$k = \frac{3}{8}\sigma \pm \frac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.^{*)}$$

d. Elastische Linie.

Der **Krümmungshalbmesser** ϱ ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\varrho M_b = EJ, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

woraus, wenn das Bogendifferential ds mit dx vertauscht wird, annähernd folgt:

$$M_b = \pm EJ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

---

*) Nach Bach, Maschinenelemente, 1881, S. 11 u. 12, bedarf es einer Ergänzung dieser Gleichung durch einen Koefficienten α_0 derart, dafs:

$$k = \frac{m-1}{2m}\sigma \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2} \quad \text{bezw.} \quad k = \frac{3}{8}\sigma \pm \frac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}.$$

Hierin bezeichnet $\alpha_0 = \frac{k_z}{\frac{5}{4}k_s}$ bezw. $= \frac{k}{\frac{5}{4}k_s}$ das Beanspruchungs-Verhältnis (vergl. S. 360).

Die **Gleichung der elastischen Linie** erhält man hieraus durch zweimalige Integration.

ϱ wird ∞, d. h. die elastische Linie besitzt **Wendepunkte** für $M = 0$.

Die Bedingung dafür, dafs die elastische Linie ein **Kreis** sei, ist:

$$\frac{\varrho}{E} = \frac{J}{M_b} = \text{konst.}$$

e. Unsymmetrische Belastung.

1. Liegen die angreifenden Kräfte nicht in der Symmetrieebene des Balkens, oder ist dessen Querschnitt unsymmetrisch, so liegt unter Voraussetzung lotrecht gerichteter Kräfte die **neutrale Achse** nicht mehr wagerecht, sondern fällt mit dem der **Kraftrichtung zugeordneten Durchmesser der Centralellipse** des Querschnittes zusammen. (Vergl. S. 169 u. 101.)

2. Bezeichnen (Abbild. 197):

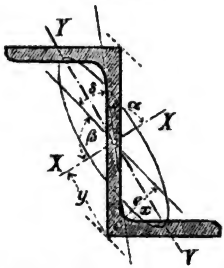
J_x und J_y die Haupt-Trägheitsmomente des Querschnittes für die Schwerachsen XX bezw. YY,

α den Winkel, welchen die Kraftrichtung } mit der Achse XX einschliefst,
β den Winkel, welchen die neutrale Achse } mit der Achse XX einschliefst,

so findet man den Winkel β aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{J_x}{J_y}.$$

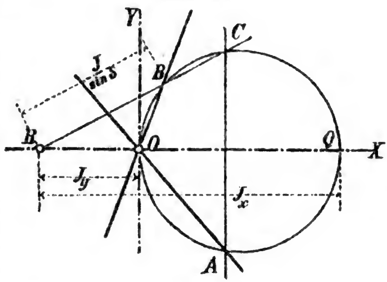
Abbild. 197.



3. Die **neutrale Achse** kann man ohne Benutzung der Centralellipse in folgender Weise **durch Zeichnung** finden:

Auf der Hauptachse OX trage man vom Schwerpunkte O aus $J_y = OR$, von R aus $RQ = J_x$ ab, zeichne über OQ als Durchmesser einen Kreis, fälle von dessen Schnittpunkt A mit der Angriffslinie ein Lot auf OX und verbinde R mit dem Schnittpunkte C dieses Lotes und des Kreises. Diese Verbindungslinie schneidet den Kreis in B, alsdann ist BO die neutrale Achse.

Abbild. 198.

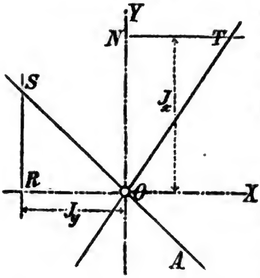


(Die Konstruktion bei allgemeiner Lage der Achsen vergl. Müller-Breslau, Graphische Statik, II. Auflage, S. 52 u. f.)

Oder:

Man trage wie oben vom Schwerpunkte aus auf der Hauptachse OX die Strecke $OR = J_y$, auf OY die Strecke $ON = J_x$ ab, und errichte auf den Hauptachsen Lote in R und N. Das Lot in R schneidet die Angriffslinie in S. Macht man dann $NT = RS$, so wird OT die gesuchte neutrale Achse. (Abbild. 199.)

Abbild. 199.



4. Die durch das Moment M_b hervorgerufene **größte Spannung** beträgt:

$$\sigma_{max} = \frac{M_b \sin\delta}{J} e,$$

wenn man mit J das Trägheitsmoment für die neutrale Achse, mit e den Abstand der äufsersten Faser von derselben und mit δ den Winkel zwischen Kraftrichtung und neutraler Achse bezeichnet (Abbild. 197 a. v. S.).

In Abbild. 198 ist $RB = \frac{J}{\sin\delta}$.

(Bestimmung der gröfsten Spannung mittelst des Kerns s. S. 356.)

Oder: $$\sigma_{max} = \frac{M_b \sin\alpha}{J_x} y + \frac{M_b \cos\alpha}{J_y} x,$$

wobei x und y die Abstände des entferntesten Punktes von der YY- bezw. XX-Achse bezeichnen. (Vergl. Abbild. 197.)

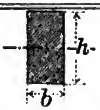
Derjenige Winkel α, welcher diesen Ausdruck zu einem Maximum macht, bestimmt die ungünstigste Belastungsebene. (Vergl. S. 356 u. 357.)

B. Trägheits- und Widerstandsmomente.

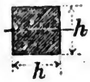
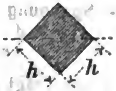
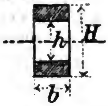
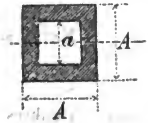
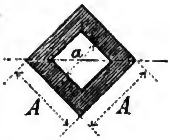
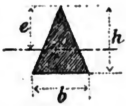
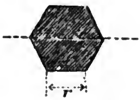
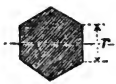
Erklärung und allgemeine Gesetze über äquatoriale Trägheitsmomente vergl. S. 168 u. f.; Bestimmung der Trägheitsmomente mittelst Schwingungsversuchen s. S. 192. Zeichnerische Bestimmung der Trägheitsmomente s. S. 170 u. f.

a. Tafel für die äquatorialen Trägheitsmomente und Widerstandsmomente der üblichsten Querschnittsformen.

Bei den unsymmetrischen Querschnitten 7, 12, 17, 18 und 19 ist nur das kleinere (mafsgebende) der beiden Widerstandsmomente W_1 und W_2 angegeben. (Vergl. S. 316.)

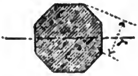
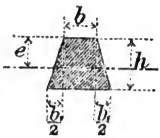
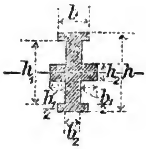
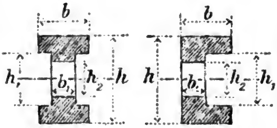
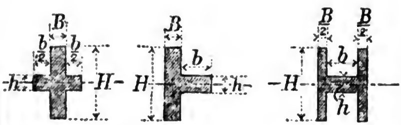
Nr.	Form des Querschnitts.	Trägheitsmoment J.	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$.
1 *)		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$

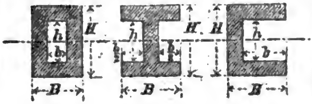
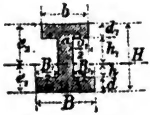
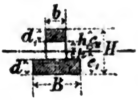
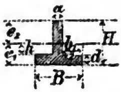
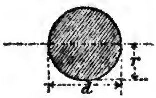
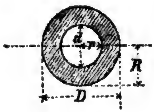
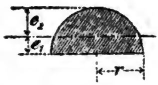
*) Ausführliche Tafel s. S. 328 u. f.

Nr.	Form des Querschnitts.	Trägheitsmoment J.	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$.
2 *)		$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^3}{6}$
3 *)		$\frac{h^4}{12}$	$0{,}1178\,h^3$
4		$\frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	$\frac{b}{6H}(H^3 - h^3)$
5 **)		$\frac{A^4 - a^4}{12}$	$\frac{1}{6}\,\frac{A^4 - a^4}{A}$
6 **)		$\frac{A^4 - a^4}{12}$	$\frac{A^4 - a^4}{12\,A}\sqrt{2}$ $= 0{,}1178\,\frac{A^4 - a^4}{A}$
7		$J = \frac{b\,h^3}{36}$ $e = \frac{2}{3}\,h$	$\frac{b\,h^2}{24}$
8		$\frac{5}{16}\sqrt{3}\,r^4 = 0{,}5413\,r^4$	$\frac{5}{8}\,r^3$
9			$0{,}5413\,r^3$

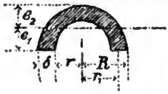
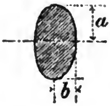
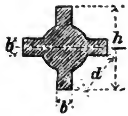
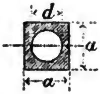
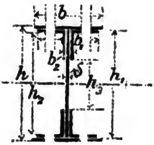
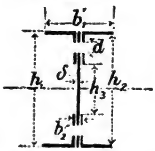
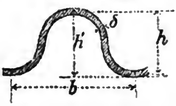
*) Ausführliche Tafel s. S. 327.

**) Hierzu kann die Tafel S. 327 benutzt werden.

Nr.	Form des Querschnitts.	Trägheitsmoment J.	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$.
10		$\frac{1+2\sqrt{2}}{6} r^4 = 0{,}6381\, r^4$	$0{,}6906\, r^3$
11	Regelmäſsiges Vieleck von n Seiten, wo a die Seite, F der Flächeninhalt des Vielecks und r der Halbmesser des umschriebenen Kreises.	$\frac{F}{12}\left(3r^2 - \frac{a^2}{2}\right)$ $\left(\text{angenähert} = \frac{r^2 F}{4}\right)$	$\frac{rF}{4}$
12		$J = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b+b_1)} h^3$ $e = \frac{1}{3} \frac{3b+2b_1}{2b+b_1} h$	$\frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b+2b_1)} h^2$
13		$\frac{bh^3 - (b-b_2)h_1^3 + b_1 h_2^3}{12}$	$\frac{bh^3 - (b-b_2)h_1^3 + b_1 h_2^3}{6h}$
14		$J = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{12}$	$W = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{6h}$
15		$J = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$	$W = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$

Nr.	Form des Querschnitts.	Trägheitsmoment J.	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$.
16		$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
17		$J = \frac{1}{3}\left[Be_1^3 - B_1 h^3 + b e_2^3 - b_1 h_1^3\right]$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{aH^2 + B_1 d^2 + b_1 d_1 (2H - d_1)}{aH + B_1 d + b_1 d_1}$	
18		$J = \frac{1}{3}\left[B(e_1^3 - h^3) - b(e_2^3 - h_1^3)\right]$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{Bd^2 + bd_1(2H - d_1)}{Bd - bd_1}$	
19		$J = \frac{1}{3}\left[Be_1^3 - b_1 h^3 + a e_2^3\right]$ $e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{aH^2 + b_1 d^2}{aH + b_1 d}$	Auch entsprechend anwendbar für den ⅃-Querschnitt, wenn dieser gegen seitliches Ausbiegen geschützt, sowie für den ⊓-Querschnitt.
20 *)		$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $= 0{,}0491\, d^4$ $= 0{,}7854\, r^4$	$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$ $= 0{,}0982\, d^3$ $= 0{,}7854\, r^3$
21 **)		$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$	$\frac{\pi}{32}\,\frac{D^4 - d^4}{D}$ $= \frac{\pi}{4}\,\frac{R^4 - r^4}{R}$
22		$r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$ $= 0{,}1098\, r^4$	$W_1 = 0{,}1908\, r^3$ $W_2 = 0{,}2587\, r^3$

*) Ausführliche Tafel s. S. 325.
**) Ausführliche Tafel s. S. 326.

Nr.	Form des Querschnitts.	Trägheitsmoment J.	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$.
23		$\frac{0{,}1098\,(R^4 - r^4) - 0{,}283\,R^2 r^2 (R - r)}{R + r}$ (angenähert $= 0{,}3\,\delta r_1^3$)	$e_1 = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$ $e_2 = R - e_1$
24		$\frac{\pi b a^3}{4} = 0{,}7854\,b a^3$	$\frac{\pi b a^2}{4} = 0{,}7854\,b a^2$
25		$\frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d)\right]$	$\frac{1}{6h}\left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d)\right]$
		$\left(\frac{3\pi}{16} = 0{,}5890\right)$	
26		$\frac{1}{12}\left(a^4 - \frac{3\pi}{16} d^4\right)$	$\frac{1}{6a}\left(a^4 - \frac{3\pi}{16} d^4\right)$
27 *)		$J = \frac{1}{12}\left[b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3) + b_2(h_2^3 - h_3^3) + \delta h_3^3\right] = \frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3) + J_0$ (b und b_1 verstehen sich ausschl. Nietloch-Durchmesser)	$W = \frac{2J}{h}$
28 *)		$J = \frac{1}{12}\left[b'_1(h_1^3 - h_2^3) + b_2(h_2^3 - h_3^3) + \delta h_3^3\right] - \underbrace{\tfrac{1}{2} d b_2 \left(\frac{h_2 + h_3}{2}\right)^2}_{\text{angenähert für Nietabzug}}$	$W = \frac{2J}{h_1}$
29 **)			$J = \left(0{,}103 + 0{,}186\,\frac{h}{b}\right) h^2 \delta$ $W = \left(0{,}196 + 0{,}354\,\frac{h}{b}\right) h\,\delta$ (h und δ in mm, angenähert J in cm^4, W in ccm f. d. lfd. m Breite.)
30 ***)	Eisenbahnschiene (ähnlich der preufs. Normalschiene.)	$0{,}032\,h^4$ (h Höhe der Schiene in cm.)	$0{,}064\,h^3$

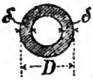
*) Ausführliche Tafel s. Abteil. II, Abschnitt Statik der Baukonstruktionen.
**) Ausführliche Tafel s. Abteil. II, Abschnitt Materialienkunde.
***) Vergl. Abteil. II, S. 78. Angaben für andere Eisenbahnschienen s. Abteil. II. S. 78 u. 79.



1. Kreisförmiger Querschnitt.

J = Aequat. Trägheitsmoment, W = Widerstandsmoment.

d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$	d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$	d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	34	65597	3859	67	989166	29527
2	0,7854	0,7854	35	73662	4209	68	1049556	30869
3	3,976	2,651	36	82448	4580	69	1112660	32251
4	12,57	6,283	37	91998	4973	70	1178588	33674
5	30,68	12,27	38	102354	5387	71	1247393	35138
6	63,62	21,21	39	113561	5824	72	1319167	36644
7	117,9	33,67	40	125664	6283	73	1393995	38192
8	201,1	50,27	41	138709	6766	74	1471963	39783
9	322,1	71,57	42	152745	7274	75	1553156	41417
10	490,9	98,17	43	167820	7806	76	1637662	43096
11	718,7	130,7	44	183984	8363	77	1725571	44820
12	1018	169,6	45	201289	8946	78	1816972	46589
13	1402	215,7	46	219787	9556	79	1911967	48404
14	1886	269,4	47	239531	10193	80	2010619	50265
15	2485	331,3	48	260576	10857	81	2113051	52174
16	3217	402,1	49	282979	11550	82	2219347	54130
17	4100	482,3	50	306796	12272	83	2329605	56135
18	5153	572,6	51	332086	13023	84	2443920	58189
19	6397	673,4	52	358908	13804	85	2562392	60292
20	7854	785,4	53	387323	14616	86	2685120	62445
21	9547	909,2	54	417393	15459	87	2812205	64648
22	11499	1045	55	449180	16334	88	2943748	66903
23	13737	1194	56	482750	17241	89	3079853	69210
24	16286	1357	57	518166	18181	90	3220623	71569
25	19175	1534	58	555497	19155	91	3366165	73982
26	22432	1726	59	594810	20163	92	3516586	76448
27	26087	1932	60	636172	21206	93	3671992	78968
28	30172	2155	61	679651	22284	94	3832492	81542
29	34719	2394	62	725332	23398	95	3998198	84173
30	39761	2651	63	773272	24548	96	4169220	86859
31	45333	2925	64	823550	25736	97	4345671	89601
32	51472	3217	65	876240	26961	98	4527664	92401
33	58214	3528	66	931420	28225	99	4715315	95259
						100	4908738	98175

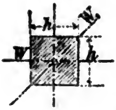


2. Kreisringförmiger Querschnitt.

Die Gewichte g beziehen sich auf gufseiserne Rohre (in kg f. d. lfd. m). Für Schweifseisen sind die Werte mit 1,076, für Flufseisen mit 1,083, für gewalzten und gegossenen Flufsstahl mit 1,084 zu multiplizieren.

Aeufserer Durchmesser. D mm	Wandstärke. δ mm	Querschnitt. F qcm	Gewicht des gufseisernen Rohres. g kg f. d. lfd. m	Trägheitsmoment. J cm^4	Widerstandsmoment. W ccm
100	10	28,27	20,50	289,81	57.96
	12	33,18	24,05	327,1	65,42
	15	40,06	29,04	373,0	74.59
	18	46,37	33,62	408,5	81,70
	20	50,27	36,44	427,3	85,45
110	12	36,95	26,79	450,2	81,85
	15	44.77	32,46	517,6	94,11
	18	52,02	37,72	571,5	103,90
	20	56,55	40,99	600,8	109,2
120	12	40.71	29.52	601,0	100,2
	15	49,48	35.88	695,8	116,0
	18	57,68	41,82	773,5	128,9
	20	62,83	45,56	816.8	136,1
130	12	44,48	32,25	782,3	120,3
	15	54.19	39,29	911,1	140,2
	18	63,33	45.92	1019	156,8
	20	69,11	50,11	1080	166,1
	22	74,64	54,12	1134	174,4
	25	82,47	59.79	1201	184,8
140	12	48,26	34.98	997	142,4
	15	58,90	42,70	1167	166,7
	18	68.99	50,02	1311	187,4
	20	75,40	54.29	1395	199.3
	22	81,56	59.13	1469	209,9
	25	90,32	65,49	1564	223,4
150	15	63,62	46,12	1467	195,6
	18	74,65	54.12	1656	220,8
	20	81,68	59.22	1766	235,5
	22	88.47	64.14	1866	248,8
	25	98,18	71.17	1994	265.9
	28	107,32	77,80	2102	280,2
160	15	68,33	49,54	1815	226,9
	18	80.30	58,22	2056	257,1
	20	87,97	63,77	2199	274,9
	22	95,38	69,15	2329	291,1
	25	106,03	76,87	2498	312.3
	28	116,11	84,18	2643	330.3
	30	122.52	88,83	2726	340,8
170	15	73,04	52,96	2214	260,5
	18	85,95	62,32	2517	296,1
	20	94,25	68,33	2698	317,4
	22	102,29	74,16	2863	336,8
170	25	113,88	82,57	3082	362,6
	28	124,91	90,56	3271	384,8
	30	131,95	95,66	3381	397,8
180	15	77.75	56,38	2668	296,4
	18	91,61	66,42	3042	338,0
	20	100,53	72,88	3267	363,0
	22	109.20	79.17	3475	386,1
	25	121,74	88,26	3751	416,8
	28	133,71	96,94	3992	443.6
	30	141,37	102,49	4135	459.5
	35	159,44	115,59	4434	492,7
190	15	82,47	59.79	3180	334,8
	18	97.26	70,52	3636	382,8
	20	106,81	77,44	3912	411,8
	22	116,11	84,18	4168	438,7
	25	129,59	93,95	4511	474,9
	28	142,50	103,31	4814	506.8
	30	150,80	109.33	4995	525.8
	35	170,43	123,56	5379	566,2
200	15	87,18	63,20	3754	375,4
	18	102,92	74,62	4303	430,3
	20	113,10	82,00	4637	463,7
	25	137.44	99,65	5369	536,9
	28	151,30	109,69	5743	574,3
	30	160,22	116,16	5968	596,8
	35	181,43	131,53	6452	645,2
225	20	128,81	93,38	6831	607,2
	25	157,08	113,88	7977	709,0
	30	183,78	133,24	8942	791,9
	35	208,92	151,46	9747	866,4
250	22	157,58	114,25	10334	827,0
	25	176,72	128,12	11320	905,7
	30	207,35	150.33	12778	1022
	35	236,41	171,39	14022	1122
275	25	196,35	142,35	15493	1127
	30	230,91	167,41	17585	1279
	35	263,89	191,32	19397	1411
300	28	239,26	173.47	22359	1491
	30	254.47	184,49	23472	1565
	35	291,38	211,25	26021	1735
350	30	301,59	218,56	38938	2225
	35	346,36	251.11	43484	2485

8. Quadratischer Querschnitt.



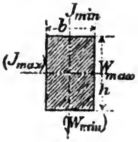
$J = \frac{h^4}{12}$ = Trägheitsmoment für alle Schwerachsen.

$W = \frac{h^3}{6}$ = Widerstandsmoment für die Schwerachsen parallel den Seiten.

$W_1 = \frac{h^3}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}1178\,h^3$ Widerstandsmoment für die Diagonalen als Achsen.

h	J	W	W_1	h	J	W	W_1
1	0,0833	0,1667	0,1179	31	76961	4965,2	3510,9
2	1,3333	1,3333	0,9428	32	87381	5461,3	3861,7
3	6,7500	4,5000	3,1820	33	98827	5989,5	4235,2
4	21,333	10,667	7,5824	34	111362	6550,7	4632,0
5	52,083	20,833	14,731	35	125052	7145,8	5052,8
6	108,00	36,000	25,456	36	139968	7776,0	5498,4
7	200,08	57,167	40,423	37	156181	8442,2	5969,5
8	341,33	85,333	60,339	38	173761	9145,3	6466,7
9	546,75	121,50	85,913	39	192787	9886,5	6990,7
10	833,33	166,67	117,85	**40**	213340	10667	7542,4
11	1220,1	221,83	156,86	41	234484	11487	8122,3
12	1728,0	288,00	203,64	42	259308	12348	8731,3
13	2380,1	366,17	258,92	43	284900	13251	9369,9
14	3201,3	457,33	323,38	44	312341	14197	10039
15	4218,8	562,50	397,74	45	341742	15188	10739
16	5461,3	682,66	482,71	46	373121	16223	11471
17	6960,1	818,83	579,00	47	406668	17304	12236
18	8748,0	972,00	687,30	48	442368	18432	13033
19	10860	1143,2	808,33	49	480400	19608	13865
20	13333	1333,3	942,80	**50**	520833	20833	14731
21	16207	1543,5	1091,4	51	563775	22109	15633
22	19522	1774,7	1254,9	52	609310	23435	16571
23	23320	2027,8	1433,9	53	657540	24813	17545
24	27648	2304,0	1629,2	54	708588	26244	18557
25	32552	2604,2	1841,4	55	762552	27729	19607
26	38081	2929,3	2071,3	56	819541	29269	20696
27	44287	3280,5	2319,6	57	876633	30866	21825
28	51222	3658,7	2587,0	58	934708	32519	22994
29	58940	4064,8	2874,2	59	1009779	34230	24204
30	67500	4500,0	3182,0	**60**	1080000	36000	25456

4. Rechteckiger Querschnitt.*)



$$J_{\text{min}} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$W_{\text{max}} = \frac{b h^2}{6}$$

Bemerkung. $J_{\text{max}} = \frac{b h^3}{12}$ ergiebt sich aus W_{max} der Tafel durch Multiplikation mit $\frac{h}{2}$; $W_{\text{min}} = \frac{b^2 h}{6}$ ergiebt sich aus J_{min} der Tafel durch Division durch $\frac{b}{2}$.

Querschnitt h	Querschnitt b	J_{min}	W_{max}
2	1	0,1778	0,6667
3	1	0,2500	1,5000
	2	2,0000	3,0000
4	1	0,3333	2,6667
	2	2,6667	5,3333
	3	9,0000	8,0000
5	1	0,4167	4,1667
	2	3,3333	8,3333
	3	11,2500	12,500
	4	26,667	16,667
6	1	0,5000	6,0000
	2	4,0000	12,000
	3	13,500	18,000
	4	32,000	24,000
	5	62,500	30,000
7	1	0,5833	8,1667
	2	4,6667	16,333
	3	15,750	24,500
	4	37,333	32,667
	5	72,917	40,833
	6	126,00	49,000
8	1	0,6667	10,667
	2	5,3333	21,333
	3	18,000	32,000
	4	42,667	42,667
	5	83,333	53,333
	6	144,00	64,000
	7	228,67	74,667

Querschnitt h	Querschnitt b	J_{min}	W_{max}
9	1	0,7500	13,500
	2	6,0000	27,000
	3	20,250	40,500
	4	48,000	54,000
	5	93,750	67,500
	6	162,00	81,000
	7	257,25	94,500
	8	384,00	108,00
10	1	0,8333	16,667
	2	6,6667	33,333
	3	22,500	50,000
	4	53,333	66,667
	5	104,17	83,333
	6	180,00	100,00
	7	285,83	116,67
	8	426,67	133,33
	9	607,50	150,00
11	1	0,9167	20,167
	2	7,3333	40,333
	3	24,750	60,5
	4	58,667	80,667
	5	114,58	100,83
	6	198,00	121,00
	7	314,42	141,17
	8	469,33	161,33
	9	668,25	181,50
	10	916,67	201,67
12	1	1,0000	24,000
	2	8,0000	48,000

Querschnitt h	Querschnitt b	J_{min}	W_{max}
12	3	27,000	72,000
	4	64,000	96,000
	5	125,00	120,00
	6	216,00	144,00
	7	343,00	168,00
	8	512,00	192,00
	9	729,00	216,00
	10	1000,0	240,00
	11	1331,0	264,00
13	1	1,0833	28,167
	2	8,6667	56,333
	3	29,250	84,500
	4	69,333	112,67
	5	135,42	140,83
	6	234,00	169,00
	7	371,58	197,17
	8	554,67	225,33
	9	789,75	253,50
	10	1083,3	281,67
	11	1441,9	309,83
	12	1872	338,00
14	1	1,1667	32,667
	2	9,3333	65,333
	3	31,500	98,000
	4	74,667	130,67
	5	145,83	163,33
	6	252,00	196,00
	7	400,17	228,67
	8	597,33	261,33

*) Für Hölzer s. auch unter Baumaterialien, Abteil. II, Abschnitt Materialienkunde.

Querschnitt h	Querschnitt b	J_{min}	W_{max}
14	9	850,5	294,00
	10	1166,7	326,67
	11	1552,8	359,33
	12	2016	392,00
	13	2563,2	424,67
15	1	1,2500	37,500
	2	10,000	75,000
	3	33,750	112,50
	4	80,000	150,00
	5	156,25	187,50
	6	270,00	225,00
	7	428,75	262,50
	8	640,00	300,00
	9	911,25	337,50
	10	1250,0	375,00
	11	1663,8	412,50
	12	2160,0	450,00
	13	2746,3	487,50
	14	3430,3	525,00
16	1	1,3333	42,667
	2	10,667	85,333
	3	36,000	128,00
	4	85,333	170,67
	5	166,67	213,33
	6	288,00	256,00
	7	457,33	298,67
	8	682,67	341,33
	9	972,00	384,00
	10	1333,3	426,67
	11	1774,7	469,33
	12	2304,0	512,00
	13	2929,3	554,67
	14	3658,7	597,33
	15	4500,0	640,00
17	1	1,4167	48,167
	2	11,333	96,333
	3	38,25	144,5
	4	90,667	192,67
	5	177,08	240,83
	6	306,00	289,00
	7	485,92	337,17
	8	725,33	385,33

Querschnitt h	Querschnitt b	J_{min}	W_{max}
17	9	1032,8	433,5
	10	1416,7	481,67
	11	1885,6	529,83
	12	2448,0	578,00
	13	3112,4	626,70
	14	3887,3	674,33
	15	4781,3	722,5
	16	5802,7	770,67
18	1	1,5000	54,000
	2	12,000	108,00
	3	40,500	162,00
	4	96,000	216,00
	5	187,50	270,00
	6	324,00	324,00
	7	514,50	378,00
	8	768,00	432,00
	9	1093,5	486,00
	10	1500,0	540,00
	11	1996,5	594,00
	12	2592,0	648,00
	13	3295,5	702,00
	14	4116,0	756,00
	15	5062,5	810,00
	16	6144,0	864,00
	17	7369,5	918,00
19	1	1,5833	60,167
	2	12,667	120,33
	3	42,75	180,5
	4	101,33	240,67
	5	197,92	300,83
	6	342,00	361,00
	7	543,08	421,17
	8	810,67	481,33
	9	1154,3	541,5
	10	1583,3	601,67
	11	2107,4	661,83
	12	2736,0	722,00
	13	3478,6	782,17
	14	4344,7	842,33
	15	5343,8	902,50
	16	6485,3	962,67
	17	7778,9	1022,8

Querschnitt h	Querschnitt b	J_{min}	W_{max}
19	18	9225,7	1083,0
20	1	1,6667	66,667
	2	13,333	133,33
	3	45,000	200,00
	4	106,67	266,67
	5	208,33	333,33
	6	360,00	400,00
	7	571,67	466,67
	8	853,33	533,33
	9	1215,0	600,00
	10	1666,7	666,67
	11	2218,3	733,33
	12	2880,0	800,00
	13	3661,7	866,67
	14	4573,3	933,33
	15	5625,0	1000,0
	16	6826,7	1066,7
	17	8188,3	1133,3
	18	9720,0	1200,0
	19	11432	1266,7
21	1	1,7500	73,500
	2	14,000	147,00
	3	4 ,250	220,50
	4	112,00	294,00
	5	218,75	367,50
	6	378,00	441,00
	7	600,25	514,50
	8	896,00	588,00
	9	1275,8	661,50
	10	1750,0	735,00
	11	2329,3	808,50
	12	3024,0	882,00
	13	3844,8	955,50
	14	4802,0	1029,0
	15	5906,3	1102,5
	16	7168,0	1176,0
	17	8597,8	1249,5
	18	10206	1323,0
	19	12003	1396,5
	20	14000	1470,0
22	1	1,8333	80,667
	2	14,667	161,33

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
22	3	49,500	242,00
	4	117,33	322,67
	5	229,17	403,33
	6	396,00	484,00
	7	628,83	564,67
	8	968,67	645,33
	9	1336,5	726,00
	10	1833,3	806,67
	11	2440,2	887,33
	12	3168,0	968,00
	13	4027,8	1048,7
	14	5030,7	1129,3
	15	6187,5	1210,0
	16	7509,3	1290,7
	17	9007,2	1371,3
	18	10692	1452,0
	19	12575	1532,7
	20	14667	1613,3
	21	16970	1694,0
23	1	1,9167	88,167
	2	15,333	176,33
	3	51,750	264,50
	4	122,67	352,67
	5	239,58	440,83
	6	414,00	529,00
	7	657,42	617,17
	8	981,33	705,33
	9	1397,3	793,50
	10	1916,7	881,67
	11	2551,1	969,83
	12	3312,0	1058,0
	13	4210,9	1146,2
	14	5259,3	1234,3
	15	6468,8	1322,5
	16	7850,7	1410,7
	17	9416,6	1498,8
	18	11178	1587,0
	19	13146	1675,2
	20	15333	1763,3
	21	17750	1851,5
	22	20409	1939,7
24	1	2,0000	96,000
	2	16,000	192,00
	3	54,000	288,00
	4	128,00	384,00
	5	250,00	480,00
	6	432,00	576,00
	7	686,00	672,00
	8	1024,0	768,00
	9	1458,0	864,00
	10	2000,0	960,00
	11	2662,0	1056,0
	12	3456,0	1152,0
	13	4394,0	1248,0
	14	5488,0	1344,0
	15	6750,0	1440,0
	16	8192,0	1536,0
	17	9826,0	1632,0
	18	11664	1728,0
	19	13718	1824,0
	20	16000	1920,0
	21	18522	2016,0
	22	21296	2112,0
	23	24314	2208,0
25	1	2,0833	104,17
	2	16,667	208,33
	3	56,250	312,50
	4	133,33	416,67
	5	260,42	520,83
	6	450,00	625,00
	7	714,58	729,17
	8	1066,7	833,33
	9	1518,8	937,50
	10	2083,3	1041,7
	11	2772,9	1145,8
	12	3600,0	1250,0
	13	4577,1	1354,2
	14	5716,7	1458,3
	15	7031,3	1562,5
	16	8533,3	1666,7
	17	10235	1770,8
	18	12150	1875,0
	19	14290	1979,2
	20	16667	2083,3
	21	19294	2187,5
	22	22183	2291,7
	23	25348	2395,8
	24	28800	2500,0
26	1	2,1667	112,67
	2	17,333	225,33
	3	58,500	338,00
	4	138,67	450,67
	5	270,84	563,33
	6	468,00	676,00
	7	743,16	788,69
	8	1109,3	901,32
	9	1579,5	1014,0
	10	2166,7	1126,7
	11	2883,9	1239,3
	12	3744,0	1352,0
	13	4760,1	1464,7
	14	5945,4	1577,3
	15	7312,5	1690,0
	16	8873,6	1802,7
	17	10645	1915,3
	18	12636	2028,0
	19	14861	2140,7
	20	17333	2253,3
	21	20066	2366,0
	22	23071	2478,7
	23	26361	2591,3
	24	29952	2704,0
	25	33855	2816,7
27	1	2,2499	121,50
	2	18,000	243,00
	3	60,750	364,50
	4	144,00	486,00
	5	281,26	607,50
	6	486,00	729,00
	7	771,74	850,50
	8	1152,0	972,00
	9	1640,4	1093,5
	10	2250,0	1215,0
	12	2994,8	1336,5
	12	3888,0	1458,0
	13	4943,2	1579,5

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
27	14	6174,1	1701,0
	15	7593,8	1822,5
	16	9215,9	1944,0
	17	11054	2065,5
	18	13122	2187,0
	19	15433	2308,5
	20	18000	2430,0
	21	20837	2551,5
	22	23958	2673,0
	23	27375	2794,5
	24	31004	2916,0
	25	35157	3037,5
	26	39547	3159,0
28	1	2,3333	130,67
	2	18,667	261,33
	3	63,000	392,00
	4	149,33	522,67
	5	291,68	653,33
	6	504,00	784,00
	7	800,32	914,67
	8	1194,7	1045,3
	9	1701,0	1176,0
	10	2333,3	1306,7
	11	3105,7	1437,3
	12	4032,0	1568,0
	13	5126,2	1698,7
	14	6402,8	1829,3
	15	7875,0	1960,0
	16	9557,2	2090,7
	17	11464	2221,3
	18	13608	2352,0
	19	16004	2482,7
	20	18667	2613,3

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
28	21	21609	2744,0
	22	24845	2874,7
	23	28389	3005,3
	24	32256	3136,0
	25	36459	3266,7
	26	41012	3397,3
	27	45928	3528,3
29	1	2,4166	140,17
	2	19,333	280,33
	3	65,250	420,50
	4	154,67	560,66
	5	302,09	700,83
	6	522,00	841,00
	7	828,91	981,17
	8	1237,3	1121,3
	9	1761,8	1261,5
	10	2416,7	1401,7
	11	3216,7	1541,8
	12	4176,0	1682,0
	13	5309,3	1822,2
	14	6631,4	1962,3
	15	8156,3	2102,5
	16	9898,6	2242,7
	17	11873	2382,8
	18	14094	2523,0
	19	16576	2663,2
	20	19333	2803,3
	21	22381	2943,5
	22	25733	3083,7
	23	29403	3223,8
	24	33408	3364,0
	25	37761	3504,2

Querschnitt h	b	J_{min}	W_{max}
29	26	42476	3644,3
	27	47569	3784,5
	28	53050	3924,7
30	1	2,4999	150,00
	2	20,000	300,00
	3	67,500	450,00
	4	160,00	600,00
	5	312,51	750,00
	6	540,00	900,00
	7	857,49	1050,0
	8	1280,0	1200,0
	9	1822,5	1350,0
	10	2500,0	1500,0
	11	3327,6	1650,0
	12	4320,0	1800,0
	13	5492,5	1950,0
	14	6860,1	2100,0
	15	8437,5	2250,0
	16	10240	2400,0
	17	12283	2550,0
	18	14580	2700,0
	19	17147	2850,0
	20	20000	3000,0
	21	23153	3150,0
	22	26620	3300,0
	23	30417	3450,0
	24	34560	3600,0
	25	39063	3750,0
	26	43941	3900,0
	27	49209	4050,0
	28	54879	4200,0
	29	60972	4350,0

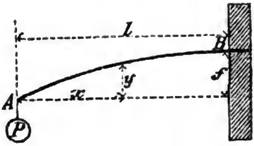
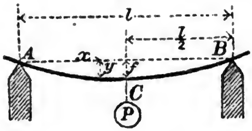
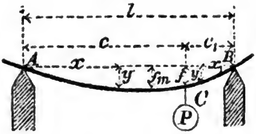
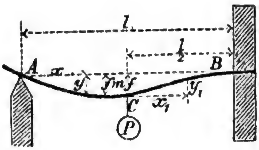
Tafeln der deutschen Normalprofile für Walzeisen s. Abteil. II, Abschnitt Materialienkunde.

Tafeln anderer Walzeisen s. ebendaselbst.

Tafel der Wellbleche s. ebendaselbst.

C. Besondere

a. Zusammenstellung einfacher

Angriffsweise.	Stützendrücke A, B. Biegungsmoment M.	Tragkraft.
1. 	$B = P$ $M = Px$ $M_{\max} = Pl$	$P = \frac{k_b W}{l}$
2. 	$A = B = \frac{P}{2}$ $M = \frac{Px}{2}$ $M_{\max} = \frac{Pl}{4}$	$P = 4\frac{k_b W}{l}$
3. 	$A = \frac{Pc_1}{l}$, $B = \frac{Pc}{l}$ Für AC: $M = \frac{Pc_1 x}{l}$ Für BC: $M = \frac{Pcx_1}{l}$ $M_{\max} = \frac{Pcc_1}{l}$	$P = k_b W \frac{l}{cc_1}$
4. 	$A = \frac{5}{16}P$, $B = \frac{11}{16}P$ Für AC: $M = \frac{5}{16}Px$ Für BC: $M = Pl\left(\frac{5}{32} - \frac{11}{16}\frac{x_1}{l}\right)$ $M_{\max} = \frac{3\,Pl}{16}$	$P = \frac{16}{3}\frac{k_b W}{l}$

*) Vergl. Reuleaux, Der Konstrukteur, IV. Aufl. S. 10 u. f.

Für die Berechnung **eingemauerter** Träger ist der Sicherheit halber **stets ein** Freiaufliegen anzunehmen; es sind also die Fälle Nr. 4, 5, 9, 10 **nicht zu** benutzen.

Fälle.

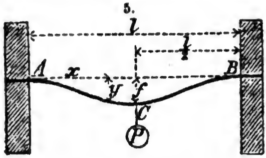
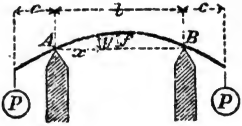
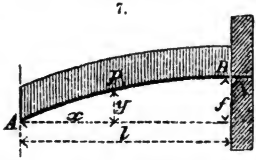
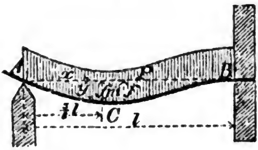
Biegungsbeanspruchungen.*)

Gleichung der elastischen Linie.	Durchbiegung f.	Bemerkungen.
$y = \frac{Pl^3}{2EJ}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3}$ **)	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{Pl^3}{16EJ}\left[\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}$	Frei aufliegender Träger. Gef. Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{c^2c_1^2}{6l}\left[2\frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2c_1}\right]$ $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{c_1^2c^2}{6l}\left[2\frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2c}\right]$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3}\frac{c^2}{l^2}\frac{c_1^2}{l^2}$ f_{max} für: $x = c\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c_1}{3c}}$ $(c > c_1)$ $x_1 = c_1\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c}{3c_1}}$ $(c < c_1)$	Gef. Querschnitt bei C.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{32}\left[\frac{x}{l} - \frac{5}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$ $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{32}\left[\frac{1}{4}\frac{x_1}{l} + \frac{5}{2}\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3}\frac{x_1^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{7l^3}{768}$ $f_{max} = \sqrt{\frac{1}{5}}\,\frac{Pl^3}{48EJ}$ für $x = l\sqrt{\frac{1}{5}}$	Halb eingespannter Träger. Gef. Querschnitt bei B. Moment in C: $M_C = \frac{5}{32}Pl$.

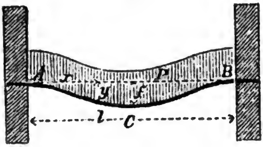
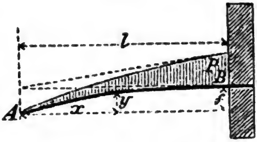
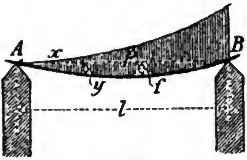
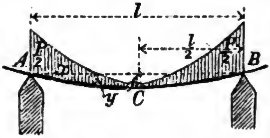
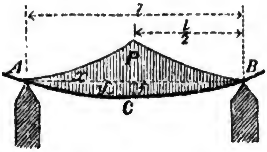
**) Hieraus folgt die Tragkraft:

$$P = 3E\frac{J}{l^2}\left(\frac{f}{l}\right).$$

Diese Formel wird häufig (unter Annahme von $f:l = 1:800$ bis $1:1000$) zur Berechnung langer, schwächer beanspruchter Träger z. B. für Laufbühnen u. dergl. benutzt. (Aehnliche Formeln ergeben die weiteren Belastungsfälle.)

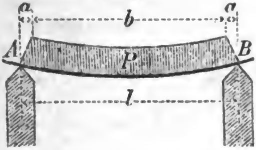
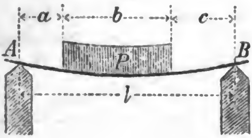
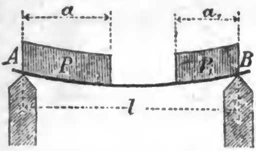
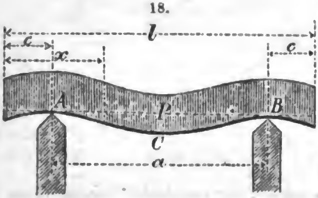
Angriffsweise.	Stützendrücke A, B. Biegungsmoment M.	Tragkraft.
5. 	$A = B = \frac{P}{2}$ $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$ $M_{max} = \frac{Pl}{8}$	$P = 8\frac{k_b W}{l}$
6. 	$A = B = P$ Für AB: $M = Pc$	$P = \frac{k_b W}{c}$
7. 	$B = P$ $M = \frac{Px^2}{2l}$ $M_{max} = \frac{Pl}{2}$	$P = 2\frac{k_b W}{l}$
8. 	$A = B = \frac{P}{2}$ $M = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ $M_{max} = \frac{Pl}{8}$	$P = 8\frac{k_b W}{l}$
9. 	$A = \frac{3}{8}P$, $B = \frac{5}{8}P$ $M = \frac{Px}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right)$ $M_{max} = \frac{Pl}{8}$ $M_C = \frac{9}{128}Pl$.	$P = 8\frac{k_b W}{l}$

Gleichung der elastischen Linie.	Durchbiegung f.	Bemerkungen.
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{16}\left[\frac{x^2}{l^2}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{192}$	Eingespannter Träger. Gef. Querschnitte bei A, B und C.
$y=f-\varrho+\sqrt{\varrho^2-x^2+l\left(x-\frac{l}{4}\right)}$ wobei: $\varrho=\frac{EJ}{Pc}=$ konstant. (Elastische Linie zwischen A u. B = Kreisbogen.)	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{8}\frac{c}{l}$	Gef. Querschnitt an einer beliebigen Stelle zwischen A und B.
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left[4\frac{x}{l}-\frac{x^4}{l^4}-3\right]$	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{8}$	Freiträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left[\frac{x}{l}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right]$	$f=\frac{P}{EJ}\frac{5l^3}{384}$	Frei aufliegender Träger. Gef. Querschnitt in der Mitte.
$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}\left[\frac{x}{l}-3\frac{x^3}{l^3}+2\frac{x^4}{l^4}\right]$	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{192}$	Gef. Querschnitt bei B. Stärkste Senkung bei $x=\frac{1}{16}l(1+\sqrt{33})$ $=0{,}4215\,l$. Wendepunkt bei $x=\frac{1}{2}l$.

Angriffsweise.	Stützendrücke A, B. Biegungsmoment M.	Tragkraft.
10. 	$A = B = \frac{P}{2}$ $M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_{max} = \frac{Pl}{12}$ $M_C = \frac{Pl}{24}$	$P = 12\,\frac{k_b W}{l}$
11. 	$B = P$ $M = \frac{P}{3}\,\frac{x^3}{l^2}$ $M_{max} = \frac{Pl}{3}$	$P = 3\,\frac{k_b W}{l}$
12. 	$A = \frac{1}{3}\,P,\; B = \frac{2}{3}\,P$ $M = \frac{P}{3}\,x\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_{max} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\,Pl$ $= 0{,}128\,Pl$	$P = \frac{9\sqrt{3}}{2}\,\frac{k_b W}{l}$ $= 7{,}794\,\frac{k_b W}{l}$
13. 	$A = B = \frac{P}{2}$ $M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3\,l^2}\right)$ $M_{max} = \frac{Pl}{12}$	$P = 12\,\frac{k_b W}{l}$
14. 	$A = B = \frac{P}{2}$ $M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_{max} = \frac{Pl}{6}$	$P = 6\,\frac{k_b W}{l}$

Gleichung der elastischen Linie.	Durchbiegung f.	Bemerkungen.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left[\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{384}$	Gef. Querschnitt bei A und B. Wendepunkt für $x = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ $= 0{,}2113\,l$. (Im Wendepunkt ist $M = 0$.)
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{15}$	Freiträger. Gef. Querschnitt bei B.
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{180}\left[7\frac{x}{l} - 10\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{x^5}{l^5}\right]$	Gröfste Durchbiegung für $x = l\sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}}$ $= 0{,}5193\,l$. $f = \frac{Pl^3}{EJ}\frac{2 + 5\sqrt{\frac{8}{15}}}{225}\sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}}$ $= 0{,}01304\,\frac{Pl^3}{EJ}$	Gef. Querschnitt für $x = \frac{1}{3}\,l\sqrt{3}$ $= 0{,}5774\,l$. *)
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left[\frac{3}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P \cdot 3\,l^3}{EJ\;320}$	Gef. Querschnitt in der Mitte
$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left[\frac{5}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2x^5}{5\,l^5}\right]$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{60}$	Gef. Querschnitt in der Mitte.

*) Da M_{max} und f für Fall 11 („Dreieckslast") mit den entsprechenden Werten für Fall 8 (gleichmäfsig verteilte Last) fast genau übereinstimmen, so können hierbei meist die „Dreieckslast" sowie alle „Trapezlasten" als gleichmäfsig verteilt angesehen werden. Die Stützendrücke hingegen weichen bis um $\frac{1}{6}$ der Gesamtlast von Fall 8 ab.

Angriffsweise.	Stützendrücke A, B.	Gröſstes Biegungsmoment M_{max}.
15. 	(Trapez-Belastung.) $A = B = \frac{P}{2}$	$W k_b =$ $\frac{8a^2 + 3b(4a + b)}{24(a + b)} P.$
16. 	$A = \frac{P(2c + b)}{2l}$ $B = \frac{P(2a + b)}{2l}$	$W k_b = A\left(a + \frac{bA}{2P}\right).$
17. 	$A = \frac{P(2l - a) + P_1 a_1}{2l}$ $B = \frac{P_1(2l - a_1) + Pa}{2l}$	Für $A < P$: $W k_b = \frac{A^2 a}{2P}.$ Für $B < P_1$: $W k_b = \frac{B^2 a_1}{2 P_1}.$ Für $P = P_1$ und $a = a_1$: $W k_b = \frac{1}{2} P a.$
18. 	$A = B = \frac{P}{2}$	$M_x = \frac{Px}{2}\left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{c}{x}\right).$ Das relativ kleinste M_{max} (gröſste Tragkraft) tritt ein, wenn $c =$ $\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) l = 0{,}207\, l$; alsdann ist $W k_b = \frac{Pl}{47}.$ Gefährl. Querschnitte alsdann in A, B, C.

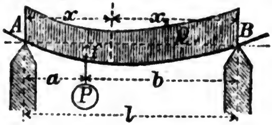
b. Zusammengesetzte Biegungsbeanspruchungen.

Ist der Träger durch mehrere der unter **a.** aufgeführten Belastungsarten in Anspruch genommen, so addieren sich die Biegungsmomente sowie die Ordinaten der elastischen Linien, und aus den Summen sind die Werte von M_{max} und f_{max} nebst den zugehörigen Werten von x zu ermitteln.

Hauptfälle.

1. Fall 3) und 8) zugleich. (Abbild. 200.) Es sei:

Abbild. 200.



$$a < b.$$

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2};$$

$$B = P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

α) $\frac{P}{Q} < \frac{b-a}{2a}$:

$$Wk_b = \left(P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2Q}.$$

β) $\frac{P}{Q} > \frac{b-a}{2a}$:

$$Wk_b = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{l}.$$

Abstand des gefährlichen Querschnittes von B:

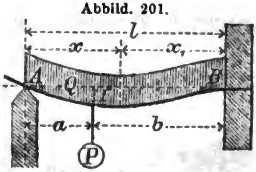
α) $x_1 = \frac{P}{Q}a + \frac{l}{2}$ | β) $x_1 = b.$

Durchbiegung im Angriffspunkte von P:

$$f = \left(P + \frac{l^2 + ab}{8ab}Q\right)\frac{a^2b^2}{3EJl}.$$

2. Fall 9) und verallgem. Fall 4) zugleich. (Abbild. 201.)

Abbild. 201.



$$A = P\frac{b^2(3a+2b)}{2l^3} + \frac{3}{8}Q.$$

$$B = P\frac{(2a^2 + 6ab + 3b^2)a}{2l^3} + \frac{5}{8}Q;$$

$$Wk_b = P\frac{ab(2a+b)}{2l^2} + Q\frac{l}{8},$$

wenn $x < a$;

$$Wk_b = P\frac{ab^2(3a+2b)}{2l^3} + Q\frac{(3b-a)a}{8l}, \text{ wenn } x_1 < b.$$

Von beiden Formeln ist diejenige zu benutzen, welche die gröfseren Abmessungen liefert.

Durchbiegung im Angriffspunkte der Einzellast P, bestimmt durch die Gleichung:

$$EJf = P\frac{a^2 b^3 (4a + 3b)}{12 l^3} + Q\frac{a b^2 (3a + b)}{48 l}.$$

Ferner ist: $$x = \frac{P}{Q}\frac{b^2 (3a + 2b)}{2 l^2} + \frac{3}{8} l < a,$$

wenn: $$\frac{P}{Q} < \frac{l^2 (5a - 3b)}{4 b^2 (3a + 2b)};$$

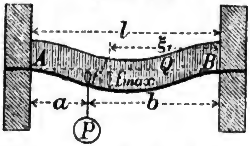
und: $$x_1 = \frac{P}{Q}\frac{(2a^2 + 6ab + 3b^2)\,a}{2 l^2} + \frac{5}{8} l < b,$$

wenn: $$\frac{P}{Q} < \frac{l^2 (3b - 5a)}{4a (2a^2 + 6ab + 3b^2)}.$$

3. Fall 10) und verallgem. Fall 5) zugleich. (Abbild. 202).

$a < b.$

Abbild. 202.



$$A = P\frac{(3a + b) b^2}{l^3} + \frac{Q}{2};$$

$$B = P\frac{(a + 3b) a^2}{l^3} + \frac{Q}{2};$$

$$Wk = P\frac{a b^2}{l^2} + \frac{Ql}{12}.$$

Gefährlicher Querschnitt in A.

Durchbiegung im Angriffspunkte von P:

$$f = \frac{1}{EJ}\left(P\frac{a^3 b^3}{3 l^3} + Q\frac{a^2 b^2}{24 l}\right).$$

Für $Q = 0$ ist die **gröfste Durchbiegung:**

$$f_{\max} = \frac{P}{EJ}\frac{2 a^2 b^3}{3 (a + 3b)^2};$$

sie findet im Abstande ξ_1 von B statt, so dafs:

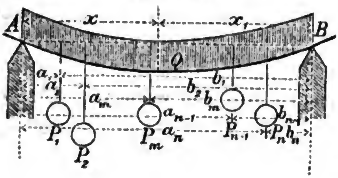
$$\xi_1 = \frac{2b}{a + 3b} l,$$

wogegen die **Durchbiegung im Angriffspunkte** von P nur beträgt:

$$f = \frac{P}{EJ}\frac{a^3 b^3}{3 l^3}.$$

4. Fall 3) mehrfach, aufserdem Fall 8). (Abbild. 203).

Abbild. 203.



$$A = \Sigma\left(\frac{Pb}{l}\right) + \frac{Q}{2};$$

$$B = \Sigma\left(\frac{Pa}{l}\right) + \frac{Q}{2}.$$

Ist

$$\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_{m-1} < A;$$

und gleichzeitig:

$$\sum_1^m P + \frac{Q}{l} a_m > B,$$

so liegt der **gefährliche Querschnitt** entweder zwischen P_{m-1} und P_m, oder in einer dieser Linien selbst; sein Abstand von A ist bestimmt durch die Formel:

$$x = \frac{A - \sum_1^{m-1} P}{Q} l.$$

Wird $x < a_{m-1}$, so liegt der gefährliche Querschnitt in P_{m-1}; ergiebt sich $x > a_m$, so liegt er in P_m.

$$Wk_b = \sum_1^{m-1} Pa + \frac{Q}{2l} x^2, \text{ wenn } a_{m-1} < x < a_m;$$

$$Wk_b = \sum_1^{m-1} Pa + \frac{Q}{l} a_{m-1} \left(x - \frac{a_{m-1}}{2}\right), \text{ wenn } x \overline{\lessgtr} a_{m-1};$$

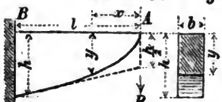
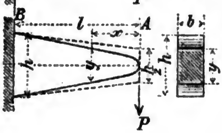
$$Wk_b = \sum_1^{m-1} Pa + \frac{Q}{l} a_m \left(x - \frac{a_m}{2}\right), \text{ wenn } x \overline{\gtrless} a_m.$$

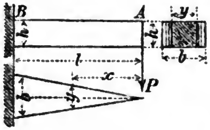
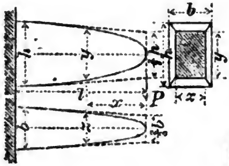
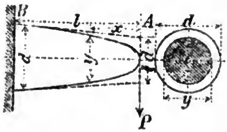
Wird $Q = 0$, so fällt der gefährliche Querschnitt in den Angriffspunkt einer der Einzellasten P.

d. Träger von gleicher Widerstandsfähigkeit gegen Biegung.

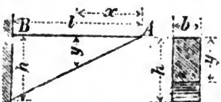
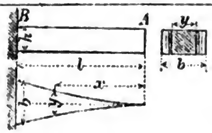
Sind die gröfsten Werte der Spannung σ ($k_b = M_b : W$) in jedem Querschnitte gleich, so nennt man den Träger von gleicher Widerstandsfähigkeit. Für solche Träger sind im folgenden einige Formen angegeben. — Die punktierten Linien des Längenprofils geben dessen durch Tangenten **angenäherte Form** an.

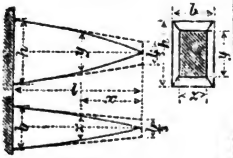
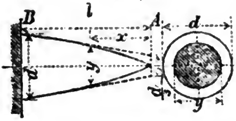
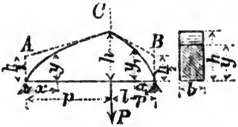
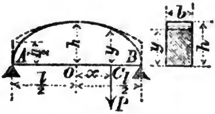
In den Fällen 5., 9., 10. und 11. kann, ähnlich wie in 1. die x-Achse auch als Symmetrieachse des Längenprofils angenommen werden.

Längenprofil und Querschnitt des Trägers.	Querschnitte.	Begrenzung des Längenprofils.	Formeln zur Berechnung der Querschnitts-Abmessungen.
Die Last P greift am Ende des Trägers an.			
1a). 	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	1 a). Obere Begrenzung: Gerade; untere Begrenzung: Gemeine Parabel.	$y^2 = \frac{6P}{bk_b} x.$ $h = \sqrt{\frac{6Pl}{bk_b}}$
1b). 		1 b). Gemeine Parabel.	

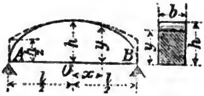
Längenprofil und Querschnitt des Trägers.	Querschnitte.	Begrenzung des Längenprofils.	Formeln zur Berechnung der Querschnitts-Abmessungen.
2. 	Rechtecke von gleicher Höhe h und veränderlicher Breite y.	Gerade Linie.	$y = \frac{6\,P}{h^2 k_b}\,x.$ $b = \frac{6\,Pl}{h^2 k_b}.$
3 	Aehnliche Rechtecke von der Höhe y und der Breite z; Verhältnis der Seiten: $z : y = \alpha$.	Kubische Parabel.	$y^3 = \frac{6\,P}{\alpha k_b}\,x.$ $z^3 = \frac{6\,\alpha^2 P}{k_b}\,x.$ $h = \sqrt[3]{\frac{6\,Pl}{\alpha k_b}}.$ $b = \sqrt[3]{\frac{6\,\alpha^2 Pl}{k_b}}.$
4. 	Kreise vom Durchmesser y.	Kubische Parabel.	$y^3 = \frac{32\,P}{\pi k_b}\,x.$ $d = \sqrt[3]{\frac{32\,Pl}{\pi k_b}}.$

Last Q gleichmäfsig über den Träger verteilt.

5. 	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Gerade Linie.	$y = \sqrt{\frac{3\,Q}{k_b b l}}\,x.$ $h = \sqrt{\frac{3\,Ql}{k_b b}}.$
6. 	Rechtecke von gleicher Höhe h und veränderlicher Breite y.	Gemeine Parabel.	$y = \frac{3\,Q}{l k_b}\,\frac{x^2}{h^2}.$ $b = \frac{3\,Ql}{k_b h^2}.$

Längenprofil und Querschnitt des Trägers.	Querschnitte.	Begrenzung des Längenprofils.	Formeln zur Berechnung der Querschnitts-Abmessungen.
7.*) 	Aehnliche Rechtecke von der Höhe y und der Breite z; Verhältnis der Seiten: $z : y = \alpha$.	Semi-kubische Parabel.	$y^3 = \frac{3Q}{\alpha k_b} \frac{x^2}{l}$. $z = \frac{3\alpha^2 Q}{k_b} \frac{x^2}{l}$. $h = \sqrt[3]{\frac{3Ql}{\alpha k_b}}$. $b = \sqrt[3]{\frac{3\alpha^2 Ql}{k_b}}$.
8.*) 	Kreise vom Durchmesser y.	Semi-kubische Parabel.	$y^3 = \frac{16Q}{\pi l k_b} x^2$. $d = \sqrt[3]{\frac{16Ql}{\pi k_b}}$.
Die Last P wirkt in C.			
9. 	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Zwei gemeine Parabeln.	$y^2 = \frac{6P(l-p)}{b k_b l} x$. $y_1^2 = \frac{6Pp}{b k_b l} x_1$. $h = \sqrt{\frac{6P(l-p)p}{b k_b l}}$.
Lage des Angriffspunktes C der Last P veränderlich.			
10. 	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Ellipse.	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{3Pl}{2bk_b}} = 1$. $h = \sqrt{\frac{3Pl}{2bk_b}}$.

*) Die Scheitel der semikubischen Parabeln sind nicht als Spitzen, sondern abgerundet zu denken.

Längenprofil und Querschnitt des Trägers.	Querschnitte.	Begrenzung des Längenprofils.	Formeln zur Berechnung der Querschnitts-Abmessungen.
Last Q gleichförmig über den Träger verteilt.			
11. 	Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y.	Obere Begrenzung: Ellipse.	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{3Ql}{4k_b b}} = 1.$ $h = \sqrt{\frac{3Ql}{4bk_b}}.$

e. Träger auf mehreren Stützen.

(Durchlaufende Träger.)

Der an den Enden unterstützte oder befestigte Träger ruhe aufserdem noch auf einer Anzahl von Stützen.

1. Bestimmung der Momente über den Stützpunkten.

Bedeutet (Abbild. 204):

M_0, M_1, M_2 das Moment über der Stütze 0, bezw. 1, 2,

y die Höhe der Stützpunkte über einer beliebigen Wagerechten, so ist:

$$1)\quad 6EJ\left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) = M_0 l_0 + 2M_1(l_0 + l_1) + M_2 l_1$$
$$+ \frac{\Sigma P a_0 (l_0^2 - a_0^2)}{l_0} + \frac{\Sigma P a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \tfrac{1}{4}(q_0 l_0^3 + q_1 l_1^3).$$

Für einen Träger, welcher nur durch gleichmäfsig auf den einzelnen Strecken verteilte Lasten beansprucht wird, erhält man die

Clapeyronsche Gleichung:

$$2)\quad \ldots\ldots\quad 6EJ\left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right)$$
$$= M_0 l_0 + 2M_1(l_0 + l_1) + M_2 l_1 + \tfrac{1}{4}(q_0 l_0^3 + q_1 l_1^3).$$

Sind n Felder, also $n + 1$ Stützen vorhanden, so lassen sich $n - 1$ Gleichungen von der Form 1) bezw. 2) aufstellen, und es können dann aus diesen und den beiden Gleichungen, welche die

Befestigungen der Enden des Trägers kennzeichnen (z. B. $M_0 = M_n = 0$ u. s. w.), die $n + 1$ Momente über den $n + 1$ Stützen berechnet werden.

2. Bestimmung der Stützendrücke.

In folgendem mögen bedeuten:

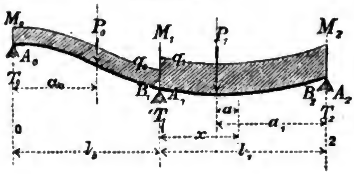
$B_1, B_2 \dots . B_n$ die auf der linken Seite unmittelbar am linken Stützpunkte wirkenden, also von den jedesmaligen linken Feldern herrührenden Gegendrücke der Stützen,

$A_0, A_1 \dots A_{n-1}$ die Stützendrücke, welche von den jedesmaligen rechten Feldern herrühren,

$T_0, T_1 \dots T_n$ die Gesamt-Stützendrücke, so dafs also:

$T_0 = A_0$,
$T_1 = A_1 + B_1$,
. . . .
$T_n = B_n$ ist.

Abbild. 204.



Das **Moment** an irgend einer Stelle in der Entfernung x von der Stütze 1 ist:

$$M = M_1 - \frac{q_1 x^2}{2} - \sum_0^x P_1 a + A_1 x,$$

und für $x = l_1$:

$$M_2 = M_1 - \frac{q_1 l_1^2}{2} - \Sigma P_1 a_1 + A_1 l_1,$$

hieraus:

$$A_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} + \frac{q_1 l_1}{2} + \frac{\Sigma P_1 a_1}{l_1}.$$

Ebenso erhält man:

$$B_1 = \frac{M_0 - M_1}{l_0} + \frac{q_0 l_0}{2} + \frac{\Sigma P_0 a_0}{l_0},$$

mithin den **Gesamt-Stützendruck:**

$$T_1 = \frac{q_0 l_0 + q_1 l_1}{2} - M_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0}\right) + \frac{M_2}{l_1} + \frac{M_0}{l_0} + \frac{\Sigma P_1 a_1}{l_1} + \frac{\Sigma P_0 a_0}{l_0}.$$

In folgender Tafel sind die Ergebnisse für Träger zusammengestellt, welche auf drei bis neun **gleich hohen und gleich wei von einander entfernten Stützen** ruhen und nur durch gleichmäfsig verteilte Lasten beansprucht sind.

	Anzahl der Stützen.							Einheit.
	3	4	5	6	7	8	9	
M_1	0,1250	0,1000	0,1071	0,1053	0,1058	0,1056	0,1057	ql^2
M_2	—	—	0,0714	0,0789	0,0769	0,0775	0,0773	„
M_3	—	—	—	—	0,0865	0,0845	0,0850	„
M_4	—	—	—	—	—	—	0,0825	„
T_0	0,3750	0,4000	0,3929	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	ql
T_1	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	1,1327	1,1337	1,1340	„
T_2	—	—	0,9286	0,9736	0,9616	0,9649	0,9640	„
T_3	—	—	—	—	1,0192	1,0070	1,0103	„
T_4	—	—	—	—	—	—	0,9948	„
$M_{1\,max}$	0,0703	0,0800	0,0772	0,0779	0,0777	0,0778	0,0777	ql^2
$M_{2\,max}$	—	0,0250	0,0364	0,0332	0,0340	0,0338	0,0339	„
$M_{3\,max}$	—	—	—	0,0461	0,0433	0,0440	0,0438	„
$M_{4\,max}$	—	—	—	—	—	0,0405	0,0412	„
x_1	0,375	0,4000	0,3930	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	l
x_2	—	0,5000	0,5357	0,5264	0,5327	0,5281	0,5283	„
x_3	—	—	—	0,5000	0,4904	0,4930	0,4923	„
x_4	—	—	—	—	—	0,5000	0,5026	„
ξ_1	0,750	0,8000	0,7860	0,7894	0,7884	0,7887	0,7887	„
ξ_2	—	0,2760	0,2659	0,2680	0,2675	0,2680	0,2680	„
	—	0,7240	0,8055	0,7830	0,7899	0,7884	0,7890	„
ξ_3	—	—	—	0,1964	0,1960	0,1962	0,1960	„
	—	—	—	0,8036	0,7850	0,7897	0,7880	„
ξ_4	—	—	—	—	—	0,2153	0,2150	„
	—	—	—	—	—	0,7847	0,7900	„

Hierbei bezeichnen:

M_1. M_2 . . . . die Momente über den Stützen,
$M_{1\,max}$, $M_{2\,max}$ . . . . die Maximalmomente in den einzelnen Feldern,
T_0, T_1 . . . . die Gegendrücke der Stützen,
x_1, x_2 . . . . die Entfernungen der Momente $M_{1\,max}$ . . . . von den zunächst nach links liegenden Stützen,
ξ_1, ξ_2 . . . . die Entfernungen der Wendepunkte der elastischen Linien von diesen Stützen,
l die Länge der einzelnen Felder,
q die Belastung f. d. Längeneinheit.

Da alles in bezug auf die Mitte des Trägers symmetrisch ist, sind die Angaben nur bis zur Mitte durchgeführt.

Legt man bei einem Träger, welcher mit q kg f. d. lfd. m gleichmäſsig belastet ist und durch drei (gleich hohe) Stützen getragen wird, die **Mittelstütze tiefer,** als die beiden Auſsenstützen, u. zw. um das Maſs:

$$f = 0{,}0131 \frac{q l^4}{EJ},$$

so wird dadurch seine Tragfähigkeit auf das beinahe $1\frac{1}{4}$-fache erhöht.

Ueber die Berechnung durchlaufender Träger mit **veränderlicher Belastung** vergl. Abteil. II, Abschnitt „Statik der Baukonstruktionen“.

V. KNICKFESTIGKEIT.

1. Es bezeichne:

l die Länge eines auf Zerknicken beanspruchten Stabes, in cm,
J das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment seines Querschnitts, in cm^4,
E den Elasticitätsmodul des Materials, in kg f. d. qcm;

alsdann ist nach Euler je nach der Befestigungsweise der Stabenden

die Knickbelastung P (in kg),

wenn:

Abbild. 205.

1) ein Ende eingespannt, das andere frei:



$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}$$

Abbild. 206.

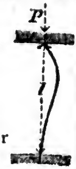
2) beide Enden frei und in der ursprüngl. Achse geführt:



$$P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Abbild. 207.

3) ein Ende eingespannt, das andere frei in der Achse geführt:



$$P = 2\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Abbild. 208.

4) beide Enden eingespannt:



$$P = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Nach Versuchen von Bauschinger*) ist dieser Wert P diejenige Grenzbelastung, bei welcher die bereits von vornherein vorhandene, bei allmählich wachsender Belastung des Stabes allmählich wachsende Durchbiegung fast plötzlich jeden meſsbaren Wert überschreitet.

2. Ist die **Bruchbelastung des Stabes für Druck**

$$P_0 = KF,$$

wobei K die Druckfestigkeit in kg f. d. qcm, F den Querschnitt in qcm bezeichnet, geringer als die Knickbelastung P, so ist statt letzterer erstere maſsgebend.

---

*) Vergl. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 353 u. f.

Diejenige Stablänge l, bei welcher die Rechnung für Zerdrücken und Zerknicken gleiche Ergebnisse liefert, erhält man, wenn man

$$P_0 = P$$

setzt, entsprechend den vier Fällen der Befestigung. Hieraus ergiebt sich:

Der Stab ist auf **Druckfestigkeit** zu berechnen, wenn:

für die Befestigung:	beim Kreisquerschnitt $\frac{l}{d}$ (d der Durchmesser) kleiner, als:	beim Rechteckquerschnitt $\frac{l}{b}$ (b die kleinere Seite) kleiner, als:	und dabei das Material:
Abbild. 205	5	$5\frac{3}{4}$	Gufseisen.
	12	14	Schweifseisen.
	6	8	Holz.
Abbild. 206	10	$11\frac{1}{2}$	Gufseisen.
	24	28	Schweifseisen.
	$11\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	Holz.
Abbild. 207	14	16	Gufseisen.
	33	38	Schweifseisen.
	16	19	Holz.
Abbild. 208	20	23	Gufseisen.
	48	56	Schweifseisen.
	23	27	Holz.

3. Zulässige Belastung.

Für Knickfestigkeit:

$$P_1 = \frac{P}{\mathfrak{S}};$$

für Druckfestigkeit:

$$P_1 = kF,$$

wo $\mathfrak{S}$ den Sicherheitsgrad gegen Knicken (durch welchen die Ausbiegung des Stabes auf ein gewisses Mafs eingeschränkt wird), k die zulässige Druckspannung in kg f. d. qcm bedeutet.

$\mathfrak{S}$ ist zweckmäfsig so zu wählen, wie bei Druckfestigkeit.

$$(\mathfrak{S} = K : k),$$

da in diesem Falle die Tafel unter **2.** auch hier anwendbar ist.

Wenn $\mathfrak{S}$ anders gewählt wird, so ist in jedem einzelnen Falle bei Anwendung der Eulerschen Formeln zu untersuchen, ob die zulässige Druckbeanspruchung k des Querschnittes nicht überschritten ist.*)

Für den meist anzuwendenden **Befestigungsfall 2** (Abbild. 206) ergeben sich folgende Formeln für Baukonstruktionen:

*) Vergl. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 354.

	Sicherheitsgrad $\mathfrak{S}$.	Elasticitätsmodul E. kg f. d. qcm.	Erforderliches kleinstes äquat. Trägheitsmoment J des Querschnittes bei einer Belastung P_1 kg. cm⁴	Erforderlicher Querschnitt nach Vorschrift der Berliner Bau-Polizei. qcm
Gufseisen . .	6—8 *)	1 000 000	$J = \frac{6\,P_1 l^2}{1000}$ bis $\frac{8\,P_1 l^2}{1000}$.	$F = \frac{P_1}{500}$.
Schweifs- und Flufseisen .	5	2 000 000	$J = \frac{P_1 l^2}{400}$.	$F = \frac{P_1}{750}$. **)
Guter Flufsstahl	4	2 150 000	$J = \frac{P_1 l^2}{540}$.	$\left(F = \frac{P_1}{1250}\right)$
Holz	10	100 000	$J = \frac{P_1 l^2}{10}$.	$F = \frac{P_1}{60}$.

Die Stablänge l ist hierbei in **Meter** auszudrücken.

Tafel der Werte von J für quadratischen, rechteckigen, kreisförmigen und kreisringförmigen Querschnitt s. S. 325 u. 326.

Ueber die Werte von $\mathfrak{S}$ bei Maschinenteilen s. Fünfter Abschnitt, Kolbenstangen und Kurbelstangen.

4. Die Anwendung der Eulerschen Formeln ist, mit Ausnahme kurzer Längen l, wobei die Druckfestigkeit mafsgebend ist (vergl. unter **2.**), stets zulässig und zweckmäfsig. Die teils empirischen Formeln von Rankine, Schwarz, Lang, Schäffer u. A., welche die Ermittlung der zulässigen Belastung unter Zugrundelegung eines bestimmten gröfsten Kantendruckes, entsprechend einer bestimmten excentrischen Belastung und Durchbiegung, durchführen (vergl. unter VII. A.), sind nach Versuchen von Bauschinger und theoretischen Untersuchungen von Zimmermann ***) wissenschaftlich nicht gerechtfertigt.

Es sei hier nur angeführt, da sie noch vielfach angewandt wird, die Formel von **Rankine** und **Schwarz**.

Mit den früheren Bezeichnungen ist hiernach die zulässige Belastung eines an beiden Enden frei aufstehenden Stabes (Abbild. 206):

$$P_1 = \frac{Fk}{1 + \alpha\, l^2 \frac{F}{J}} = \frac{Fk}{1 + \alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2}.$$

Dabei ist $r = \sqrt{J:F}$ der Trägheitsarm des Querschnittes und α

*) Die Berliner Bau-Polizei verlangt für gufseiserne Säulen $\mathfrak{S} = 8$ bei genau centraler Belastung (gleicher Felderweite). Ist letztere nicht vorhanden, so ist $\mathfrak{S} = 12$ (bei Holz $\mathfrak{S} = 15$) anzunehmen und gleichzeitig der Querschnitt höchstens mit 330 (bei Holz mit 40) kg f. d. qcm zu belasten. — Debo (Die Festigkeit d. Baumaterialien, Hannover 1891) verlangt stets $\mathfrak{S} = 10$ bis 12 bei Gufseisen.

**) Krohn, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891 S. 1121 empfiehlt für basisches Martineisen (mit $K = 3700$ bis 4400 kg f. d. qcm) zu wählen $\mathfrak{S} = 5$ und $k = 875$ kg f. d. qcm.

***) S. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 245, 353.

ein Koefficient, welcher, ebene Querschnittsenden vorausgesetzt, im Mittel gewählt werden kann:*)

für Gufseisen	$\alpha = 0{,}00016$,
„ Schweifseisen	$\alpha = 0{,}00008$,
„ Stahl (weich)	$\alpha = 0{,}00004$,
„ „ (hart)	$\alpha = 0{,}00006$,
„ Holz	$\alpha = 0{,}00015$.

1) Nach Schäffer**) ist (für Befestigungsfall 2):

$$\alpha = \frac{\mathfrak{S} k}{\pi^2 E}.$$

Werte für $\mathfrak{S}$, E und k s. S. 349. Für die Befestigungsfälle 1), 3) und 4) ist α bezw. $\frac{1}{4}$-, 2- und 4-mal so grofs.

2) Nach Versuchen von Tetmajer ist α abhängig von $\frac{l}{r}$ u. zw. kann man setzen***)

$$\text{für Schweifseisen: } \alpha = 0{,}0001 \sqrt{0{,}00867 \frac{l}{r} - 0{,}6936},$$

$$\text{für Holz: } \alpha = 0{,}0001 \sqrt{0{,}05 \frac{l}{r} - 0{,}80}.$$

VI. DREHUNGSFESTIGKEIT.

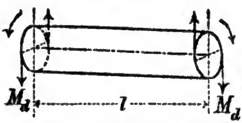
Im folgenden bezeichne:

M_d das Moment des drehenden Kräftepaares in cmkg,

G den Schubelasticitätsmodul (s. S. 308),

$J_p = J_1 + J_2$ das polare Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf die Schwerachse, gleich der Summe zweier äquatorialer Trägheitsmomente bezogen auf beliebige, rechtwinklige Schwerachsen. (Erklärung s. S. 169),

Abbild. 209.



k_d die zulässige Spannung für Verdrehung in kg f. d. qcm,

l die Länge des auf Verdrehung beanspruchten Körpers, in cm,

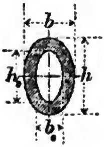
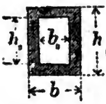
ψ den Drehungswinkel für die Länge l.

*) Ausführlichere, meist ältere Versuchsergebnisse s. Handb. d. Baukde. I, S. 601 Nach Krohn, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, S. 1122 ist für Schweifseisen zu setzen $\alpha = 0{,}0000435$ (bei $k = 700$), für Flufseisen $\alpha = 0{,}0000769$ (bei $k = 875$).

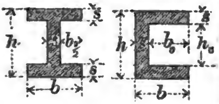
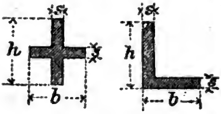
**) S. Deutsche Bauztg. 1877, S. 499.

***) S. Schweizerische Bauztg. 1887, Bd. 10, Nr. 16.

a. Zulässige Beanspruchung.

Querschnitt.		Zulässiges Drehungsmoment. cmkg	Drehungsfestigkeit bei Gußeisen.*)
	Kreis:	$M_d = \frac{\pi}{16} d^3 k_d$	reichlich Zugfestigkeit.
	Kreisring:	$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} k_d$	0,8 Zugfestigkeit.[2])
	Ellipse:[1])	$M_d = \frac{\pi}{16} b^2 h k_d$	1 bis 1,25 Zugfestigkeit.[3])
	Hohlellipse:	$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d$	0,8 bis 1 Zugfestigkeit.[3])
	Rechteck:[1])	$M_d = \frac{2}{9} b^2 h k_d$	1,4 bis 1,6 Zugfestigkeit.[3])
	Quadrat:	$M_d = \frac{2}{9} h^3 k_d$	
	$\left(\text{für } \frac{h}{h_0} = \frac{b}{b_0}\right)$	$M_d = \frac{2}{9} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d$	1 bis 1,25 Zugfestigkeit.[3])

*) Nach Bach, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1889, S. 137 u.

Querschnitt.	Zulässiges Drehungsmoment. cmkg	Drehungsfestigkeit bei Gufseisen. *)
	$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + 2 b_0) k_d$	1,4 bis 1,6 Zugfestigkeit.[3])
	$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + b - s)$	1,4 bis 1,6 Zugfestigkeit.[3])

[1]) Die gröfste Schubspannung ergiebt sich in den Endpunkten der kleinen Achse bezw. in den Mittelpunkten der grofsen Seiten. In den Endpunkten der grofsen Achse beträgt bei dem Ellipsenquerschnitt die Spannung:

$$\tau_1 = \frac{M_d}{\frac{1}{16} \pi b h^2},$$

beim Rechteckquerschnitt die Spannung in den Mitten der kleinen Seiten:

$$\tau_1 = \frac{M_d}{\frac{2}{9} b h^2}.$$

[2]) Der Koefficient hängt ab von dem Verhältnis $d : D$. In dem Mafse, in welchem sich dieses der Null nähert, steigt er bis reichlich 1. Der Wert gilt für $d : D \sim 0{,}7$.

[3]) Es sind um so geringere, der kleineren Zahl näher kommende Werte zu wählen, je mehr sich die Ellipse dem Kreise, das Rechteck dem Quadrate nähert.

Die vorstehenden besonderen Angaben über Drehungsfestigkeit des Gufseisens sind nötig, namentlich infolge der Veränderlichkeit des Elasticitätsmodul. Vergl. S. 316, **2.,** 2 u. 3.

Der Faktor von k_d in den obigen Gleichungen für M_d heifst das **Widerstandsmoment gegen Drehung** und wird mit W_d bezeichnet. Für kreisförmige und kreisähnliche Querschnitte ist (ähnlich, wie für Biegungsfestigkeit, vergl. S. 316):

$$W_d = \frac{J_p}{e},$$

*) Nach Bach, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1889, S. 137 u. f.

wo $J_p = J_1 + J_2$ das polare Trägheitsmoment des Querschnittes, e den Abstand des am weitesten von der (neutralen) Längs-Schwerachse des Stabes entfernten Querschnittspunktes bezeichnet.

Für eckige Querschnittsformen ist dieser Satz **nicht** zutreffend.

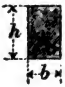
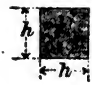
b. Drehungswinkel.

Der Drehungswinkel, d. h. der zum Halbmesser 1 gehörige Verdrehungsbogen in der Entfernung l von der Drehachse ist:

$$\psi = \alpha \frac{M_d}{\frac{4 J_1 J_2}{J_1 + J_2} G} l = \alpha \frac{M_d}{\frac{4 J_1 J_2}{J_p} G} l.$$

Hierin ist:

$\alpha = 1$ für kreisförmige und kreisringförmige Querschnitte,
$\alpha = 1{,}2$ für quadratische und elliptische Querschnitte,
$\alpha = 1{,}2$ bis $1{,}5$ für mehr längliche, rechteckige Querschnitte.

Querschnitt.	Drehungswinkel ψ, wenn bekannt: Drehmoment M_d in cmkg.	Schubspannung τ in kg f. d. qcm.
 Kreis:	$\psi = \frac{M_d l}{G J_p} = \frac{32}{\pi d^4} \frac{M_d}{G} l$	$\psi = 2 \frac{\tau}{G} \frac{l}{d}$.
 Kreisring:	$\psi = \frac{M_d l}{G J_p} = \frac{32}{\pi (D^4 - d^4)} \frac{M_d}{G} l$	$\psi = 2 \frac{\tau}{G} \frac{l}{D}$.
 Ellipse:	$\psi = \frac{16}{\pi} \alpha \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G} l$	$\psi = \alpha \frac{\tau}{G} \frac{b^2 + h^2}{h^2} \frac{l}{b}$.
 Rechteck:	$\psi = 3 \alpha \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G} l$	$\psi = \frac{2}{3} \alpha \frac{\tau}{G} \frac{b^2 + h^2}{h^2} \frac{l}{b}$.
 Quadrat:	$\psi = 6 \alpha \frac{1}{h^4} \frac{M_d}{G} l$	$\psi = \frac{4}{3} \alpha \frac{\tau}{G} \frac{l}{h}$.

VII. ZUSAMMENGESETZTE FESTIGKEIT.

Im folgenden bedeute:

E den Elasticitätsmodul (s. S. 304),
P die den Stab auf Zug oder Druck beanspruchende Kraft (Achsialkraft),
Q die den Stab auf Abscheren beanspruchende Kraft (Querkraft),
M das biegende Moment,
F den Querschnitt des Stabes,
l die Länge des Stabes,
m das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung (hier $= 4$ gesetzt).

A. Beanspruchung durch Normalspannungen.

Zug oder Druck und Biegung.

a. Allgemeines.

Das Moment M und die Kraft P lassen sich auf eine Kraft P zurückführen, die in einem Punkte A (im Abstande $p = M : P$ vom Schwerpunkte) angreift.

1. Die **neutrale Achse** ist eine Parallele zur Polare des Angriffspunktes A, bezogen auf die Centralellipse in gleichem Abstande auf der entgegengesetzten Seite vom Schwerpunkte, die sogen. **Gegenpolare** des Angriffspunktes bezogen auf die Centralellipse.*)

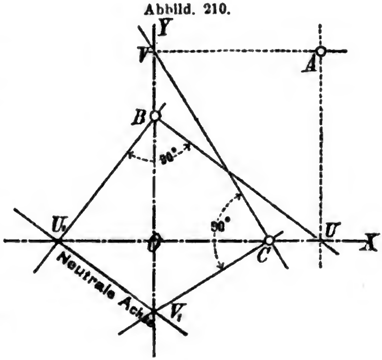
2. Bestimmung der neutralen Achse für den Angriffspunkt A nach Mohr ohne Benutzung der Centralellipse: Auf den Hauptachsen des Querschnittes OX und OY (Abbild. 210) trage man die Strecken OC und OB gleich den Haupt-Trägheitshalbmessern a und b (entsprechend den Haupt-Trägheitsmomenten J_x bezw. J_y) ab, verbinde C mit dem Fufspunkte V des von A auf OY, B mit

*) Die Polare des Punktes A wird ermittelt, indem man durch A nach der Ellipse beliebige Strahlen zieht, welche diese in je zwei Punkten schneiden. Je zwei der Strahlen bestimmen durch ihre Schnittpunkte mit der Ellipse die Ecken eines Vierseits. Die Schnittpunkte der beiden anderen Seiten aller dieser Vierseite, sowie die Schnittpunkte ihrer Diagonalen liegen auf einer Geraden, der Polare des Punktes A.

dem Fufspunkte U des von A auf OX gefällten Lotes, errichte in B und C Lote auf BU bezw. CV und bestimme die Schnittpunkte U_1 und V_1 dieser Lote mit OX bezw. OY.

Die Linie $U_1 V_1$ ergiebt die neutrale Achse.

Abbild. 210.

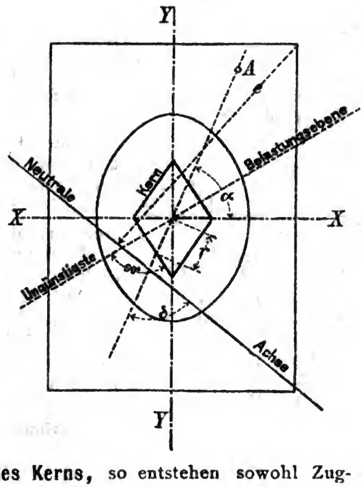


Die Umkehrung dieser Konstruktion liefert zu einer gegebenen neutralen Achse den entsprechenden Angriffspunkt A.

3. Umhüllt die neutrale Achse den Querschnitt, so dafs sie stets seinen Umrifs berührt, so beschreibt der entsprechende Angriffspunkt der Kraft den Umfang einer Fläche, welche man **Kern des Querschnittes** nennt.

Bei der **Bestimmung des Kerns** für einen gegebenen Querschnitt suche man, wie oben angegeben, für alle Lagen der Tangente den entsprechenden Angriffspunkt. Setzt sich der Umfang der Fläche aus geraden Linien zusammen, so bestimme man die den Eckpunkten entsprechenden neutralen Achsen in der obigen Weise; diese umhüllen den Kern.

Abbild. 211.



So lange der **Angriffspunkt innerhalb des Kerns** bleibt, liegt die neutrale Achse aufserhalb des Querschnittes und in diesem treten nur Spannungen von gleichem Vorzeichen auf.

Befindet sich der **Angriffspunkt aufserhalb des Kerns,** so entstehen sowohl Zug- als Druckspannungen.

4. Die Gröfse der **Spannung in der zur neutralen Achse parallelen Schwerachse** ist unabhängig von der Lage des Angriffspunktes (also auch von der Gröfse des Momentes M):

$$\sigma_s = \frac{P}{F}.$$

5. Die **gröfste Spannung** ergiebt sich in dem von der neutralen Achse entferntesten, nach der Seite des Angriffspunktes gelegenen Punkte des Querschnittes und beträgt:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M \sin \delta}{J} e,$$

oder:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M \sin \alpha}{J_x} y + \frac{M \cos \alpha}{J_y} x.$$

(Die Bedeutung von J_x, J_y, x, y s. S. 319, die der übrigen Gröfsen Abbild. 211 a. v. S.).

Bestimmt man den Schnittpunkt der Verbindungslinie von Schwerpunkt und Angriffspunkt mit der Kernbegrenzung und bezeichnet den Abstand dieses Schnittpunktes von dem Schwerpunkte — die Kernweite — mit r, so ergiebt sich die Spannung:

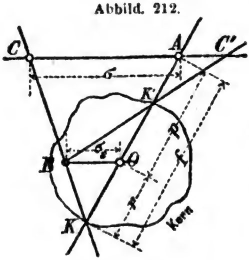
$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{Fr},$$

oder:

$$\sigma = \frac{P}{F} \frac{f}{r} = \sigma_s \frac{f}{r},$$

wenn man die Entfernung des Angriffspunktes von dem entsprechenden Kernpunkte K mit f bezeichnet.

Abbild. 212.



Unter Benutzung dieser Gleichung kann man die gröfste Spannung σ aus der Spannung in der neutralen Faser σ_s durch Zeichnung in folgender Weise ermitteln, ohne die neutrale Achse und die Entfernung e des äufsersten Punktes zu bestimmen.

Auf einer beliebigen durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden (Abbild. 212) trage man $OB = \sigma_s$ ab und verbinde B mit dem Schnittpunkte K der Angriffslinie AO und des Kerns. Eine Parallele zu OB durch A schneidet die Verbindungslinie in C; dann ist:

$$\sigma = AC.$$

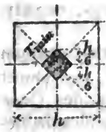
σ wird ein Maximum, wenn r den kleinsten Wert annimmt. Die vom Schwerpunkt auf die Kernbegrenzung gefällte Senkrechte

(welche dem kürzesten Abstande entspricht), also die geringste Kern weite, bestimmt daher die ungünstigste Belastungsebene. (S. S. 320.

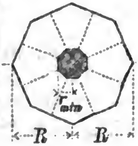
Die auf obigem Wege erhaltene Druckverteilung auf den Querschnitt setzt voraus, dafs dieser Zugspannungen übertragen kann. Gröfsere Sicherheit gewährt bei gedrücktem Mauerwerk (namentlich aus Werksteinen) die ungünstigere Annahme, dafs die Fugen klaffen können und daher Zug durch den Mörtel nicht übertragen wird. Die hierbei vorhandene Druckverteilung kann unter der Voraussetzung ermittelt werden, dafs die Spannungen proportional sind den Entfernungen der Flächenelemente von der spannungslosen **Nulllinie**, welche den gedrückten von dem überhaupt unwirksamen Querschnittsteile trennt.

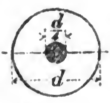
6. Kern und geringste Kernweite r_{min} einiger Querschnitte.

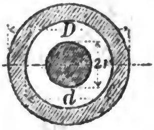
Abbild. 213. Abbild. 214. Abbild. 215. Abbild. 216. Abbild. 217.











Quadrat (Abbild. 213). $r_{min} = \frac{h}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}1178\, h$.

Rechteck (Abbild. 214). $r_{min} = \frac{b\,h}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$.

Achteck (Abbild. 215). $r_{min} = 0{,}2256\, R$.

Kreis (Abbild. 216). $r = \frac{d}{8} =$ konstant.

Hohles Quadrat (äufsere Seite $= H$, innere Seite $= h$). Kern ein Quadrat, ähnlich wie in Abbild. 213.

$$r_{min} = \frac{H}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{h}{H}\right)^2\right] = 0{,}1178\, H \left[1 + \left(\frac{h}{H}\right)^2\right].$$

Hohles Achteck. (Halbmesser der umschriebenen Kreise $= R_a$ und R_i, Wandstärke $= 0{,}924\,(R_a - R_i)$). Kern ein Achteck, ähnlich wie in Abbild. 215.

$$r_{min} = 0{,}2256\, R_a \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^2\right].$$

Kreisring (Abbild. 217). $r = \frac{D}{8}\left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] =$ konstant.

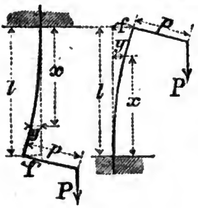
b. Besondere Fälle.

Wenn die Belastungsebene mit einer Hauptachse des Quer schnittes zusammenfällt, so genügen folgende einfache Formeln.

1. Excentrischer Zug und Druck.

α) Bei **kurzen Stäben**, oder wenn die Excentricität p der Belastung P (Abbild. 218 u. 219) gegenüber den Querschnitts-Abmessungen gering ist, sind die gröfsten bezw. geringsten Spannungen des Querschnittes:

Abbild. 218. Abbild. 219.



$$k = \frac{P}{F} \pm \frac{Pp}{W} = k_m\left(1 \pm \frac{pF}{W}\right);$$

$$k_1 = \frac{P}{F} \mp \frac{Pp}{W_1} = k_m\left(1 \mp \frac{pF}{W_1}\right).$$

Die oberen Zeichen gelten für Zug-, die unteren für Druckbelastung; dabei bedeuten positive Werte von k und k_1 Zug-, negative Druckspannungen.

k_m $(= P : F)$ ist die mittlere Spannung des Querschnittes, F bedeutet den Querschnitt, W und W_1 sind die Widerstandsmomente des Querschnittes für die k und k_1 entsprechenden Lagen der äufsersten Faser.

Bei excentrischem Druck wird die Zugspannung k gleich Null, oder geht in Druckspannung über, wenn:

$$1 - \frac{pF}{W} \geqq 0 \quad \text{oder} \quad p \leqq \frac{W}{F}.$$

Die Innehaltung dieses Grenzwertes ist erforderlich bei Materialien, welche keine oder nur geringe Zugbeanspruchung vertragen.

Für den **rechteckigen** Querschnitt bh werden die Kantenpressungen:

$$k = k_m\left(1 \mp \frac{6p}{h}\right);$$

die Bedingung dafür, dafs der Querschnitt nur Druckspannungen erhält, ist also:

$$p \leqq \tfrac{1}{6} h,$$

d. h. **die Kraft mufs im mittleren Drittel der Querschnittsbreite angreifen.** (Vergl. S. 355.)

β) Bei **langen Stäben**, welche eine merkliche Ausbiegung durch die Last P erfahren, ist

	bei excentr. Zug:	bei excentr. Druck:
Gleichung der elastischen Linie.	$y = \frac{p}{\mathrm{Cof}\,\Omega l}(\mathrm{Cof}\,\Omega x - 1)$ *)	$y = \frac{p}{\cos \Omega l}(1 - \cos \Omega x)$.
Gröfste Ausbiegung.	$f = p\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Cof}\,\Omega l}\right)$.	$f = p\left(\frac{1}{\cos \Omega l} - 1\right)$.
Biegungsmoment.	$M_{max} = Pp$.	$M_{max} = \frac{Pp}{\cos \Omega l}$.
Gröfste Spannungen.	$k = k_m\left(1 \pm \frac{pF}{W}\right)$.	$k = k_m\left(1 \mp \frac{pF}{W \cos \Omega l}\right)$.

*) Bedeutung der Hyperbelfunktion Cof s. S. 58.

Die Konstante Ω hat den Wert:

$$\Omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

worin E den Elasticitätsmodul, J das der Biegungsachse entsprechende Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet.

Näherungsformeln ergeben sich, wenn man in obigen Formeln setzt:

$$\mathfrak{Cof}\,\Omega l = 1 + \frac{Pl^2}{2EJ}; \qquad \cos \Omega l = 1 - \frac{Pl^2}{2EJ}.$$

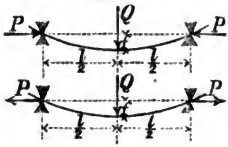
2. Wird das Biegungsmoment statt durch eine excentrisch angreifende Achsialkraft P durch eine am Stabende wirkende Querkraft Q erzeugt, so ist in den obigen Formeln für die gröfsten Querschnittsspannungen überall statt Pp der Wert Ql, statt p der Wert $\frac{Ql}{P}$ zu setzen, wobei nunmehr P die centrisch angreifende Zug- oder Druckkraft bedeutet. (Ω behält seinen Wert bei.)

3. In den beiden Belastungsfällen der Abbild. 220 gelten die Formeln unter **1.** α) und β), wenn man setzt:

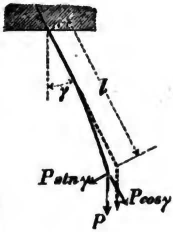
$$p = \frac{Ql}{4P},$$
$$Pp = \tfrac{1}{4} Q l,$$

und statt Ωl überall $\tfrac{1}{2}\,\Omega l$.

Abbild. 220.



Abbild. 221.



4. Der unter dem Winkel γ gegen die Lotrechte eingespannte Stab wird durch die lotrecht gerichtete Kraft P beansprucht (Abbild. 221).

Belastung durch die Achsialkraft $P\cos\gamma$ und durch die Querkraft $P\sin\gamma$ (vergl. unter **2.**).

Die gröfsten Querschnittsspannungen sind:

$$k = P\left[\frac{\cos\gamma}{F} \pm \frac{l\sin\gamma}{W}\right].$$

Entsprechende Formeln (unter Benutzung von **1.** β) und 2.) ergeben sich, wenn die Kraft P auf den Stab **drückt**.

B. Beanspruchung durch Normal- und Schubspannungen.

a. Allgemeines.

Bezeichnet:

σ die auf ein Flächenelement wirkende Normalspannung,
k_n die zulässige Normalspannung in kg f. d. qcm,

τ die auf dasselbe Flächenelement wirkende Schubspannung,
k_s die zulässige Schubspannung in kg f. d. qcm,

so gilt für die gröfste Anstrengung des Materials $E\varepsilon_{max}$ die Bedingung:

$$E\varepsilon_{max} = \frac{m-1}{2\,m}\,\sigma + \frac{m+1}{2\,m}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\alpha_0{}^2\tau^2} \leqq k_n;$$

mit $m = 4$:

$$E\varepsilon_{max} = \tfrac{3}{8}\,\sigma + \tfrac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\alpha_0{}^2\tau^2} \leqq k_n,$$

worin das Beanspruchungsverhältnis:

$$\alpha_0 = \frac{k_n}{\frac{m+1}{m}\,k_s} \text{ bezw.} = \frac{k_n}{\frac{5}{4}\,k_s}.$$

b. Zug oder Druck und Abscherung.

Die **Normalspannung** $\sigma = \pm \frac{P}{F}$ und die gröfste **Schubspannung** $\tau = \frac{Q}{F}$ $\left(\text{bezw. nach Grashof [s. S. 315] } \tau = \frac{c\,Q}{F}\right)$ ergeben die **gröfste Anstrengung des Materials:**

$$E\,\varepsilon_{max} = \frac{1}{F}\left(\frac{3}{8}\,P \pm \frac{5}{8}\sqrt{P^2 + 4\,\alpha_0{}^2\,Q^2}\right),$$

worin $\alpha_0 = \frac{k_z}{\frac{5}{4}\,k_s}$ bezw. $= \frac{k}{\frac{5}{4}\,k_s}$.

(vergl. S. 308 u. 309).

Soll das Material dieser Anstrengung widerstehen, so mufs sein:

$$E\,\varepsilon_{max} \leqq k_z \text{ bezw. } \leqq k.$$

c. Biegung und Drehung.

In einem gewissen Punkte des Querschnitts bedeute:

σ die Normalspannung, erzeugt durch das Biegungsmoment M_b,
τ die Schubspannung, erzeugt durch das Drehmoment M_d,
k_b die zulässige Biegungsspannung } in kg f. d. qcm,
k_d die zulässige Drehungsspannung }

so gilt mit $m = 4$:

$$E\,\varepsilon_{max} = \tfrac{3}{8}\,\sigma + \tfrac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\alpha_0{}^2\,\tau^2} \leqq k_b,$$

worin $\alpha_0 = \frac{k_b}{\frac{5}{4}\,k_d}$.

Abbild. 222. Abbild. 223.





1. Kreis- und Kreisringquerschnitt.

(Abbild. 222 u. 223.)

Bedeutet W das Widerstandsmoment

$$=\frac{\pi d^3}{32} \sim \frac{d^3}{10} \text{ bezw. } \frac{\pi}{32} D^3 \left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right] \sim \frac{D^3}{10}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right],$$

so bestimme man:

$$M_i = \tfrac{3}{8} M_b + \tfrac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_d)^2}$$

und daraus:

$$W = \frac{M_i}{k_b}.$$

2. Elliptischer Querschnitt.

(Abbild. 224.)

Abbild. 224.



Das Biegungsmoment M_b werde zerlegt in M_1 mit der Achse 1 und M_2 mit der Achse 2.

Es genügt alsdann, h und b aus den beiden Gleichungen zu ermitteln:

$$\frac{\pi}{32} b h^2 k_b \geqq M_i' = \frac{3}{8} M_1 + \frac{5}{8} \sqrt{M_1^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

$$\frac{\pi}{32} b^2 h k_b \geqq M_i'' = \frac{3}{8} M_2 + \frac{5}{8} \sqrt{M_2^2 + (\alpha_0 M_d)^2}.$$

Im allgemeinen findet sich die gröfste Anstrengung in einem Umfangspunkte zwischen 1 und 2.*)

Abbild. 225.



3. Rechteck-Querschnitt.

(Abbild. 225.)

M_1 und M_2 haben dieselbe Bedeutung wie oben, dann gilt hier:

$$\tfrac{1}{6} b h^2 k_b \geqq M_i' = \tfrac{3}{8} M_1 + \tfrac{5}{8} \sqrt{M_1^2 + (\tfrac{3}{2} \alpha_0 M_d)^2}$$

$$\tfrac{1}{6} b^2 h k_b \geqq M_i'' = \tfrac{3}{8} M_2 + \tfrac{5}{8} \sqrt{M_2^2 + (\tfrac{3}{2} \alpha_0 M_d)^2}.$$

Nachzurechnen ist, ob $\dfrac{M_1}{\frac{1}{6} b h^2} + \dfrac{M_2}{\frac{1}{6} b^2 h} \leqq k_b$.**)

4. Zur ziffernmäfsigen Rechnung empfiehlt sich die Benutzung folgender **Tafeln:**

---

*) Vergl. darüber Bach, Elasticität und Festigkeit, 1890, S. 257 u. f.

**) Ebendaselbst S. 259 u. f.

Tafel I.

$x_b =$ 0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55
$\xi_b = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1+x_b^2} =$ 1,003	1,007	1,012	1,019	1,028	1,037	1,048	1,060	1,074	1,088
$x_b =$ 0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	
$\xi_b = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1+x_b^2} =$ 1,104	1,120	1,138	1,156	1,175	1,195	1,216	1,237	1,259	

Tafel II.

$\frac{1}{x_b} =$ 0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\xi_d = 0{,}6\,\frac{1}{x_b} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{x_b}\right)^2} =$ 1,065	1,101	1,140	1,181	1,224	1,269	1,317	1,367	1,418
$\frac{1}{x_b} =$ 0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	1,00
$\xi_d = 0{,}6\,\frac{1}{x_b} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{x_b}\right)^2} =$ 1,471	1,526	1,583	1,641	1,700	1,761	1,822	1,885	2,014

Bezeichnet W das Widerstandsmoment gegen Biegung (s. S. 316), W_d dasselbe gegen Drehung (s. S. 352), so ergiebt sich W oder W_d wie folgt:

Bestimme
$$x_b = \frac{2\,\alpha_0\,\tau}{\sigma} = \frac{\alpha_0\,M_d}{M_b} \text{ für Kreis und Ellipse,}$$
$$= \frac{3}{2}\,\frac{\alpha_0\,M_d}{M_b} \text{ für Rechteck;}$$

entnehme, falls $x_b < 1$, das zugehörige ξ_b der Tafel I. und suche:

$$W = \frac{M_b\,\xi_b}{k_b}.$$

Für $x_b > 1$ bestimme $\frac{1}{x_b}$, entnehme das zugehörige ξ_d der Tafel II. und suche:

$$W_d = \frac{M_d\,\xi_d}{k_d}.$$

VIII. FESTIGKEIT DER GEFÄSSWANDUNGEN UND PLATTENFÖRMIGEN KÖRPER.

(Bei Benutzung sämtlicher Gleichungen ist die Schlufsbemerkung zu beachten.)

a. Hohlkugel.

Es bezeichne:

r_i den inneren Halbmesser in cm,

r_a den äufseren Halbmesser in cm,

k_z die zulässige Zugspannung des Materials in kg f. d. qcm,

k die zulässige Druckspannung des Materials in kg f. d. qcm,

m das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung $= \frac{10}{3}$.

α) **Innerer Ueberdruck** p_i kg f. d. qcm.

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2\,m\,k_z + 2\,(m-2)\,p_i}{2\,m\,k_z - (m+1)\,p_i}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k_z + 0{,}4\,p_i}{k_z - 0{,}65\,p_i}}.$$

Die gröfste Zuganstrengung findet sich an der Innenfläche in **tangentialer** Richtung.

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{m\,k - (m-2)\,p_i}{m\,k - (m+1)\,p_i}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k - 0{,}4\,p_i}{k - 1{,}3\,p_i}}.$$

Die gröfste Druckanstrengung ergiebt sich an der Innenfläche in **radialer** Richtung.

Nach Mafsgabe dieser Gleichungen sind nur solche Verhältnisse möglich, für welche

$$p_i < \frac{k_z}{0{,}65} \text{ bezw. } p_i < \frac{k}{1{,}3}.$$

Für (im Verhältnis zum Halbmesser) **geringe Wandstärken** $s = r_a - r_i$ ist die Beziehung

$$s = \frac{1}{2}\, r_i \frac{p_i}{k_z}$$

genügend genau. Wenn die Hohlkugel durch Vernietung hergestellt wurde, so ist die Verminderung des Querschnittes

$$\pi\,(r_a^2 - r_i^2) \sim 2\,\pi\,r_i\,s$$

durch die Nietlöcher von diesem abzuziehen. Bei n Nieten vom Durchmesser d folgt aus

$$\pi r_i^2 p_i = (2\pi r_i s - n d s) k_z:$$

$$s = \frac{\pi r_i^2}{2\pi r_i - n d} \frac{p_i}{k_z}.$$

β) **Aeufserer Ueberdruck** p_a kg f. d. qcm.

Vorausgesetzt, dafs ein Einknicken der Wandungen nicht zu befürchten, ist:

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2mk}{2mk - 3(m-1)p_a}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k}{k - 1{,}05\, p_a}}.$$

Für verhältnismäfsig **geringe Wandstärken** (vergl. α) unter derselben Voraussetzung:

$$s = \frac{1}{2} r_a \frac{p_a}{k} \text{ bezw. } s = \frac{\pi r_a^2}{2\pi r_a - n d} \frac{p_a}{k}.$$

b. Hohlcylinder.*)

α) **Innerer Ueberdruck** p_i kg f. d. qcm.

Bezeichnungen wie unter **a**.

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{m k_z + (m-2) p_i}{m k_z - (m+1) p_i}} = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0{,}4\, p_i}{k_z - 1{,}3\, p_i}},$$

wobei die gröfste Anstrengung an der Innenfläche in **tangentialer** Richtung eintritt. Nur solche Verhältnisse sind möglich, für welche

$$p_i < \frac{k_z}{1{,}3}.$$

Für $\frac{p_i}{k_z}$ =	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75
ist $\frac{r_a}{r_i}$ =	1,045	1,093	1,147	1,208	1,355	1,555	1,85	2,37	2,85	3,77	7,21

Für **geringe Wandstärken** $s = r_a - r_i$ gilt:

$$s = r_i \frac{p_i}{k_z}.$$

Wenn der Querschnitt durch Nietlöcher oder dergl. verschwächt wird, ist s in dem Mafse gröfser zu nehmen, wie es die verhältnismäfsige Verschwächung verlangt.

*) Nach Bach, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1880, S. 283 u. f.

β) **Aeufserer Ueberdruck** p_a kg f. d. qcm.

Vorausgesetzt, dafs ein Einknicken der Wandung nicht zu erwarten steht, ist:

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{mk}{mk-(2m-1)p_a}} = r_i \sqrt{\frac{k}{k-1{,}7\,p_a}}.$$

Für **geringe Wandstärken** unter gleicher Voraussetzung:

$$s = r_a \frac{p_a}{k}.$$

(Vergl. das unter α) Gesagte).

Berechnung der Wandstärke der Dampfkessel-Flammrohre nach den Hamburger Normen 1891 s. Achter Abschnitt, Kraftmaschinen unter Dampfkessel.*)

c. Ebene Platten.

Es bezeichne:

h die Dicke der Platte, f ihre Durchbiegung in der Mitte,

k_b die zulässige Biegungsspannung des Materials,

E den Elasticitätsmodul,

φ und ψ Koefficienten, welche von Grashof**) für die beiden Grenzfälle:

a) Platte liegt am Umfange lose, also unabgedichtet auf,

b) Platte ist am Umfange unwandelbar eingespannt,

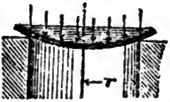
auf theoretischem Wege entwickelt worden sind,

nach Versuchen von Bach***) aber aufser von der Befestigungsweise der Platte am Umfange noch abhängen von der Gröfse der Kraft, mit welcher die Platte zum Zwecke der Abdichtung gegenüber der Druckflüssigkeit angeprefst wird, von der Art der Abdichtung, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Platte da, wo diese das Dichtungsmaterial berührt, und da, wo sie sich mit ihrer anderen Seite gegen die Auflagerstelle stützt u. s. w.

Bei den Versuchen von Bach wurde die gleichmäfsige Belastung der Platte durch Flüssigkeitsdruck herbeigeführt, es fand also Abdichtung statt. Demnach sind in solchen Fällen je nach der Befestigungsweise am Umfange u. s. w. von Bach stets zwei Werte angegeben, innerhalb deren der Koefficient schwankt, je nachdem sich die Auflagerung am Umfange mehr dem Zustande des Eingespanntseins oder demjenigen des Freiaufliegens nähert.

1. Kreisförmige Platte, am Umfange frei aufliegend und mit p kg f. d. qcm belastet. (Abbild. 226.)

Abbild. 226.



$$k_b = \varphi \frac{r^2}{h^2} p;$$

$$f = \psi \frac{r^4}{h^3} \frac{p}{E}.$$

*) Die Grundlage dieser Berechnung findet sich in Bach, Maschinenelemente, II. Aufl. S. 147 u. f.

**) S. Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit. Berlin 1878.

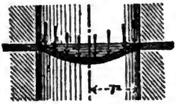
***) S. Bach, Elasticität und Festigkeit. Berlin 1889/90. § 58 bis 61. Derselbe, Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten, Berlin 1891, auch Zeitschr. d. V. d. Ing. 1890, S. 1041 u. f.

Nach Grashof ist:

$$\varphi = 0{,}87, \qquad \psi = 0{,}7.$$

2. Kreisförmige Platte, am Rande fest eingeklemmt, sonst wie unter 1. (Abbild. 227.)

Abbild. 227.



Formeln wie unter **1.**

Nach Grashof:

$$\varphi = 0{,}68, \qquad \psi = 0{,}17.$$

Nach Bach (vergl. oben) ist für die zwischen Fall **1.** und **2.** gelegene Belastung durch Flüssigkeitsdruck:

$$\varphi = 1{,}2 \text{ bis } 0{,}8, \qquad \psi = 0{,}6 \text{ bis } 0{,}17.$$

3. Kreisförmige Platte, am Rande frei aufliegend, in der Mitte durch die Kraft P belastet. (Abbild. 228.)

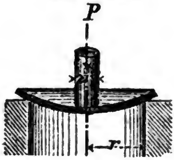
Nach Grashof:

$$k_b = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{3}\ln\frac{r_0}{r} + 1\right)\frac{P}{h^2};$$

Nach Bach:

$$k_b = \frac{3}{\pi}\,\varphi\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{r_0}{r}\right)\frac{P}{h^2};$$

Abbild. 228.



$$f = \psi\,\frac{r^2}{h^3}\,\frac{P}{E}.$$

Dabei ist nach Grashof:

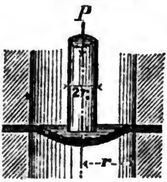
$$\psi = \frac{5}{3\pi} = 0{,}53.$$

Nach Bach:

$$\varphi = 1{,}5, \qquad \psi = 0{,}4 \text{ bis } 0{,}5.$$

4. Kreisförmige Platte, am Rande fest eingeklemmt, sonst wie unter 3. (Abbild. 229.)

Abbild. 229.



Nach Grashof:

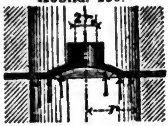
$$k_b = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\ln\frac{r}{r_0}\cdot\frac{P}{h^2}.$$

$$f = \psi\,\frac{r^2}{h^3}\,\frac{P}{E}.$$

$$\psi = \frac{3}{2\pi} = 0{,}48.$$

5. Kreisringförmige Scheibe mit dem äufseren Halbmesser r und dem inneren r_0 ist am äufseren Rande fest, am inneren in einer achsial frei beweglichen Hülse eingeklemmt und nur durch den Druck p kg f. d. qcm belastet. (Abbild. 230.)

Abbild. 230.

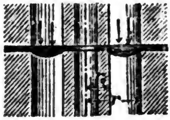


Nach Grashof ist für:

$\frac{r_0}{r} =$	0,1	0,2	0,4
$k_b =$	1,942	1,781	$1{,}263 \cdot \frac{1}{3} \frac{r^2}{h^2} p.$

6. Kreisringförmige Scheibe ist am äußeren und inneren Rande fest eingeklemmt und durch den Druck p kg f. d. qcm belastet. (Abbild. 231).

Abbild. 231.

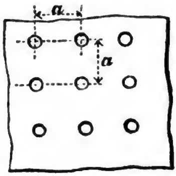


Nach Grashof ist für:

$\frac{r_0}{r} =$	0,3	0,4	0,5
$k_b =$	0,4557	0,3043	$0{,}1976 \cdot \frac{2}{3} \frac{r^2}{h^2} p.$

7. Die Platte ist in Punkten gehalten, welche sie in quadratische Felder von der Seite a teilen, und durch den Druck p kg f. qcm belastet. (Abbild. 232.)

Abbild. 232.



$$k_b = \frac{2}{9} \frac{a^2}{h^2} p; \qquad f = \frac{1}{36} \frac{a^4}{h^3} \frac{p}{E}.$$

8. Rechteckige Platte, an den vier Seiten, deren Längen a und b sind ($a > b$), fest eingeklemmt und durch den Druck p kg f. d. qcm belastet.

Nach Grashof ist:

$$k_b = \frac{1}{2} \frac{a^4 b^2}{a^4 + b^4} \frac{p}{h^2}; \qquad f = \frac{1}{32} \frac{a^4 b^4}{(a^4 + b^4) h^3} \frac{p}{E};$$

für die quadratische Platte mit $b = a$:

$$k_b = \frac{1}{4} \frac{a^2}{h^2} p; \quad f = \frac{1}{64} \frac{a^4}{h^3} \frac{p}{E}.$$

9. Rechteckige Platte, wie unter 8., jedoch am Umfange aufliegend und durch den Flüssigkeitsdruck p kg f. d. qcm belastet.

Nach Bach ist bei Abdichtung am Umfange (s. S. 365):

$$k_b = \tfrac{1}{2} \varphi \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{p}{h^2},$$

für $b = a$ (quadratische Platte):

$$k_b = \tfrac{1}{4} \varphi \frac{a^2}{h^2} p.$$

$$\varphi = 0{,}75 \text{ bis } 1{,}13.$$

10. Rechteckige Platte, wie unter 8., jedoch frei aufliegend, und nur in der Mitte durch die Kraft P belastet.

Nach Bach ist:

$$k_b = 1{,}5\,\varphi \frac{ab}{a^2 + b^2} \frac{P}{h^2};$$

$$\varphi = 1{,}75 \text{ bis } 2.$$

Schlufsbemerkung.

Ebene, aus genügend zähem Material bestehende Platten, welche sich unter Einwirkung der Belastung durchgebogen haben, besitzen in diesem gewölbten Zustande eine gröfsere Widerstandsfähigkeit als in ihrer ursprünglichen ebenen Form.

Erfährt das Gefäfs oder die Platte Abnutzung z. B. durch Abrosten u. s. w., so ist die berechnete Wandstärke um einen der Abnutzung entsprechenden Betrag zu vergröfsern. Verlangen Rücksichten auf Herstellung, Transport u. s. w. eine gröfsere Wandstärke, als die vorstehenden Gleichungen geliefert haben, so sind naturgemäfs diese Rücksichten bestimmend.

IX. FESTIGKEIT DER FEDERN.

Allgemeine Bemerkungen.

Es bedeute:

P die Belastung der Feder in kg,
f die Durchbiegung, entsprechend der Belastung P bezw. der Spannung k_b oder k_d, in cm,
l die Länge in cm,
n die Anzahl der Windungen,
V das Volumen der Feder in ccm,
k_b die zulässige Spannung für Biegung in kg f. d. qcm,
k_d desgl. für Drehung in kg f. d. qcm,
E und G s. S. 308.

Die übrigen Bezeichnungen sind aus den Abbildungen zu entnehmen.

Die **mechanische Arbeit** in cmkg, welche von einer Feder bei ihrer Durchbiegung von Null bis f aufgenommen wird, ist:

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{c} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Hierin bedeutet c eine Konstante, die nur von der Form der Feder abhängt; sie giebt das Verhältnis der Volumen (des Materialverbrauchs) bei verschiedenen Federn gleichen Materials an,

welche bei gleicher, mechanischer Arbeit eine gleiche Beanspruchung erfahren.

Federn gleicher Gestalt und gleichen Materials haben bei gleicher Beanspruchung gleiches Gewicht.

A. Biegungsfedern.

a. Gerade Biegungsfedern.

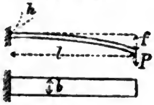
1. **Rechteckfeder** (Abbild. 233).

$$P = \frac{1}{6}\frac{bh^2}{l}k_b.$$

$$f = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EJ} = 4\frac{l^3}{bh^3}\frac{P}{E} = \frac{2}{3}\frac{l^2}{h}\frac{k_b}{E}.$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{18}\frac{k_b^2}{E}V.$$

Abbild. 233.



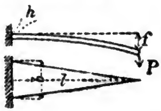
2. **Dreieckfeder** (Abbild. 234).

$$P = \frac{1}{6}\frac{bh^2}{l}k_b.$$

$$f = \frac{1}{2}\frac{Pl^3}{EJ} = 6\frac{l^3}{bh^3}\frac{P}{E} = \frac{l^2}{h}\frac{k_b}{E}.$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6}\frac{k_b^2}{E}V.$$

Abbild. 234.



Träger gleicher Biegungsfestigkeit.*)

Elastische Linie ein Kreisbogen.**)

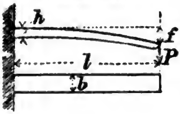
3. **Rechteckfeder nach der kubischen Parabel zugeschärft** (Abbild. 235).

$$P = \frac{1}{6}\frac{bh^2}{l}k_b.$$

$$f = \frac{1}{2}\frac{Pl^3}{EJ} = 6\frac{l^3}{bh^3}\frac{P}{E} = \frac{l^2}{h}\frac{k_b}{E}.$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{9}\frac{k_b^2}{E}V.$$

Abbild. 235.



Elastische Linie ein Kreisbogen.**)

*) Vergl. S. 341. $\frac{1}{\sigma} = \frac{W}{M_b} = \text{konst.}$

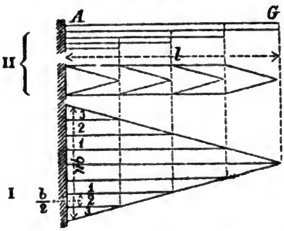
**) Vergl. S. 319. $\frac{\varrho}{E} = \frac{J}{M_b} = \text{konst.}$

b. Zusammengesetzte Biegungsfedern.

Legt man mehrere der oben genannten Blattfedern auf einander, so erhält man ein Blattfederwerk. Hauptbedingungen für ein gutes Federwerk sind:

1) dafs es möglichst einen Körper von gleicher Widerstandsfähigkeit gegen Biegung bilde,
2) dafs es bei der Biegung nicht klaffe, d. h. dafs sich die Blätter nicht von einander entfernen; die elastische Linie mufs daher ein Kreisbogen sein.

Abbild. 236.



Von diesen Bedingungen erfüllt, wie aus a. S. 369 hervorgeht, nur das erste der folgenden Federwerke beide, die anderen nur die letztere vollständig.

1. Geschichtete Dreieckfeder.

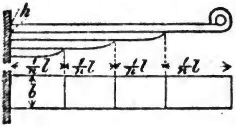
Wenn man die Dreieckfeder (Abbild. 236 I) in eine gerade Anzahl ($2n$) gleich breiter Streifen zerschnitten denkt und diese so zusammenfügt, dafs sie den Körper Abbild. 236 II bilden, so erhält man in diesem die Gestalt eines zweckmäfsigen Blattfederwerks, welches dieselbe Tragfähigkeit hat, wie die Dreieckfeder von der Breite nb, wobei n die Anzahl der Blätter; es ist also:

$$P = n\,\frac{bh^2}{6}\,\frac{k_b}{l}; \qquad n = \frac{Pl}{\frac{1}{6}\,bh^2 k_b}.$$

$$\left(\text{Tafel für } \frac{bh^2}{6} \text{ s. S. 328.}\right)$$

2. Geschichtete Rechteckfeder nach der kubischen Parabel zugeschärft.

Abbild. 237.



Statt die Enden der einzelnen Federn dreieckig zu machen, schärft man sie nach der kubischen Parabel zu, wobei sie dann überall gleiche Breite haben (Abbild. 237).

3. Trapezfeder mit Zuschärfung.

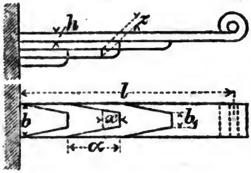
Die Federlagen sind trapezförmig. Dabei mufs aufserdem eine Zuschärfung eintreten, die sich aus folgender Formel ergiebt:

$$z = h \sqrt[3]{\frac{x}{x + \frac{b_1}{b}(a - x)}}.$$

Bedeutung der Buchstaben s. Abbild. 238.

4. In der Regel sind zwei Federwerke von einer der betrachteten Formen durch den Federbund vereinigt und erhalten von vornherein eine **kreisförmige Krümmung** mit dem Pfeil p_0.

Abbild. 238.



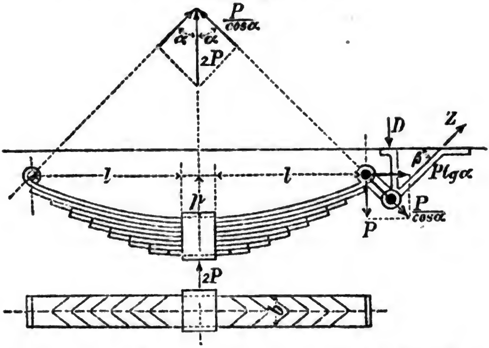
Durch die am Federbund angreifende Belastung $2P$ verringert sich der Pfeil p_0 auf p, so dafs

$$p_0 - p = f$$

die Durchbiegung des Federwerkes ist.

Bei den Federn der Eisenbahnwagen (Abbild. 239, preufs. Normalfeder für Güterwagen) zerlegt sich die in den geneigten Gehängen vorhandene Zugkraft $\frac{P}{\cos\alpha}$ im Federauge in die lotrechte Kraft P und die wagerechte Kraft $P \operatorname{tg} \alpha$, welche zusammen ein Biegungsmoment $= P(l + p \operatorname{tg} \alpha)$ hervorrufen. Da auch für

Abbild. 239.



gekrümmte Federn die unter a. angegebenen Gleichungen anwendbar sind, so ist mit den Bezeichnungen von S. 368:

die Tragkraft:

$$P = n \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l + p \operatorname{tg} \alpha},$$

die Durchbiegung:

$$f = 6 \frac{l^3}{n b h^3} \frac{P(l + p \operatorname{tg} \alpha)}{E} = \frac{l^2}{h} \frac{k_b}{E}.$$

Für p kann hierin angenähert p_0 gesetzt werden (genau: $p = p_0 - f$).

Die oberste Federlage hat aufser der Biegungsspannung k_b die Zugkraft $P \operatorname{tg} \alpha$, sowie die Querkraft P auszuhalten.

Federbock. Druck im lotrechten Teil:

$$D = P(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta);$$

Zug im schrägen Teil:

$$Z = \frac{P \operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}.$$

Zulässige Biegungsspannung k_b für Federstahl $k_b = 6000$ bis 8000, im Mitte 6500 kg f. d. qcm. Stambke empfiehlt $k_b = 5500$ bis 5800 kg f. d. qcm.

c. Gewundene Biegungsfedern.

1. Gewundene Feder (Spiralfeder) mit rechteckigem Querschnitt. (Abbild. 240.)

Abbild. 240.



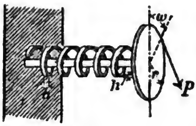
$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{r}.$$

$$f = r\omega = \frac{P l r^2}{E J} = 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{r l}{h} \frac{k_b}{E}.$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} V.$$

2. Gewundene Feder mit rechteckigem Querschnitt. (Abbild. 241.)

Abbild. 241.



$$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{r}.$$

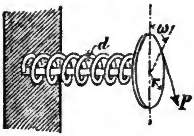
$$f = r\omega = \frac{P l r^2}{E J} = 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{r l}{h} \frac{k_b}{E}.$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{6} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Tafel für $\frac{b h^3}{12}$ und $\frac{b h^2}{6}$ s. S. 327 u. f.

3. Gewundene Feder mit rundem Querschnitt. (Abbild. 242.)

Abbild. 242.



$$P = \frac{\pi d^3}{32} \frac{k_b}{r}.$$

$$f = r\omega = \frac{P l r^2}{E J} = \frac{64}{\pi} \frac{P l r^2}{E d^4} = 2 \frac{r l}{d} \frac{k_b}{E}.$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{8} \frac{k_b^2}{E} V.$$

Tafel für $\frac{\pi d^4}{64}$ und $\frac{\pi d^3}{32}$ s. S. 325.

B. Torsionsfedern.

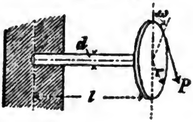
Bezeichnungen s. S. 368.

Es ist zu setzen:
$\alpha = 1{,}2$ für quadratische Querschnitte,
$\alpha = 1{,}2$ bis $1{,}5$ für mehr längliche, rechteckige Querschnitte.
ξ bedeutet $b : h$.

a. Gerade Torsionsfedern.

1. Einfache Torsionsfeder mit kreisförmigem Querschnitt. (Abbild. 243.)

Abbild. 243.



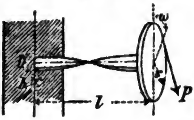
$$P = \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{r} k_d = 0{,}196 \frac{d^3}{r} k_d.$$

$$f = r\omega = \frac{32 r^2 l}{\pi d^4} \frac{P}{G} = 2 \frac{r l}{d} \frac{k_d}{G}.$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{4} \frac{k_d^2}{G} V.$$

2. Einfache Torsionsfeder mit rechteckigem Querschnitt. (Abbild. 244.)

Abbild. 244.



$$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r} k_d.$$

$$f = r\omega = \alpha \cdot 3 r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$$

$$= \alpha \cdot \frac{2}{3} r l \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{k_d}{G}.$$

$$A = \frac{P f}{2} = \alpha \cdot \frac{2}{27} (\xi^2 + 1) \frac{k_d^2}{G} V.$$

(Für das Quadrat $[\xi = 1]$ ist A am gröfsten.)

b. Gewundene Torsionsfedern.

1. Cylindrische Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitt. (Abbild. 245.)

Abbild. 245.



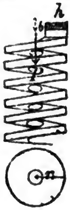
$$P = \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{r} k_d = 0{,}196 \frac{d^3}{r} k_d.$$

$$f = \frac{64 n r^3}{d^4} \frac{P}{G} = \frac{4 \pi n r^2}{d} \frac{k_d}{G}.$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{1}{4} \frac{k_d^2}{G} V.$$

2. Cylindrische Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitt. (Abbild. 246.)

Abbild. 246.



$$P = \frac{2}{9}\,\frac{b^2 h}{r}\,k_d.$$

$$f = \alpha \cdot 6\,\pi\,n\,r^3\,\frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}\,\frac{P}{G}$$

$$= \alpha \cdot \frac{4}{3}\,\pi\,n\,r^2\,\frac{b^2 + h^2}{b h^2}\,\frac{k_d}{G}.$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \alpha \cdot \frac{2}{27}\,(\xi^2 + 1)\,\frac{k_d^2}{G}\,V.$$

(Für das Quadrat [$\xi = 1$] ist A am gröfsten.)

3. Kegelfeder mit kreisförmigem Querschnitt. (Abbild. 247.)

Abbild. 247.



$$P = \frac{\pi}{16}\,\frac{d^3}{r}\,k_d = 0{,}196\,\frac{d^3}{r}\,k_d.$$

$$f = \frac{16}{\pi}\,\frac{r^2 l}{d^4}\,\frac{P}{G} = \frac{r l}{d}\,\frac{k_d}{G}.$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{8}\,\frac{k_d^2}{G}\,V.$$

4. Kegelfeder mit rechteckigem Querschnitt. (Abbild. 248.)

Abbild. 248.



$$P = \frac{2}{9}\,\frac{b^2 h}{r}\,k_d.$$

$$f = \alpha \cdot \frac{3}{2}\,\frac{r^2\,l\,(b^2 + h^2)}{b^3 h^3}\,\frac{P}{G}$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{3}\,\frac{r\,l\,(b^2 + h^2)}{b h^2}\,\frac{k_d}{G}.$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \alpha \cdot \frac{1}{27}\,(\xi^2 + 1)\,\frac{k_d^2}{G}\,V.$$

FÜNFTER ABSCHNITT.

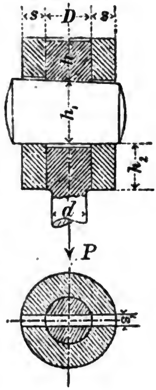
MASCHINENTEILE.*)

I. HÜLFSMITTEL ZUR VERBINDUNG VON MASCHINENTEILEN.

A. Keile.

a. Für ruhende Belastung.

Abbild. 249.



Es sind bestimmt (Abbild. 249)

der Durchmesser d durch: $P = k_z \frac{\pi d^2}{4}$,

„ „ D „ : $P = k'_z \left(\frac{\pi D^2}{4} - s_1 D\right)$,

sofern

k_z die zulässige Spannung im Querschnitte $\frac{\pi d^2}{4}$,

k'_z „ „ „ „ „ $\frac{\pi D^2}{4} - s_1 D$.

Da im letzteren die Verteilung der Spannungen keine gleichmäfsige ist, so mufs $k'_z < k_z$ gewählt werden. Schätzungsweise sei dieser Ungleichmäfsigkeit Rechnung getragen dadurch, dafs

$$k'_z = \frac{\pi}{4} k_z$$

gesetzt werde.

Mit dem üblichen Werte

$$s_1 = 0{,}25\, D$$

folgt dann aus $k_z \frac{\pi d^2}{4} = k'_z \left(\frac{\pi D^2}{4} - s_1 D\right)$:

$$D \sim 1{,}33\, d.$$

*) Im wesentlichen nach C. Bach, Die Maschinenelemente, I. Auflage. Die Oktober 1891 erschienene erste Lieferung der II. Auflage konnte noch nicht benutzt werden.

Die Pressung k in der Berührungsfläche $s_1 D$ zwischen Keil und Stange ergiebt sich aus

$$k_z \frac{\pi d^2}{4} = k s_1 D = k \frac{1}{4} D^2$$

zu

$$k \sim 1{,}75\, k_z.$$

Wird dieser Wert auch gegenüber der Hülse, welche die Stange umschliefst, zugelassen, so folgt aus

$$2 k s s_1 = k D s_1:$$

$$s = 0{,}5\, D.$$

Für die mittlere Höhe h_1 des auf Biegung beanspruchten Keiles gilt:

$$\frac{P}{2}\left(\frac{D}{2} + \frac{s}{2} - \frac{D}{4}\right) = k_b \frac{s_1 h_1^2}{6},$$

woraus mit $s_1 = \frac{D}{4}$, $s = \frac{D}{2}$, $P = k_z \frac{\pi d^2}{4}$:

$$h_1 = d \sqrt{\frac{3\pi}{2} \frac{k_z}{k_b}}.$$

Beispielsweise für $k_z = 900$ kg f. d. qcm (Schweifseisen), $k_b =$ 1350 kg f. d. qcm (Stahl) wird:

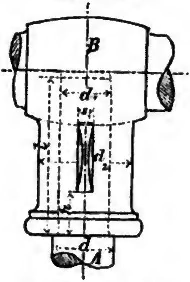
$$h_1 \sim 1{,}75\, d \sim 1{,}33\, D.$$

Die Abmessung h gilt als empirisch festzustellende Gröfse:

$$h = 0{,}67\, h_1 \text{ bis } 0{,}75\, h_1.$$

Die Höhe h_2 kann gleich h_1 genommen werden, sofern die auf die Hülse einwirkenden Kräfte nicht eine gröfsere Abmessung bedingen.

Abbild. 250.



b. Für wechselnde Belastung.

Die gezeichnete Verbindung (Abbild. 250) der Kolbenstange A einer Balancier-Dampfmaschine mit dem Querhaupt B mufs infolge des Wechsels der von A nach B zu übertragenden Kraft zwischen $+P$ und $-P$ eine **Spannungsverbindung** (in Richtung der Stangenachse) sein. Um die zusätzliche Beanspruchung durch die Verspannung, welche bereits im unbelasteten Zustande stattfinden mufs, zu berücksichtigen, kann den Rechnungen die $\frac{5}{4}$-fache Stangenkraft zu grunde gelegt werden.

Beispiel. Die Kolbenstangenkraft betrage $P = 10000$ kg, der Durchmesser der aus Flufsstahl gefertigen Kolbenstange $d = 8{,}2$ cm. Querhaupt und Keil sollen aus dem gleichen Material hergestellt werden.

Die Forderung, dafs in der Ringfläche $\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$ die Pressung 1000 kg f. d. qcm nicht überschritten wird, führt zu:

$$\frac{\pi}{4}(8{,}2^2 - d_1^2)\,1000 = \frac{5}{4}\,10\,000,$$

$$d_1 \sim 7 \text{ cm}.$$

Für die Keilstärke gilt, wenn zwischen Keil und Stange die gleiche Pressung zugelassen wird:

$$s_1 \,.\, 7 \,.\, 1000 = \frac{5}{4}\,10\,000,$$

$$s_1 = 1{,}8 \text{ cm}.$$

Der Hülsendurchmesser d_2 folgt aus:

$$(d_2 - d_1)\,s_1 \,.\, 1000 = \frac{5}{4}\,10\,000 = s_1\,d_1 \,.\, 1000,$$

$$d_2 = 2\,d_1 = 14 \text{ cm}.$$

Die mittlere Höhe h_1 des auf Biegung beanspruchten Keiles ist bestimmt durch

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\,10\,000\left(\frac{7{,}0 + 3{,}5}{2} - \frac{3{,}5}{2}\right) = 1000 \cdot \frac{1{,}8\,h_1^2}{6},$$

$$h_1 = 8{,}6 \text{ cm}.$$

Für h ergiebt sich nach dem unter a. Bemerkten der Mittelwert:

$$h = 0{,}7\,h_1 = 6 \text{ cm},$$

ferner ist:

$$l = 6{,}0 + 8{,}6 + 6{,}0 = 20{,}6 \text{ cm}.$$

Abbild. 251.



Um die scharfen, einspringenden Ecken in den Keillöchern zu vermeiden, giebt man dem Keil zweckmäfsig die Form Abbild. 251.

Keile, welche **bei voller Belastung eingetrieben** (angezogen) werden, müssen solche Abmessungen erhalten, dafs die Pressung in den Flächen, welche hierbei auf einander gleiten, das höchste für zulässig erachtete Mafs nicht überschreitet. Das letztere hängt ab von der Sorgfalt der Ausführung und dem Material.

B. Schrauben.

Konstruktion der (Projektion der) Schraubenlinie s. S. 121.

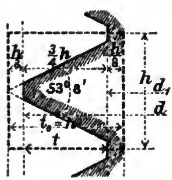
Kraft- und Arbeitsverhältnisse der Schraube s. S. 210 u. f.

Abbild. 252.



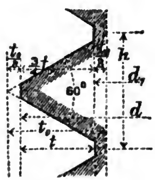
Whitworth.
(Englisch.)

Abbild. 253.



Delisle.
(Deutsch.)

Abbild. 254.



Sellers.
(Amerikanisch.)

a. Berechnung der Schrauben.

Es bezeichne:

Q die zulässige Belastung in Richtung der Schraubenachse, in kg,
d den Bolzendurchmesser (äufserer Durchmesser) in cm,
d_1 den Kerndurchmesser (innerer Durchmesser) in cm.

α. Schrauben, welche sich in Ruhe befinden, wenn die Zugkraft (Druckkraft) Q in Richtung der Achse wirkt, so dafs der Kern nur auf Zug (Druck) in Anspruch genommen wird.

Aus:
$$Q = k_z \frac{\pi d_1^2}{4}$$

folgt unter Voraussetzung der Belastungsweise b (s. Tafel S. 309) für schweifseiserne Schrauben nach Whitworthschem System von $^1/_2$ Zoll engl. an:

$$Q = 240\, d^2 \text{ bis } 300\, d^2,$$

worin Q in kg und d in cm zu nehmen ist. (Tafel s. S. 379.)

Will man d unmittelbar in englischen Zollen erhalten, so kann benutzt werden:

$$Q = 1600\, d^2 \text{ bis } 2000\, d^2.$$

Der kleinere Wert gilt für Schrauben durchschnittlicher Güte, der gröfsere für besonders sorgfältig (auf der Drehbank, oder mittelst scharfen Schneidzeuges) hergestellte Schrauben.

Für die (übrigens seltene) Belastungsweise a der Tafel S. 309 können die Koefficienten der Gleichungen für Q im Verhältnis von $600 : 900 = 2 : 3$ erhöht werden. Ebenso dürfen bei vorzüglicher Güte des Schweifseisens oder, im Falle Stahl gewählt wird, die Koefficienten nach Mafsgabe der Tafel S. 309 und der hierzu gehörigen Bemerkungen vergröfsert werden.

β. Schrauben, welche selbst oder deren Muttern gedreht werden, während die Zugkraft (Druckkraft) Q in Richtung der Achse wirkt, so dafs der Kern Beanspruchung auf Zug (Druck) und auf Drehung erfährt.

Die unter α. enthaltenen Gleichungen gehen über in:

$$Q = 180\, d^2 \text{ bis } 225\, d^2 \text{ (für kg und cm)}$$

bezw.

$$Q = 1200\, d^2 \text{ bis } 1500\, d^2 \text{ (für kg und Zoll engl.).}$$

Fundamentanker und Flanschenschrauben erfahren dadurch, dafs die Muttern bereits von vornherein kräftig angezogen werden müssen, eine zusätzliche Spannung. Dieser kann dadurch Rechnung getragen werden, dafs die Koefficienten in den vorstehenden Gleichungen entsprechend, d. h. etwa um ein Viertel vermindert werden.

(Fortsetzung s. S. 384.)

b. Whitworthsches Gewindesystem. (Abbild. 252, S. 377.)

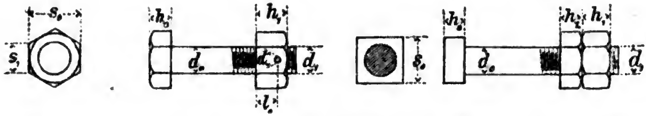
Für scharfgängige Schrauben noch meist angewandt. Gewindequerschnitt ein gleichschenkliges Dreieck, Kantenwinkel 55°, Ab- bezw. Ausrundung $\frac{1}{6}$ der Höhe.

Bolzendurchmesser d Zoll engl.	mm	Kerndurchmesser d_1 Zoll engl.	mm	Anzahl der Gewindegänge auf 1 Zoll engl.	auf die Länge d	Höhe der Mutter abgerundet. mm	Kopfhöhe abgerundet. mm	Schlüsselweite abgerundet. mm	Zulässige Belastung (abgerundet) von $Q = 240\,d^2$ kg	bis $Q = 300\,d^2$ kg
$\frac{1}{4}$	6,3	0,186	4,72	20	5	6	4	13	100	120
$\frac{5}{16}$	7,9	0,241	6,09	18	$5\frac{5}{8}$	8	6	16	150	185
$\frac{3}{8}$	9,5	0,295	7,36	16	6	10	7	19	220	270
$\frac{7}{16}$	11,1	0,346	8,64	14	$6\frac{1}{8}$	11	8	21	300	370
$\frac{1}{2}$	12,7	0,393	9,91	12	6	13	9	23	390	485
$\frac{5}{8}$	15,9	0,509	12,92	11	$6\frac{7}{8}$	16	11	27	610	760
$\frac{3}{4}$	19,0	0,622	15,74	10	$7\frac{1}{2}$	19	13	33	865	1080
$\frac{7}{8}$	22,2	0,733	18,54	9	$7\frac{7}{8}$	22	15	36	1180	1480
1	25,4	0,840	21,33	8	8	25	18	40	1550	1940
$1\frac{1}{8}$	28,6	0,942	23,87	7	$7\frac{7}{8}$	29	20	45	1960	2450
$1\frac{1}{4}$	31,7	1,067	26,92	7	$8\frac{3}{4}$	32	22	50	2410	3010
$1\frac{3}{8}$	34,9	1,162	29,46	6	$8\frac{1}{4}$	35	24	54	2920	3650
$1\frac{1}{2}$	38,1	1,287	32,68	6	9	38	27	58	3480	4350
$1\frac{5}{8}$	41,3	1,369	35,28	5	$8\frac{1}{8}$	41	29	63	4090	5120
$1\frac{3}{4}$	44,4	1,494	37,84	5	$8\frac{3}{4}$	44	32	67	4730	5910
$1\frac{7}{8}$	47,6	1,591	40,38	$4\frac{1}{2}$	$8\frac{7}{16}$	48	34	72	5440	6800
2	50,8	1,716	43,43	$4\frac{1}{2}$	9	51	36	76	6190	7780
$2\frac{1}{4}$	57,1	1,930	49,02	4	9	57	40	85	7820	9780
$2\frac{1}{2}$	63,5	2,180	55,37	4	10	64	45	94	9680	12100
$2\frac{3}{4}$	69,8	2,384	60,45	$3\frac{1}{2}$	$9\frac{5}{8}$	70	49	103	11700	14600
3	76,2	2,634	66,80	$3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	76	53	112	13950	17400
$3\frac{1}{4}$	82,5	2,857	72,57	$3\frac{1}{4}$	$10\frac{9}{16}$	83	58	121	16350	20400
$3\frac{1}{2}$	88,9	3,107	78,92	$3\frac{1}{4}$	$11\frac{3}{8}$	89	62	130	18950	23700
$3\frac{3}{4}$	95,2	3,323	84,40	3	$11\frac{1}{4}$	95	67	138	21750	27200
4	101,6	3,573	90,75	3	12	102	71	147	24700	30900
$4\frac{1}{4}$	107,9	3,805	96,65	$2\frac{7}{8}$	$12\frac{7}{32}$	108	76	156	28000	35000
$4\frac{1}{2}$	114,3	4,055	103,00	$2\frac{7}{8}$	$12\frac{15}{16}$	114	80	165	31500	39300
$4\frac{3}{4}$	120,6	4,285	108,84	$2\frac{3}{4}$	$13\frac{1}{16}$	121	85	174	34800	43600
5	127,0	4,535	115,19	$2\frac{3}{4}$	$13\frac{3}{4}$	127	89	183	38700	48500
$5\frac{1}{4}$	133,3	4,790	121,67	$2\frac{5}{8}$	$13\frac{25}{32}$	133	93	192	42700	53400
$5\frac{1}{2}$	139,7	5,020	127,51	$2\frac{5}{8}$	$14\frac{7}{16}$	140	98	201	46800	58500
$5\frac{3}{4}$	146,0	5,238	133,05	$2\frac{1}{2}$	$14\frac{3}{8}$	146	102	209	51200	64000
6	152,4	5,488	139,40	$2\frac{1}{2}$	15	152	106	218	55800	69800

Die Formeln für Q ergeben Beanspruchungen der Schrauben, mit wachsendem Durchmesser, von $k_z = 550$ bis 370 (erste Spalte) bezw. von $k_z = 680$ bis 460 kg f. d. qcm (zweite Spalte).

e. Abmessungen für gedrehte und ungedrehte Schrauben

(Normalien der preußi-



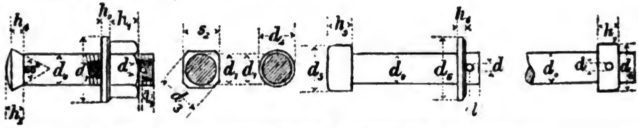
Nr. der Schrauben.	Durchmesser im Schaft. d_0 gedreht mm	Durchmesser im Schaft. d_0 ungedreht mm	Gewindedurchmesser in den Spitzen. d_1 Zoll engl.	Gewindedurchmesser in den Spitzen. d_1 mm	Kerndurchmesser. d_2 mm	Zahl der Gänge auf 1 Zoll engl. z	Höhe des sechs- oder viereckigen Kopfes. h_0 mm	Höhe der Mutter. h_1 mm	Höhe der Gegenmutter. h_2 mm	Höhe des versenkten Kopfes im ganzen. h_3 mm	Höhe des versenkten Kopfes im Konus. h_4 mm	Schlüsselweite u. Seite des viereckigen Kopfes. s_0 mm
3	10	10	3/8	9,52	7,49	16	7	10	7	6	5	17
4	13	13	1/2	12,70	9,99	12	9	13	10	8	7	22
5	16	16	5/8	15,87	12,91	11	12	16	12	10	8	28
6	20	19	3/4	19,05	15,79	10	14	20	15	12	10	33
7	23	23	7/8	22,22	18,60	9	16	23	17	14	11	39
8	26	26	1	25,40	21,33	8	18	26	19	16	13	44
9	30	29	1 1/8	28,57	23,92	7	20	30	21	18	14	50
10	33	32	1 1/4	31,75	27,10	7	22	33	24	20	16	55
11	36	35	1 3/8	34,92	29,50	6	24	36	26	22	18	61
12	40	39	1 1/2	38,10	32,68	6	26	40	28	24	20	66
13	43	42	1 5/8	41,27	34,76	5	29	43	31	26	21	72
14	46	45	1 3/4	44,45	37,94	5	31	46	33	28	23	77
15	50	48	1 7/8	47,63	40,40	4 1/2	34	50	36	30	25	83

Das Gewinde über 20 mm Bolzendurchmesser für Stehbolzen, lotrechte Deckenanker, gefäßen, Probierhähnen u. s. w. erhält

Ungedrehte Schrauben mit abweichendem Durchmesser

und gedrehte Bolzen. (Whitworthsches Gewinde.)

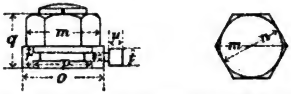
schen Staatsbahnen.)



Schraubenbolzen.				Stiftschrauben.			Glatte Bolzen.		Unterlagscheiben.			
		Entfernung des Splintes							Durchmesser			
Seite des Sechsecks für den Kopf oder die Mutter.	Splintdurchmesser.	durch die Mutter vom Rande der letzteren	vor der Mutter vom Ende des Bolzens.	Durchmesser des äußeren Kreises.	Seite des Vierecks.	Durchmesser des Ansatzes bei runden Stiftschrauben.	Durchmesser des Kopfes.	Höhe des Kopfes.	für gedrehte Bolzen.	für Schraubenmuttern.	Stärke der Unterlagscheibe.	Höhe des Splintringes.
s_1 mm	d mm	l_0 mm	l_1 mm	d_3 mm	s_2 mm	d_4 mm	d_5 mm	h_5 mm	d_6 mm	d_7 mm	h_6 mm	h_7 mm.
9,8	4	7	6	14	12	13	16	5	16	22	3	10
12,7	5	9	8	20	17	16	22	6	22	28	4	11
16,2	5	12	8	22	17	20	26	7	26	36	4	12
19,1	6	14	9	26	22	23	32	8	32	44	5	13
22,5	6	16	9	34	28	26	36	9	36	50	5	15
25,4	7	18	10	34	28	30	40	10	40	56	6	16
28,9	7	20	12	40	33	33	44	10	44	62	6	17
31,8	8	22	12	40	33	36	48	11	48	68	7	18
35,2	9	24	13				52	11	52	74	7	19
38,1	9	26	14				56	12	56	80	8	20
41,6	10	29	15				60	12	60	86	8	21
44,5	10	31	15				64	13	64	92	9	22
47,9	10	34	16				68	13	68	100	9	23

desgl. das Messinggewinde vom Wasserstand, von den Cylinderhähnen, Schmier-
10 Gänge auf einen Zoll englisch.
erhalten die Steigung der nächsten schwächeren Normalschraube.

d. Tafel über Bolzenabmessungen, welche bei Schiffsmaschinen üblich sind.



Durchmesser Zoll engl.	Durchmesser mm	Schraubenköpfe. 6-eckig, quadratisch oder rund. Flachkant oder Durchmesser. mm	Schraubenköpfe. 6-eckig, quadratisch oder rund. Höhe. mm	Schraubenköpfe. rund eingelassen. Durchmesser. mm	Schraubenköpfe. rund eingelassen. Höhe. mm	Mutter. *m* mm	Mutter. *n* mm	Mutter. *o* mm	Mutter. *p* mm	Mutter. *q* mm	Mutter. *r* mm	Stellschraube. *s* mm	Stellschraube. *t* mm	Stellschraube. *u* mm
3/4	20	31	14	28	13	31	27	35	26	24	12	5	10	8
7/8	23	35	16	32	15	36	31	40	29	27	12	5	10	8
1	26	40	18	37	17	40	35	46	33	30	12	5	10	8
1 1/8	29	45	20	41	19	46	40	50	37	33	13	5	10	8
1 1/4	32	49	22	46	21	52	45	57	42	36	13	5	10	8
1 3/8	35	54	24	50	23	57	49	62	46	39	13	5	10	8
1 1/2	39	58	26	55	25	62	54	68	50	42	15	6	13	10
1 5/8	42	63	28	59	27	67	58	73	54	45	15	6	13	10
1 3/4	45	67	30	64	29	73	63	79	59	48	15	6	13	10
1 7/8	48	72	32	68	31	77	67	85	63	51	18	8	16	11
2	51	76	34	73	33	83	72	90	68	54	18	8	16	11
2 1/4	58	85	38	82	37	93	81	101	77	60	18	8	16	11
2 1/2	64	94	42	91	41	104	90	112	86	66	18	8	16	11
2 3/4	70	103	46	100	45	114	99	123	95	71	21	10	20	13
3	77	112	50	109	49	125	108	134	104	76	21	10	20	13
3 1/4	83	121	54	118	53	135	117	145	113	81	21	10	20	13
3 1/2	89	130	58	127	57	145	126	156	122	86	25	11	22	14
3 3/4	96	139	63	136	61	156	135	166	131	91	25	11	22	14
4	102	148	68	145	65	166	144	177	140	96	25	11	22	14
4 1/4	108	157	73	154	69	177	153	188	149	101	28	13	24	16
4 1/2	115	166	78	162	73	187	162	200	158	106	28	13	24	16
4 3/4	121	175	83	170	77	197	171	210	167	111	28	13	24	16
5	127	184	88	178	81	207	179	220	175	116	32	14	28	17
5 1/4	134	193	93	186	85	216	187	230	183	121	32	14	28	17
5 1/2	140	202	98	194	89	225	195	240	191	126	36	16	31	19
5 3/4	147	211	103	202	92	234	203	250	199	131	36	16	31	19
6	153	220	108	210	95	244	211	260	207	136	38	16	31	19

e. Metrisches Gewindesystem, angenommen vom Verein deutscher Ingenieure.

(Aufgestellt von Delisle.)

Gewindeform s. Abbild. 253 a. S. 377.

Kantenwinkel = 53° 8′ (Winkel an der Spitze des in das Quadrat eingezeichneten gleichschenkligen Dreiecks).

Bolzen-durch-messer. d mm	Gang-höhe. h mm	Gang-tiefe. t mm	Kern-durch-messer. d_1 mm	Schlüs-sel-weite. w mm	Bolzen-durch-messer. d mm	Gang-höhe. h mm	Gang-tiefe. t mm	Kern-durch-messer. d_1 mm	Schlüs-sel-weite. w mm
5	1,0	0,75	3,5	11	18	2,2	1,65	14,7	31
6	1,0	0,75	4,5	11	20	2,4	1,8	16,4	34
7	1,2	0,9	5,2	14	22	2,8	2,1	17,8	37
8	1,2	0,9	6,2	14	24	2,8	2,1	19,8	40
9	1,4	1,05	6,9	18	26	3,2	2,4	21,2	43
10	1,4	1,05	7,9	18	28	3,2	2,4	23,2	46
12	1,6	1,2	9,6	22	30	3,6	2,7	24,6	49
14	1,8	1,35	11,3	25	32	3,6	2,7	26,6	52
16	2,0	1,5	13,0	28	36	4,0	3,0	30,0	58
					40	4,4	3,3	33,4	64

f. Sellerssches Gewindesystem. (In Amerika gebräuchlich.)

Gewindeform s. Abbild. 254 a. S. 377.

Kantenwinkel = 60°.

Bolzen-durch-messer. d Zoll engl.	Anzahl der Gewinde-gänge auf 1 Zoll engl.	Bolzen-durch-messer. d Zoll engl.	Anzahl der Gewinde-gänge auf 1 Zoll engl.	Bolzen-durch-messer. d Zoll engl.	Anzahl der Gewinde-gänge auf 1 Zoll engl.	Bolzen-durch-messer. d Zoll engl.	Anzahl der Gewinde-gänge auf 1 Zoll engl.
$\frac{1}{4}$	20	1	8	$2\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$
$\frac{5}{16}$	18	$1\frac{1}{8}$	7	$2\frac{1}{2}$	4	$4\frac{3}{4}$	$2\frac{5}{8}$
$\frac{3}{8}$	16	$1\frac{1}{4}$	7	$2\frac{3}{4}$	4	5	$2\frac{1}{2}$
$\frac{7}{16}$	14	$1\frac{3}{8}$	6	3	$3\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	13	$1\frac{1}{2}$	6	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{8}$
$\frac{9}{16}$	12	$1\frac{5}{8}$	$5\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$5\frac{3}{4}$	$2\frac{3}{8}$
$\frac{5}{8}$	11	$1\frac{3}{4}$	5	$3\frac{3}{4}$	3	6	$2\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$	10	$1\frac{7}{8}$	5	4	3		
$\frac{7}{8}$	9	2	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$2\frac{7}{8}$		

g. Gasrohr-Gewinde.

Lichter Rohrdurchmesser. Zoll engl.	mm	Aeufserer Gewindedurchmesser. Zoll engl.	mm	Gewindetiefe. Zoll engl.	mm	Anzahl der Gänge auf 1 Zoll engl.
$\frac{1}{8}$	3,18	$\frac{13}{32}$	10,32	0,023	0,58	19
$\frac{1}{4}$	6,35	$\frac{17}{32}$	13,49	0,034	0,86	19
$\frac{3}{8}$	9,53	$\frac{5}{8}$	15,88	0,034	0,86	19
$\frac{1}{2}$	12,7	$\frac{13}{16}$	20,64	0,046	1,17	14
$\frac{5}{8}$	15,88	$\frac{29}{32}$	23,02	0,046	1,17	14
$\frac{3}{4}$	19,05	$1\frac{1}{32}$	26,19	0,046	1,17	14
$\frac{7}{8}$	22,23	$1\frac{3}{16}$	30,16	0,058	1,47	11
1	25,4	$1\frac{5}{16}$	33,34	0,058	1,47	11
$1\frac{1}{4}$	31,75	$1\frac{5}{8}$	41,27	0,058	1,47	11
$1\frac{1}{2}$	38,10	$1\frac{7}{8}$	47,62	0,058	1,47	11
$1\frac{3}{4}$	44,50	$2\frac{1}{8}$	53,97	0,058	1,47	11
2	50,80	$2\frac{3}{8}$	60,33	0,058	1,47	11
$2\frac{1}{4}$	57,15	$2\frac{5}{8}$	66,67	0,058	1,47	11
$2\frac{1}{2}$	63,50	3	76,20	0,058	1,47	11
$2\frac{3}{4}$	69,85	$3\frac{1}{8}$	79,37	0,058	1,47	11
3	76,20	$3\frac{1}{2}$	88,90	0,058	1,47	11
$3\frac{1}{2}$	88,90	$3\frac{15}{16}$	100,01	0,058	1,47	11
4	101,6	$4\frac{7}{16}$	112,71	0,058	1,47	11

(Fortsetzung von S. 378.)

Bei **Schrauben, welche mit der Last angezogen werden,** gleiten die durch die Belastung gegen einander gedrückten Schraubenflächen der Mutter und der Schraube auf einander. Die specifische Pressung k in den Berührungsflächen darf eine gewisse Gröfse nicht überschreiten, derart, dafs bei z tragenden Gängen:

$$Q \leqq k \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2) z .$$

Für Befestigungsschrauben ist, wenn
Schweifseisen auf Schweifseisen oder Bronze gleitet: $k \gtreqless 150$ kgf. d. qcm,
Flufsstahl auf Bronze gleitet: . . . . $k \gtreqless 200$ kgf. d. qcm.

Für die Bewegungsschrauben (der Pressen u. s. w.) ist höchstens die Hälfte dieser Werte zu rechnen.

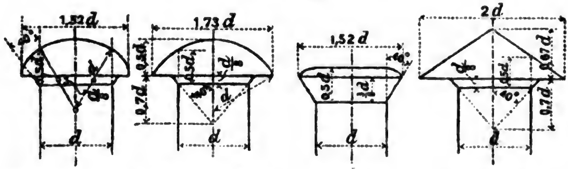
Bei flachgängigen Schrauben wird zunächst durch Berechnung auf Zug mit einer zulässigen Spannung von etwa 0,6 k_z für den Kerndurchmesser d_1 ein Näherungswert erlangt. Dann ist das Gewinde, sowie das Drehungsmoment M_d, welches der Kern zu übertragen hat, zu bestimmen und die Festigkeitsrechnung auf Zug und Drehung nochmals durchzuführen.*) Erfährt die Schraube Druckbeanspruchung, so ist sinngemäfs in gleicher Weise vorzugehen und hierbei zu beachten, ob Knickung eintreten kann.

*) Vergl. Bach, Maschinenelemente 1881, S. 53 u. 55.

C. Niete.

Formen der Nietköpfe s. Abbild. 255.

Abbild. 255.



Geschellter Kopf für feste Verbindungen.	Geschellter Kopf für feste und dichte Verbindungen.	Versenkter Kopf.	Gehämmerter Kopf.

Zur Bildung des erhabenen Schliefskopfes gehört eine Schaftlänge von 1,3 d bis 1,8 d, gewöhnlich 1,7 d.

Gewichte der Nietköpfe s. Abteil. II, Abschnitt Materialienkunde.

a. Nietverbindungen für Blechgefäfse, welche einem verhältnismäfsig hohen Druck ausgesetzt sind (Dampfkessel).

In folgendem bedeutet:

d den Nietdurchmesser,
s die Blechstärke,
t die Nietteilung,
$b = t - d$,
a die kleinste Breite des Randstreifens,
$a + 0{,}5\,d$ die Randentfernung,
c den Abstand zweier Nietreihen,
alle Mafse in mm.

Es kann gewählt werden:

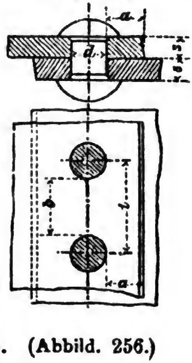
$$d = \sqrt{50\,s} - 4,$$

mit der Beschränkung:

$$d_{max} = 26\,; \qquad d \leq 2{,}4\,s.$$

φ bezeichnet das Verhältnis der Festigkeit der Nietnaht zu der des vollen Bleches.

Abbild. 256.



1. Die einschnittige, einreihige Vernietung. (Abbild. 256.)

$$b = \frac{5}{4} \cdot \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{s} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\text{Nietquerschnitt}}{\text{Blechstärke}}\,;$$

$$t = b + d\,; \qquad a = 0{,}8\,d\sqrt{\frac{d}{s}}.$$

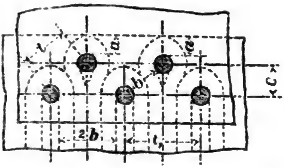
Tafel über einschnittige, einreihige Vernietung.

s	$d = \sqrt{50s} - 4$	$t = b + d$	$2a + d$	$\varphi = \frac{b}{b+d}$	s	$d = \sqrt{50s} - 4$	$t = b + d$	$2a + d$	$\varphi = \frac{b}{b+d}$
4	10	35	36	0,71	12	20	53	62	0,62
5	12	40	42	0,70	13	21	54	65	0,61
6	13	41	45	0,68	14	22	56	68	0,61
7	15	46	51	0,67	15	23	58	71	0,60
8	16	48	52	0,67	16	24	60	72	0,60
9	17	49	55	0,65	17	25	61	73	0,59
10	18	50	56	0,64	18	26	63	76	0,59
11	19	51	59	0,63	20	26	59	73	0,56

2. Die einschnittige, zweireihige Vernietung.

(Abbild. 257.)

Abbild. 257.



Der Berechnung liegt nach Schwedler die Vorstellung zu grunde, daſs zu jedem Niet ein diesen seilartig umschlieſsender Blechstreifen gehört, dessen doppelte Breite, senkrecht zur Kraftrichtung gemessen:

$$b = \frac{5}{4} \cdot \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{s}$$

ist, während seine Breite in letzterer Richtung

$$a = 0{,}8\, d \sqrt{\frac{d}{s}}$$

beträgt. Dann ist:

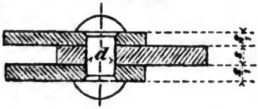
$$t = b + d; \qquad t_1 = 2b + d; \qquad c = \sqrt{t^2 - \left(\frac{t_1}{2}\right)^2}.$$

Tafel über einschnittige, zweireihige Vernietung.

s	d	b	t	t_1	c	$c + 2a + d$	$\varphi = \frac{2b}{2b+d}$	s	d	b	t	t_1	c	$c + 2a + d$	$\varphi = \frac{2b}{2b+d}$
4	10	24	34	58	18	54	0,83	12	20	33	53	86	31	93	0,77
5	12	28	40	68	21	63	0,82	13	21	33	54	87	32	97	0,76
6	13	28	41	69	22	67	0,81	14	22	34	56	90	33	101	0,75
7	15	31	46	77	25	76	0,80	15	23	35	58	93	35	106	0,75
8	16	32	48	80	26	79	0,80	16	24	36	60	96	36	108	0,75
9	17	32	49	81	28	83	0,79	17	25	36	61	97	37	110	0,74
10	18	32	50	82	29	85	0,78	18	26	37	63	100	38	114	0,74
11	19	32	51	83	30	89	0,77	20	26	33	59	92	37	110	0,72

3. Die zweischnittige, einreihige Vernietung. (Abbild. 258.)

Abbild. 258.



Für die Stärke s_1 der beiden Laschen genügt unter der Voraussetzung gleichen Materials und gleicher Güte:

$$s_1 = 0{,}5\, s.$$

In der Regel trifft diese Voraussetzung nicht ganz zu, infolge dessen gesetzt wird:

$$s_1 = 0{,}63\, s \text{ bis } 0{,}75\, s; \qquad b = 2\,\frac{\frac{\pi d^2}{4}}{s},$$

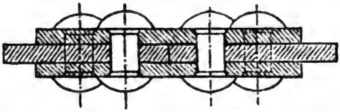
mit der Beschränkung:

$$b \leqq 2\,d; \qquad t \leqq 3\,d.$$

4. Die zweischnittige, zweireihige Vernietung.

(Abbild. 259.)

Abbild. 259.



Hier führt das unter 2. angegebene Verfahren zum Ziel.

5. Nach den **Hamburger Normen** 1891 *) (s. Siebenter Abschnitt, Dampfkessel) gilt für Dampfkessel-Nietung folgendes:

1) Die Wandstärken neuer Dampfkessel sind so zu bemessen, dafs die Zugspannung des Bleches an der schwächsten Stelle nicht mehr als $\frac{1}{5}$ der Zugfestigkeit des Materials beträgt.

Bei Anwendung doppelt gelaschter Nähte und sorgfältiger Herstellung des Kessels in bezug auf Material und Arbeit darf eine Zugspannung bis zu $\frac{1}{4{,}5}$ der Zugfestigkeit des Materials gestattet werden.

2) Die Nietnähte sollen stets so ausgeführt werden, dass die Widerstandsfähigkeit der Niete gegen Abscheren nicht geringer ist als die in Rechnung zu ziehende Festigkeit des Bleches in der Nietnaht.

Bei Laschennietung sollen die Laschen aus Blechen von mindestens gleicher Güte wie die Mantelbleche geschnitten werden.

b. Nietverbindungen für Blechgefäfse, welche nur einem geringen Druck ausgesetzt sind. (Wasserbehälter, Gasbehälter, eiserne Schornsteine u. s. w.)

Bei diesen Gefäfsen, welche meist einschnittige, einreihige Vernietung erhalten, wird die Blechstärke s in der Regel mehr durch

*) Als Anhang (ohne bindende Kraft) ist zu den Hamburger Normen 1891 eine Abhandlung von F. Prohmann über Dampfkessel-Nietung beigegeben (s. Siebenter Abschnitt, Kraftmaschinen).

Rücksicht auf allmähliches Abrosten u. dergl. als durch den inneren Druck bestimmt.

Es kann gewählt werden:

$$t = 3\,d + 5 \text{ mm.}$$

Vollkommene Abdichtung erreicht man durch Dichtungsmaterial (mit Mennige getränkte Leinwandstreifen u. dergl.)

c. Nietverbindungen für Eisenkonstruktionen.

1. Vernietungen, bei denen ein Richtungswechsel der wirkenden Kräfte nicht eintritt.

Nietdurchmesser kann in gleicher Weise wie unter **a.** (S. 385) bestimmt werden. Gebräuchliche Nietdurchmesser 10, 13, 16, 18, 20, 23, 25, 26 mm. Empfohlen wird, zur Verminderung des Niet-Werkzeuges nur Durchmesser zu nehmen von 10, 13, 16, 20, 23, 26 mm.

Für einreihige, einschnittige Vernietung mit 600 kg von 1 qcm Nietquerschnitt zu übertragender Kraft wird:

$$b = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{s}; \qquad t = b + d,.$$

mit der Beschränkung, dafs $t \geqq 2{,}5\,d$, und

$$a = 0{,}8\,d \sqrt{\frac{d}{s}}.$$

Zwei- und mehrreihige Vernietungen lassen sich auf grund des Vorstehenden nach dem **Schwedler**schen Verfahren (vergl. S. 386) leicht bestimmen.

Bei mehrschnittigen Vernietungen ist darauf zu achten, dafs der Druck zwischen Nietschaft und Lochwand (der Leibungsdruck) das für zulässig erachtete Mafs nicht überschreitet. Empfohlen wird hierfür der Wert $1{,}5\,k_z$.

Falls die Stäbe, welche durch die Vernietung Kräfte auf einander übertragen sollen, sich nicht unmittelbar berühren, sind entsprechend mehr Niete anzuordnen.

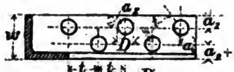
Die Summe der Stärken der zu vernietenden Teile soll ungefähr $4\,d$ (besser $2{,}5\,d$) nicht überschreiten, da bei gröfserer Nietlänge als etwa $5{,}5\,d$ ein Stauchen durch den ganzen Nietschaft hindurch auch nicht entfernt mehr möglich ist und weil beim Erkalten die Längsspannungen sich leicht bis zum Absprengen des Kopfes steigern.

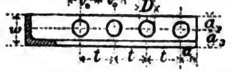
Können längere Nieten nicht vermieden werden, so sind sie nur soweit zu erwärmen, als es die Bildung des Schliefskopfes erfordert.

Am Setzkopfe ist vom Stauchen ohnehin bei so langen Nieten selbst dann nicht mehr die Rede, wenn sie auch am Setzkopf erhitzt worden sind.

Die Innehaltung folgender Maſse für Winkeleisen — auf andere Profile sinngemäſs anzuwenden — ist zu empfehlen. (Abbild. 260 und 261.) — Abbild. 260 nur für Winkeleisen von $w > 100$ mm.

Abbild. 260.





Abbild. 261.

Niet-durchm. mm	t_{min} mm	t mm	t_{max} mm	t_{0min} mm	a_{1min} mm	a_1 mm	a_{2min} mm	D mm
$d = 16$	40	50	90—120	35	25	30	25	24
$d = 18$	45	55	110—135	40	27	35	27	27
$d = 20$	50	60	120—150	40	30	40	30	30
$d = 23$	60	70	140—180	45	35	45	35	35

$$a_3 = 0{,}5\,w + 5 \text{ mm}.$$

$$d = \sqrt{50\,s} - 4 \text{ (Tafel s. S. 386),}$$

oder auch $$d = 2\,s.$$

$$w_{min} = 3\,d.$$

2. Vernietungen, welche Kräfte zu übertragen haben, deren Richtungen wechseln.

Die Zuverlässigkeit einer solchen Verbindung fordert entweder das Einziehen von Nieten in kaltem Zustande derart, daſs der Nietschaft nicht nur das Loch ausfüllt, sondern sich mit einer gewissen Pressung gegen die Lochwandung legt*), wobei die von jedem Niet zu übertragende gröſste Kraft P (in kg) bestimmt ist durch:

$$P \leqq 320\,\frac{\pi\,d^2}{4} = 250\,d^2 = 400\,d\,s \quad (d \text{ und } s \text{ hierbei in cm}),$$

$$d = 1{,}6\,s,$$

oder die Anordnung von soviel warm einzuziehenden Nieten, daſs für P nur ein Viertel bis höchstens die Hälfte des Wertes $320\,\frac{\pi\,d^2}{4}$ sich ergiebt. Man verläſst sich in letzterem Falle auf die Reibung in den Berührungsflächen der zusammengenieteten Teile. Durch Anordnung zweischnittiger Vernietung sucht man die Reibung möglichst zu vergröſsern.**)

*) Ein ausgeführtes Beispiel kalter Vernietung ($d = 26$ mm) s. Bach, Maschinenelemente 1881, S. 82 u. f., sowie dessen Arbeit über „Turbinen und vertikale Wasserräder", 1886, S. 172 u. Tafel 10.

**) Eine Würdigung der üblichen, auf die Scherfestigkeit der Niete sich stützende Berechnungsweise der Nietverbindungen und eine Klarstellung des Wertes, welcher dem Widerstande einer solchen Verbindung gegen Gleiten zukommt, enthält Bach, Maschinenelemente, II. Aufl., S. 116 bis 128.

II. MASCHINENTEILE DER DREHENDEN BEWEGUNG.

A. Zahnräder.

a. Allgemeine Gesetze der Verzahnung.

1. Die gemeinsame Berührungsnormale der Zahnprofile, d. h. die Zahndruckrichtung, teilt in jedem Augenblick des Eingriffs die Rädercentrale im umgekehrten Verhältnis der Achsen-Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2.

Gewöhnlich ist $\omega_1 : \omega_2 =$ konst., nur ausnahmsweise periodisch veränderlich (unrunde Räder). Für

$$\omega_1 : \omega_2 = \text{konst.}$$

geht die Zahndruckrichtung stets durch einen festen Punkt der Rädercentrale, die Abschnitte dieser bilden die Halbmesser r_1 und r_2 zweier Kreise, welche während der Räderbewegung auf einander wälzen ohne zu gleiten. Diese Kreise dienen zum Eintragen der Zahnabstände und werden daher **Teilkreise** genannt. Bei unrunden Rädern treten an Stelle der Teilkreise andere Wälzungskurven, deren Form von dem Veränderlichkeitsgesetz der Umsetzung abhängt.*)

Unter **Teilung** t versteht man den Abstand von Zahnmitte zu Zahnmitte gemessen in Bogenmafs auf dem Teilkreis. Demnach bei z Zähnen:

$$2\pi r = zt.$$

(Tafel hierzu s. S. 391.)

Die Teilung t setzt sich zusammen aus der Zahnstärke und der Zahnlückenweite. Für unbearbeitete Räder:

$$\textbf{Zahnstärke} = \frac{19}{40}t, \qquad \textbf{Lückenweite} = \frac{21}{40}t,$$

entsprechend einem Flankenspielraum $= \frac{t}{20}$, welcher bei bearbeiteten Rädern auf die Hälfte vermindert werden kann.

Zusammenarbeitende Räder verlangen gleiche Teilung, somit

$$r_1 : r_2 = z_1 : z_2.$$

Umdrehungszahlen der Räder

$$n_1 : n_2 = \omega_1 : \omega_2 = r_2 : r_1 = z_2 : z_1.$$

*) Vergl. Weisbach-Herrmann, Ingenieur-Mechanik 1876, III 1, § 49.

Tafel von $\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{z}{2\pi}$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,159	0,318	0,478	0,637	0,796	0,955	1,114	1,273	1,432
10	1,592	1,751	1,910	2,069	2,228	2,387	2,546	2,706	2,865	3,024
20	3,183	3.342	3,501	3,661	3,820	3,979	4,138	4,297	4,456	4,615
30	4,775	4,934	5,093	5,252	5,411	5,570	5,730	5,889	6,048	6,207
40	6,366	6,525	6,685	6,844	7,003	7,162	7,321	7,480	7,639	7,799
50	7,958	8,117	8,276	8,435	8,594	8,754	8,913	9,072	9,231	9,390
60	9,549	9,708	9,868	10,027	10,186	10,345	10,504	10,663	10,823	10,982
70	11,141	11,300	11,459	11,618	11,777	11,937	12,096	12,255	12,414	12,573
80	12,732	12,892	13,051	13,210	13,369	13,528	13,687	13,846	14,006	14,165
90	14,324	14,483	14,642	14,801	14,960	15,120	15,279	15,438	15,597	15,756
100	15,916	16,074	16,234	16,393	16,552	16,711	16,870	17,030	17,189	17,348
110	17,507	17,666	17,825	17,985	18,144	18,303	18,462	18,621	18,780	18,939
120	19,099	19 258	19,417	19,576	19,735	19,894	20,053	20,213	20,372	20,531
130	20,690	20,849	21,008	21,168	21,327	21,486	21,645	21,804	21,963	22,122
140	22,282	22,441	22,600	22,759	22,918	23,077	23,237	23,396	23,555	23,714
150	23,873	24,032	24,192	24,351	24,510	24,669	24,828	24,987	25,146	25,306
160	25,465	25,624	25,783	25,942	26,101	26,261	26,420	26,579	26,738	26,897
170	27,056	27,216	27,375	27,534	27,693	27,852	28,011	28,170	28,330	28,489
180	28,648	28,807	28,966	29,125	29,285	29,444	29,603	29,762	29,921	30,080
190	30,239	30,399	30,558	30,717	30,876	31,035	31,194	31,354	31,513	31,672
200	31,831	31,990	32,149	32,308	32,468	32,627	32,786	32,945	33,104	33,263
210	33,423	33,582	33,740	33,900	34,059	34,218	34,377	34,537	34,696	34,855
220	35,014	35,173	35,332	35,492	35,651	35,810	35,969	36,128	36,287	36,446
230	36,606	36,765	36,924	37,083	37,242	37,401	37,560	37,720	37,879	38,038
240	38,197	38,356	38,515	38,675	38,834	38,993	39,152	39,311	39,470	39,629
250	39,789	39,948	40,107	40,266	40,425	40,585	40,744	40,903	41,062	41,221
260	41,380	41,539	41,699	41,858	42,017	42,176	42,335	42,494	42,654	42,813
270	42,972	43,131	43,290	43,449	43,608	43,768	43,927	44,086	44,245	44,404
280	44,563	44,722	44,882	45,041	45,200	45,359	45,518	45,677	45,837	45,996
290	46,155	46,314	46,473	46,632	46,792	46,950	47,110	47,269	47,428	47,587

Zahnprofilform und Teilkreisgröfse bestimmen den geometrischen Ort der Zahnberührungen, die sogen. **Eingrifflinie,** diese und der Teilkreis umgekehrt die Zahnform, wenn aufserdem die zueinander gehörigen Punkte von Eingrifflinie und Teilkreis gegeben sind.

Die Eingrifflinie geht stets durch den gemeinsamen Berührungspunkt der Teilkreise.

Beim Entwerfen bestimmt man die **Zahnform** auf grund der Annahme einer bestimmten Form der Eingrifflinie, welche von vornherein für Richtung und Gröfse des Zahndrucks, sowie für

Dauer und Tiefe des Eingriffs entscheidend ist und mit der Teilung die Grundlage für die Zusammengehörigkeit zweier Räder bildet.

Als einfachste Formen der Eingriffslinie kommen nur Gerade und Kreis in betracht. Beide führen zu cyklischen Zahnprofilen.

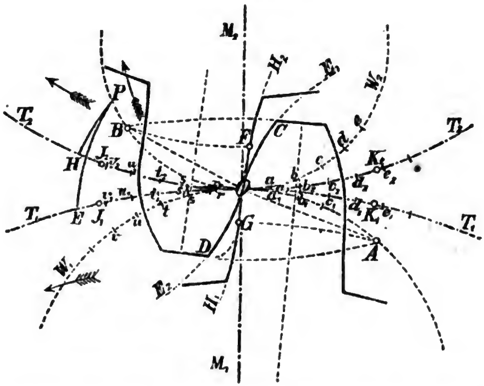
2. Stirnräder mit Kreisbogeneingrifflinie.

(Cykloidenverzahnung.)

1. Bestimmung der Zahnprofile aus der Eingrifflinie:

T_1 und T_2 die gegebenen Teilkreise **in glatten Maſsen** bestimmt durch die Beziehung $r = \frac{zt}{2\pi}$, W_2 die gewählte Eingrifflinie (Abbild. 262).

Abbild. 262.



Die relative Bahn des auf der Eingrifflinie von O nach P fortschreitenden Eingriffpunktes gegen die gleichzeitig auf einander rollenden Teilkreise liefert die Zahnprofile. Wählt man die Geschwindigkeit des Eingriffpunktes in seiner Bahn gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Teilkreise, so entspricht der Vorgang einem gleichzeitigen Rollen aller drei Kreise an einander ohne Ortsänderung ihrer Mittelpunkte unter Erzeugung der Epicykloide EP und der Hypocykloide HP, für die Eingriffstrecke OP zu den Teilkreiswälzungsbögen $OE = OH$.

Man erhält jederzeit richtig **zusammenarbeitende Cykloidenzahnprofile**, wenn man den als Eingrifflinie gewählten Wälzungskreis an beiden Teilkreisen in demselben Sinne abrollt und die Kurven in der Anfangslage für den gemeinsamen Berührungspunkt der

Teilkreise als augenblicklichen Eingriffpunkt verzeichnet. Hierzu beschreibe man mit aO, bO, cO .... der Reihe nach um die entsprechenden Punkte a_1, b_1, c_1 .. und a_2, b_2, c_2 .... auf T_1 und T_2, welche mit a, b, c ... zusammentreffen, Kreisbögen, welche als Umhüllung die Epicykloide OE_1 und die Hypocykloide OH_2 scharf abgrenzen, sobald man ab, bc ... genügend klein wählt. Vergl S. 108.

Verlängerung der Eingrifflinie über die Centrale führt zur Verlängerung der Zahnprofile über die Teilkreise und liefert die Epicykloide OE_2 und die Hypocykloide OH_1 unter Benutzung der zusammentreffenden Teilpunkte r, s, t .. mit r_1, s_1, t_1 und r_2, s_2, t_2 ...

Bei einer aus zwei Zweigen W_1 und W_2 zusammengesetzten Eingrifflinie ist der eine Zweig W_2 nach rechts, der andere nach links an den Teilkreisen abzuwälzen, um in der Zeichnung die beiden Cykloidenbögen für jede Zahnflanke im gemeinsamen Berührungspunkte der Teilkreise richtig an einander anzuschliefsen.

Zahneingriff zu beiden Seiten der Centrale liefert unter sonst gleichen Verhältnissen stets günstigere Verzahnungen als einseitiger Eingriff, da bei gleicher Länge der Eingriffstrecke die Zahndruckrichtungen weniger weit von der gemeinsamen Tangente der Teilkreise abweichen, für welche der Zahndruck am kleinsten wird.

In der Regel werden die Zahnlängen durch **Kopfkreise** im Abstande $0{,}3\,t$ und durch **Fufskreise** im Abstande $0{,}4\,t$ vom Teilkreise begrenzt. Weiter erfolgt die Eintragung der Zahnstärken und der Rückenflanken symmetrisch zu den Brustflanken der Zähne.

Die Kopfkreise schneiden auf der Eingrifflinie die benutzte **Eingriffstrecke** AOB ab. Dieser entspricht der gleichgrofse **Eingriffbogen** J_1OK_1 bezw. J_2OK_2 der Teilkreise, welcher $> t$ sein mufs. $\frac{\text{Eingriffbogen}}{\text{Teilung}} =$ **Eingriffdauer** $\varepsilon > 1$ durch die Zahnlänge $0{,}7\,t$ im allgemeinen gesichert. Bei Trieblingen mit geringer Zähnezahl 3 bis 5 ist die Zahnlänge nach Bedürfnis aus dem Eingriffbogen zu bestimmen.

2. Zahnreibung.

Die Zahnköpfe gelangen ganz zum Eingriff, die Zahnfüfse nur auf einer begrenzten Strecke OG und OF. Zur Ermittlung von G und F dienen die durch A und B gelegten Kreisbahnen derselben um ihre Radmittelpunkte.

Bezeichnet P den mittleren Zahndruck, der durch die Grenzrichtungen OA und OB bestimmt ist, μ den Reibungskoefficienten, so ist der verhältnismäfsige Arbeitsverlust durch gleitende Reibung in Teilen der Nutzarbeit:

$$\mathfrak{V} = \mu \frac{(OD - OG + OC - OF)\,P}{(OA + OB)\,P}.$$

Diese Formel setzt die Zahnform als bekannt voraus. Für überschlägliche Bestimmungen von $\mathfrak{V}$ genügt das Verfahren a. S. 212 u. f.

3. Wahl der Eingrifflinienkrümmung.

Vergröfserung der Wälzungskreise vergröfsert die Eingriffstrecke und verkleinert P, andererseits verkleinert sich aber dadurch gleichzeitig die benutzbare Fufsprofilstrecke unter Vergröfserung des Reibungsweges. Die günstigsten Verhältnisse lassen sich in jedem einzelnen Falle nur durch Vergleich verschiedener Annahmen ermitteln, ergeben sich aber im allgemeinen für Wälzungskreise mit einem Durchmesser $<$ als der Halbmesser des umschliefsenden Teilkreises unter beschränkter Annäherung an diese mittlere Grenze. Aufserdem gewähren bei gleicher Teilung gröfsere Teilkreise d. h. gröfsere Zähnezahlen vorteilhaftere Bedingungen als kleinere. Vergröfserung des Wälzungskreisdurchmessers bis zum Halbmesser des umschliefsenden Teilkreises liefert geradlinige radiale Fufsprofile, weitere Vergröfserung konvex unterschnittene Zahnwurzeln von abnehmender Länge bis zur Beschränkung auf einen Punkt für den Grenzfall Wälzungskreis = Teilkreis. Ueberschreitungen der mittleren Grenze sind selbst bei kleinen Trieblingen für Handbetrieb möglichst zu vermeiden.

Wählt man bei Rädern gleicher Teilung für beide Zweige der Eingrifflinie unter sich kongruente Kreise von gleicher Gröfse für alle Zähnezahlen, so erhält man einen **Rädersatz,** dessen einzelne Räder ganz beliebig mit einander zusammenarbeiten können, da sich ihre Eingrifflinien stets decken. Die Abhängigkeit der Krümmung der benutzten Eingrifflinie von dem kleinsten Rade im Satz liefert ungünstige Verzahnungsverhältnisse für die gröfseren Räder und verbietet eine allgemeine Durchführung der Satzräderverzahnung.

Für Satzräder macht man gewöhnlich den Halbmesser des Rollkreises

$$= 0{,}875\, t = 2{,}75 \frac{t}{\pi}.$$

Hierbei wird für $z = 11$ das Fufsprofil gerade, für $z < 11$ unterschnitten; die Verzahnung ist indes (für Satzräder) bis $z = 7$ herunter brauchbar. $\tau = 1{,}22$ bis $1{,}60$.

Wichtige Transmissionsräder sind **stets als Einzelräder** zu konstruieren und erfordern für ruhigen Gang eine Eingriffdauer $\tau \geqq 2$ und dementsprechend grofse Zähnezahl, je nach Umständen mindestens 24 bis 36. Bei Rädern mit Handbetrieb begnügt man sich mit Teilkreisen für 10 Zähne als unterste Grenze und geht bei Zahnstangentrieblingen für Wagenwinden sogar auf $z = 4$ herab bei etwa $\tau = 1{,}2$.

4. Künstliche Lückenprofilierung.

Schrumpft das Fufsprofil auf einen Punkt zusammen, so erfordert der Gegenzahnkopf eine künstliche Vertiefung der Lücke für seine Bahn. Auch sonst kann jederzeit das Zahnwurzelprofil von dem äufsersten Punkt seines Eingriffes ausschliefslich mit Rücksicht auf die Bahn des Eckpunktes des Gegenzahnkopfes ausgebildet werden, wovon bei stark unterschnittenen Zahnwurzeln Gebrauch zu machen ist. Die Kopfbahn — Abbild. 262 — wird eingehüllt durch Kreisbögen

mit OD, r_2D, s_2D, t_2D ... um O, r_1, s_1, t_1 ... Rücksicht auf eintretende Lagenänderung der Radachsen gestattet nur eine allmählich zunehmende Annäherung des künstlichen Lückenprofils an die relative Kopfbahn, so dafs der Spielraum in der Tiefe der Lücke wächst. In G geht das künstliche Profil in das Angriffsprofil über.

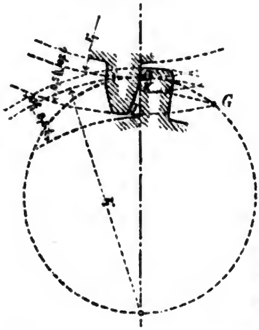
5. **Hohlräder** erhalten nach dem allgemeinen Verfahren der Cykloidenverzahnung umgekehrt wie Vollräder Hypocykloiden als Zahnköpfe, Epicykloiden als Zahnfüfse.

6. **Zahnstangen** werden mit gewöhnlichen Cykloiden für Kopf und Fufs profiliert, da ihr unendlich grofser Teilkreis eine Gerade bildet. Der Wälzungskreis für die Zahnwurzeln darf sehr grofs gewählt werden, nur sind Steigerungen bis zum Uebergang in eine Gerade, also Deckungen mit dem Teilkreis zu vermeiden.

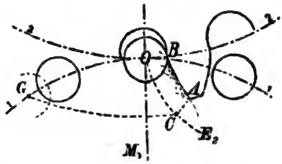
Der Wälzungskreis für die Zahnköpfe ist abhängig vom Teilkreis des eingreifenden Trieblings, sein Durchmesser womöglich $\gtrless$ als der Halbmesser des letzteren. Zur Sicherung ausreichender Eingriffdauer $\tau \geq 1{,}2$ ist erforderlichenfalls bei kleiner Zähnezahl $z = 4$ die Zahnfufslänge $0{,}4\,t$ zu vergröfsern unter gleichzeitiger Vergröfserung der Trieblings-Zahnkopflänge, so lange sich die Kopfprofile des Trieblings noch aufserhalb ihres Kopfkreises schneiden

7. **Geradflankenverzahnung** (Abbild. 263) entsteht für Voll- oder Hohlräder bei Wahl *einseitiger* Eingrifflinie, sobald man den

Abbild. 263.



Abbild. 264.



Wälzungskreis halb so grofs, als den umschliefsenden Teilkreis wählt, läfst sich also stets nur für ein Rad eines Räderpaares ausführen und ist trotz einfacher Zahnform wegen der ungünstigen Eingriffverhältnisse nicht empfehlenswert. Radiale Zahnflanke $0{,}6\,t$ lang, aufserhalb des Teilkreises zur Abrundung der scharfen Ecke mit einem Viertelkreisbogen von $0{,}1\,t$ Halbmesser verlängert; Gegenprofillücke um $0{,}2\,t$ radial vertieft.

8. **Triebstockverzahnung** (Abbild. 264) entsteht bei Wahl einseitiger Eingrifflinie, sobald der allein benutzte Wälzungskreis gleich dem umschliefsenden Teilkreis und das hierdurch auf einen Punkt

beschränkte Fufsprofil durch einen koncentrischen Kreis zu einem Cylinder erweitert wird. Durchmesser dieses Kreises $= \frac{19}{40} t$. Dies bedingt für das Gegenprofil die Wahl einer entsprechenden Aequidistante. Zahnkopfhöhe durch Eingriffbogen $OG > t$ bestimmt. Die Verzahnung läfst sich für Voll- und Hohlräder wie für Zahnstangen anwenden, ist aber wegen ungünstiger Druck- und Abnutzungsverhältnisse nur sehr vereinzelt benutzbar.

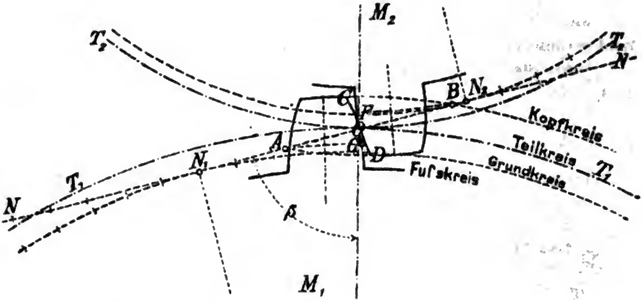
Bei allen Cykloidenrädern sind die Zahnformen nach Schablonen auszuführen.

8. Stirnräder mit gerader Eingrifflinie.

(Evolventenverzahnung.)

T_1 und T_2 die gegebenen Teilkreise, NN die gewählte Eingrifflinie (Abbild. 265).

Abbild. 265.



Fällt man von den Radmittelpunkten Lote auf die Eingrifflinie, so liefern die hiermit beschriebenen Kreise, welche NN in N_1 und N_2 berühren, die sogen. **Grundkreise** der Verzahnung. Diese nehmen an der Radbewegung mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit teil. Läfst man auch den Eingriff mit derselben Geschwindigkeit in seiner Bahn fortrücken, so bewegt er sich wie der Punkt einer Tangente, die sich von dem einen Grundkreise ab- und auf den anderen aufrollt. Die relativen Bahnen des Eingriffpunktes gegen die Radkörper, die Zahnprofile, stellen sich also als Evolventen zu den Grundkreisen dar, die man in die Zeichnung für die augenblickliche Berührung in der Rädercentrale, d. h. für O als erzeugenden Punkt einträgt. Zu dem Zweck sind auf NN und auf den Grundkreisen zu beiden Seiten von N_1 und N_2 gleiche Teilstrecken aufzutragen. Die Teilpunkte auf den Grundkreisen liefern

die Mittelpunkte für die Umhüllungskreisbögen der Evolventen, die Abstände von O von den aufeinanderfolgenden Teilpunkten auf NN die zugehörigen Halbmesser. Kopf- und Fufskreise im Abstande $0{,}3\,t$ und $0{,}4\,t$ von den Teilkreisen. Liegt der Fufskreis innerhalb des Grundkreises, so werden die Evolventen bis auf den Grund der Lücke durch radiale Ansätze verlängert (für $\beta = 75^0$ stets, wenn $z < 74$).

Begrenzung der Eingriffstrecke durch die Schnittpunkte A und B der beiden Kopfkreise.

Zahnstärke, Ermittlung der benutzten Fufsprofilstrecken OF und OG, sowie Bestimmung der Zahnreibung wie bei Cykloidenverzahnung.

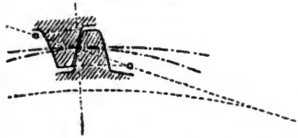
$$\text{Eingriffdauer } \tau = \frac{\text{Eingriffstrecke} \times \text{Teilkreishalbmesser}}{\text{Grundkreishalbmesser} \times \text{Teilung}} > 1.$$

Aus der Entstehung der Profile ergiebt sich:

1. die benutzbare Eingriffstrecke mufs zwischen $N_1 N_2$ liegen, weil der Fortsetzung des Eingriffs über N_1 oder N_2 hinaus als Zahnprofil ein neuer Evolventenzweig entsprechen würde, welcher von N_1 oder N_2 aus in die benachbarte Lücke hineinragt und deshalb nicht ausgeführt werden kann.
2. Tritt dieser Fall beim Entwurf ein, so ist die Eingriffdauer zu verkleinern, oder, wenn dies nicht statthaft, der Winkel β. Die hiermit verbundene Verschlechterung der Verzahnung beschränkt die kleinste zulässige Zähnezahl.
3. Winkel β stets $< \frac{\pi}{2}$, weil für $\beta = \frac{\pi}{2}$ $N_1 N_2 = 0$. In der Praxis meist $\beta = 75^0 (= 45^0 + 30^0)$. Dann $z_{min} = 14$ und $\tau = 1$ bis $2{,}5$.
4. Der Eingriff reicht nie über den Grundkreis hinaus, daher sind radiale Verlängerungen der Fufsprofile innerhalb der Grundkreise für den richtigen Eingriff ohne Einflufs.
5. Die Entfernung der Radmittelpunkte von einander ändert nur die Richtung der Eingrifflinie und verkürzt die Eingriffdauer, ohne die Gestalt der erzeugten Evolventen oder das Teilungsverhältnis der Rädercentrale zu beeinflussen. Daher gestatten Evolventenräder Entfernungsänderungen der Achsen so lange die Eingriffdauer $\tau > 1$ erhalten bleibt.

Hohlräder sind wie Vollräder zu behandeln und erhalten konkav gekrümmte Zahnflanken (Abbild. 266).

Abbild. 266.



Zahnstangen erhalten ihren unendlich grofsen Teil- und Grundkreisen entsprechend auch Evolventen von unendlich grofser Krümmung, d. h. geradlinige Profile senkrecht zur gewählten Eingrifflinie.

Evolventenprofile lassen sich unter Benutzung einer Schablone für den Grundkreis durch eine Uhrfeder mit zwei Nadelfüfsen, von

denen man den einen am Umfang der Schablone einsetzt, den anderen zur Erzeugung der Kurve benutzt, unmittelbar am Arbeitsstück vorreifsen.

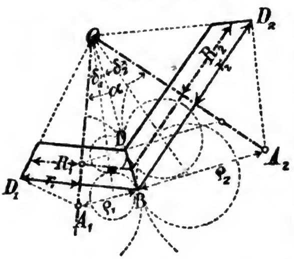
Wahl zwischen Evolventen und Cykloiden.

Evolventen (nur bei $z > 30$ für Satzräder zu empfehlen) liefern im allgemeinen einfachere Zahnformen und gestatten im neuen Zustande Aenderung der Achsenentfernungen der Räder, auf welche unter anderem bei Zahnradlokomotiven, ferner bei Stirnrädern für Blechwalzen, bei Wechselrädern für Drehbänke u. s. w. Rücksicht genommen werden mufs. Dagegen ergeben sich für zusammenarbeitende **Vollräder** unter sonst gleichen Verhältnissen bis um fast 50% gröfsere specifische Zahnpressungen, weil zwei konvex gekrümmte Profile zur Berührung gelangen, während bei **Cykloiden** sich das konvexe Profil in ein konkaves einschmiegt. Daher gröfsere Abnutzung bei Evolventenrädern und Verschwinden der Evolventenform nach längerem Betrieb.

4. Kegelräder.

Zusammenarbeitende Kegelräder müssen sich in einer gemeinsamen Kegelseite berühren und mit den Spitzen zusammenfallen. Als Teilkreise werden die Grundkreise der sich berührenden Kegelstumpfe benutzt (Abbild. 267). Die Verzahnung erfolgt auf den Mantelflächen der sogen. Ergänzungskegel $A_1 D_1 B$ und $A_2 D_2 B$, deren Erzeugenden $A_1 B$ und $A_2 B$ senkrecht auf der Erzeugenden BO der Grundkegel stehen, indem man diese Mantelflächen als Kreisausschnitte in die Zeichenebene abwickelt und dann die Kreise mit den Halbmessern ϱ_1 und ϱ_2 wie die Teilkreise von Stirnrädern zum Abwälzen der Eingrifflinie benutzt. Teilung und Zahnstärke werden auf den wirklichen Teilkreisen mit den Halbmessern r_1 und r_2, die Zahnlänge in der Richtung $A_1 A_2$, die Zahnbreite $b = BD$ in der Richtung BO gemessen. Die Berechnung der Zahnstärke erfolgt für die mittleren Grundkegelstumpfkreise mit den Halbmessern R_1 und R_2, mit der Beziehung:

Abbild. 267.



$$2 \pi R = zt.$$

Bezeichnen z_1 und z_2 die zugehörigen Zähnezahlen, so ist:

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_2 + z_1 \cos \alpha} \text{ und } \frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_1 + z_2 \cos \alpha}.$$

ferner $r_1 = R_1 + \frac{b}{2} \sin \delta_1$ und $\sin \delta_1 = \frac{z_1 \sin \alpha}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}$

Für $\alpha = 90^0$:

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2} \text{ und } \frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1},$$

$$\sin \delta_1 = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}; \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Die Zähne selbst ergeben sich als abgestumpfte Pyramiden und verjüngen sich sämtlich nach der gemeinsamen Kegelspitze O. Es empfiehlt sich, die verjüngte Profilform auch für den Punkt D zu verzeichnen, indem man auch hierfür die zugehörigen Halbmesser der Hülfsverzahnungskreise ermittelt, unter Wahl entsprechender Eingrifflinien proportional denen für die Grundkreise.

Kegelräder sind als Einzelräder mit Cykloiden- oder Evolventenverzahnung (mit $z > 24$) zu konstruieren.

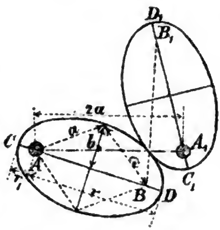
5. Schnecke und Schneckenrad.

Die Verzahnung erfolgt in der Weise, dafs der Durchschnitt der Schnecke als Zahnstange behandelt wird, in welche das Schneckenrad eingreift.*)

6. Elliptische Räder.

Nur als Stirnräder zur Uebertragung periodisch wechselnder Winkelgeschwindigkeiten ausführbar.

Abbild. 268.



Es bezeichne in Abbild. 268:

A den Drehpunkt des treibenden,
A_1 denjenigen des getriebenen Rades,
a die halbe grofse, b die halbe kleine Achse der beiden Ellipsen,
A, B, A_1, B_1 die Brennpunkte derselben,
ω die konstante Winkelgeschwindigkeit des treibenden Rades A,
ω_1 die gröfste, ω_2 die kleinste Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades A_1,
r und r_1 s. Abbild. 268.

1. Uebersetzungsverhältnis für die Berührung im Punkte D:

$$\psi_1 = \frac{AD}{A_1 C_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega},$$

im Punkte C:

$$\psi_2 = \frac{AC}{A_1 D_1} = \frac{r_1}{r} = \frac{\omega_2}{\omega}, \text{ und: } \frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = V.$$

*) Genaueres hierüber s. Keller, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891. S. 477.

2. Wenn die Entfernung der beiden Wellen $AA_1 = 2a$ und das Verhältnis V gegeben ist, so findet man b und somit die Form der elliptischen Räder durch die Gleichung:

$$b = \frac{2a\sqrt[4]{V}}{\sqrt{V}+1}.$$

3. **Elliptische Räder bei Hobelmaschinen.** Ist die Entfernung $AA_1 = 2a$ gegeben und T die **Zeit der Rückbewegung** des Schlittens, wenn die der Vorbewegung $= 1$ gesetzt wird, so findet man b durch die Formel:

$$b = a\sqrt{\frac{2\sin\left(\frac{180\,T}{T+1}\right)}{1+\sin\left(\frac{180\,T}{T+1}\right)}}.$$

Die Zähne werden zweckmäfsig so gestellt, dafs ihre Mittellinie in die Normale der Ellipse fällt. Bestimmung der Zahnform s. S. 392.

b. Berechnung der Zähne.

1. Stirnräder.

Es bezeichne:

r den Teilkreishalbmesser in cm, z die Zähnezahl $= 2\pi r : t$,
t die Teilung in cm,
b die Zahnbreite $= \psi t$ in cm, l die Zahnlänge $= 0{,}7\,t$ in cm,
s die Zahnstärke im Teilkreise gemessen, in cm,
P den Zahndruck in kg, bestimmt durch das zu übertragende Drehungsmoment $M_d = Pr$,
n die Umdrehungszahl des Rades i. d. Min.,
N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken.

Dann gilt:

$$P = kbt.$$

Gröfse des Koefficienten k.

Sind die Festigkeitsbedingungen fast allein mafsgebend, wie z. B. bei den Rädern der von Hand betriebenen Winden u. s. w. so folgt unter Voraussetzung der Belastungsweise b (Tafel S. 309): für Gufseisenzähne:

$$k = 18 \text{ bis } 21.$$

Bei Winden, welche mit grofsen Unterbrechungen oder nicht häufig mit der Maximalbelastung arbeiten, kann k auf 24 bis 28 erhöht werden, eine Stärke der Zahnwurzel von $0{,}5\,t$ bis $0{,}55\,t$ vorausgesetzt. Eine weitere Erhöhung erscheint noch zulässig nach Mafsgabe der Bemerkung 3 zur Tafel S. 309.

Mit Rücksicht auf Zufälligkeiten geht man bei Windenrädern in der Regel mit t nicht gern unter 25 mm.

Für Transmissionsräder tritt die Rücksicht auf Abnutzung in den Vordergrund; unter normalen Verhältnissen kann, falls Gufseisen auf Gufseisen läuft, gewählt werden, bei Cykloidenverzahnung und bei Umdrehungszahlen bis n etwa 250:

$$k = 20 - \sqrt{n},$$

sodafs für

$n =$	16	36	64	100	144	196	256:
$k =$	16	14	12	10	8	6	6,

wobei:

$$b \geqq \frac{42}{k}\,t.$$

Bei Holz (Weifsbuche) auf Gufseisen gelten ungefähr 0,4 bis 0,5 dieser Werte für k derart, dafs etwa

für	$n = 64$	144	256
	$k = 12 \cdot 0{,}4 = 4{,}8$	$8 \cdot 0{,}45 = 3{,}6$	$4 \cdot 0{,}5 = 2.$

Räder mit Evolventenverzahnung sind etwas geringer zu belasten.

Für Wasserradkränze, welche von Spritzwasser benetzt werden, ist k nicht höher als 10 bis 12 zu nehmen.

Für das Stirnrad, welches in das verzahnte Schwungrad einer Dampfmaschine eingreift, ist k um etwa 10% kleiner zu wählen, als in normalen Fällen.

Rädern, deren Zähne zuweilen die Eingriffsflanke wechseln oder welche stark stofsen, überhaupt solchen Rädern, deren Zähne dem Einflusse starker Schwankungen der lebendigen Kräfte in den getriebenen oder treibenden Massen ausgesetzt sind, giebt man möglichst reichliche Abmessungen. Teilweise aus diesem Grunde werden z. B. Räder zum Betriebe der Mahlgänge bei Holz auf Eisen mit $k = 2$ bis 3 ausgeführt.

Arbeiten Räder Tag und Nacht fast ununterbrochen, so mufs k kleiner gewählt werden, sofern auf ähnliche Dauer gerechnet wird, wie bei normalen Rädern, welche unter sonst gleichen Verhältnissen etwa nur 10 Stunden täglich in Betrieb sind.

Erscheint Gufseisen als Zahnmaterial ungenügend, wie z. B. bei Zahnstangenwinden, so greift man zu festeren Materialien und berechnet, sofern nur Festigkeitsrücksichten mafsgebend sind, den Zahn einfach auf Biegung.

Aus den Beziehungen:

$$75\,N = P\,\frac{2\pi r}{100}\,\frac{n}{60} \quad \text{oder} \quad M_d = Pr = 71620\,\frac{N}{n}\text{ *)};$$

$$2\pi r = zt; \qquad P = kbt = k\psi t^2$$

*) Tafel der Werte von $Pr = M_d$ aus $\frac{N}{n}$ s. S. 177.

folgt:

$$t = 10 \sqrt[3]{\frac{450}{k \psi z} \frac{N}{n}},$$

und aus:

$$M_d = P r = k \psi t^2 \frac{z t}{2 \pi}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{2 \pi}{k \psi z} M_d}.$$

Es wird gewählt das **Verhältnis** ψ:

$\psi = 2$ für Windenräder u. dergl.,

$\psi = 2$ bis 3 für gewöhnliche Transmissionsräder,

$\psi = 3$ bis 5 für Transmissionsräder, welche grofse Mengen mechanischer Arbeit zu übertragen haben,

$z \geqq 10$ bis 11 für Windenräder (unter besonderen Umständen noch weniger),

$z \geqq 24$ für Transmissionsräder, wenn möglich weit gröfser im Interesse des ruhigen Ganges; u. U. (z. B. bei Rädern mit Holzzähnen) mufs z ein Vielfaches der Armzahl sein.

Von Einflufs auf z ist noch das **Uebersetzungsverhältnis** zweier Räder.

Unter Voraussetzung ziemlich gleichförmiger Kraftübertragung ist das beste Uebersetzungsverhältnis 1 : 1; dann folgen 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, u. s. w.; 2 : 3, 2 : 5, 2 : 7 u. s. w.; 3 : 4, 3 : 5, 3 : 7 u. s. w. Gröfsere Primzahlen unter sich, wie z. B. 25 : 26, geben, wenn es hauptsächlich auf ruhigen Gang ankommt, die schlechtesten Uebersetzungsverhältnisse.

Bei periodischer Veränderlichkeit des Zahndruckes (wie z. B. bei verzahnten Schwungrädern, dem Rade eines Hammerwerkes u. s. w.) erscheint es dagegen rätlich, Verhältnisse wie 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3 u. s. w. nicht zu wählen, sondern etwa 2 : 3, 2 : 5 u. s. w. oder 3 : 4, 3 : 5 u. s. w.

Für Windenräder geht man mit dem Uebersetzungsverhältnis nicht über 1 : 10, für Transmissionsräder bei langsamem Gang, wenn möglich, nicht über 1 : 6 (wobei dann z_{min} wenigstens 36 bis 40), bei rascherem Gang etwa nur bis 1 : 4.

Holzzähne (Kämme) giebt man dem einen Rade des Paares bei gröfserer Geschwindigkeit bezw. gröfserer Umdrehungszahl in der Absicht, einen ruhigen, womöglich geräuschlosen Gang zu erzielen. In der Regel erhält das gröfsere der beiden Räder die Holzzähne; nur dann nicht, wenn die Kraftübertragung eine periodisch stark veränderliche ist und die Ursache hierzu von der Welle ausgeht, auf welcher das gröfsere Rad sitzt.

Die **Zahnstärke** wird genommen:

bei **Eisen auf Eisen:**

für rohbleibende Zähne $s = \frac{19}{40} t,$

für bearbeitete Zähne $s = \frac{19}{40} t$ bis $\frac{39}{80} t,$

bei **Holz auf Eisen** entweder für den Eisenzahn nach dem ersten und für den hölzernen Zahn nach dem zweiten der beiden letzten Werte, oder:

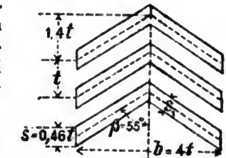
für den Eisenzahn $s = \frac{16}{40} t = 0{,}4\, t,$

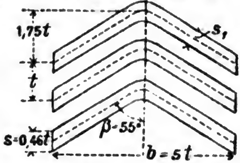
für den Holzzahn $s = \frac{23}{40} t = 0{,}575\, t.$

Zahnfufs (Zahnwurzel) erhält eine Höhe von $0{,}4\, t,$
Zahnkopf (Zahnkrone) „ „ „ „ $0{,}3\, t.$

2. Stirnräder mit Winkelzähnen. (Pfeilräder).*)

Abbild. 269.





Abbild. 270.

Ruhiger, fast reibungsfreier Gang, daher für Präcisionsräder sehr geeignet. Der bei cylindrischen Schraubenrädern auftretende Achsialdruck ist hierbei aufgehoben. Evolventenverzahnung. Material Gufseisen oder Flufsstahl. Bestimmung der Teilung t wie üblich.

Zahnhöhe $0{,}6\, t$, Zahnfufs $0{,}38\, t$, Zahnkopf $0{,}22\, t$. Zahnstärke im Teilkreis $s = 0{,}46\, t$, wirkliche Zahnstärke

$$s_1 = s \sin \beta \text{ (rd. } 0{,}376\, t).$$

Zahnbreite $b = 4\, t$, Sprung $= 1{,}4\, t$, daraus $\beta = 55^0$ (s. Abbild. 269).

Bei Kraus- oder Kammwalzen mit wenigen Zähnen (s. Abbild. 270):

$$b = 5\, t, \quad h = 1{,}75\, t, \quad \beta = 55^0;$$

Zahnspitzen abrunden.

3. Kegelräder.

Die Berechnung der Zahnstärken der Kegelräder erfolgt gewöhnlich für die gröfsten Halbmesser r_1 und r_2 (Abbild. 267), richtiger für die mittleren Halbmesser R_1 und R_2 in der gleichen Weise, wie dies unter **1.** für die Stirnräder gezeigt worden ist.

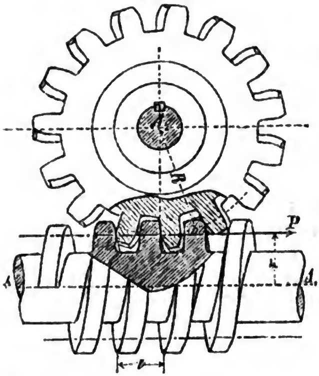
---

*) Vergl. Uhland, Kalender für Maschinen-Ingenieure. — Ausführliches hierüber s. Reuleaux, Der Konstrukteur, IV. Auflage, S. 566, sowie Bach, Maschinenelemente. II. Auflage, S. 192 bis 196.

4. Schnecke und Schneckenrad. (Abbild. 271.)

Verhältnismäfsiger Arbeitsverlust $\mathfrak{B}_s$ s. S. 214.

Abbild. 271.



Verzahnung vergl. S. 399.

Bei der Berechnung von t ist von der Gleichung:

$$P = kbt$$

(vergl. S. 400) auszugehen und für Gufseisen zu setzen:

$k = 18$, wenn nur die Festigkeit in betracht kommt,

$k = 8$ bis 12, wenn die Abnutzung mafsgebend wird;

$$b = 1{,}5\,t.$$

Das zum Drehen der Schraube erforderliche Moment beträgt:

$$M = 1{,}1\,Pr\,\frac{h + 2\pi r\mu}{2\pi r - \mu h},$$

worin bezeichnet:

h die Ganghöhe der Schraube, für eingängige Schraube gleich der Teilung t,

μ den Reibungskoefficienten (bei guter Oelung und glatten Oberflächen $= 0{,}1$).

Soll die Anordnung selbstsperrend sein, so mufs stattfinden:

$$\frac{h}{2\pi r} \lesseqgtr \mu.$$

c. Konstruktion des Radkörpers und der zugehörigen Einzelheiten.

Stärke des Zahnkranzes in der Regel $0{,}5\,t$ ausreichend (Abbild. 272), bei Kammrädern vergl. Abbild. 274 bis 276.

Unverletzte Wandstärke der gufseisernen Nabe (Abbild. 272 u. 273):

$$\delta = 10\,\text{mm} + \frac{1}{5}\left(d_0 + \frac{d}{2}\right) \text{ bis } 10\,\text{mm} + \frac{1}{4}\left(d_0 + \frac{d}{2}\right),$$

worin bedeutet:

d die Bohrung der Nabe,

d_0 diejenige Wellenstärke, welche dem zu übertragenden Drehungs-Moment $M_d = Pr = 0{,}2\,k_d\,d_0^3$ entspricht.

Nabenlänge (Abbild. 272 u. 273):

$$L = 1{,}2\,d \text{ bis } 1{,}5\,d \text{ und mehr,}$$

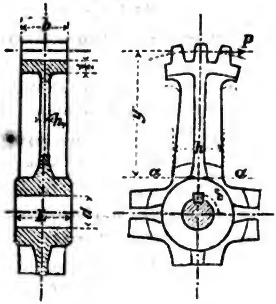
oder

$$L = b + 0{,}05\,r.$$

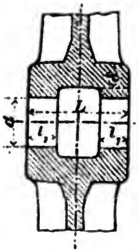
Lange Naben werden hohl gemacht (Abbild. 273) mit:

$$l_1 = 0{,}4\,d \text{ bis } 0{,}5\,d.$$

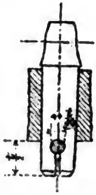
Abbild. 272.



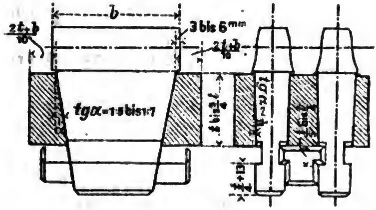
Abbild. 273.



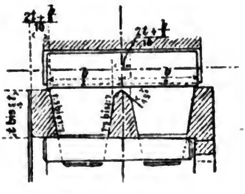
Abbild. 274.



Abbild. 275.



Abbild. 276.



Querschnitt der Befestigungskeile für normale Fälle bei Wellen von 40 mm an:

$$\text{Breite} = 2{,}5\sqrt{d}; \quad \text{Stärke } 1{,}5\sqrt{d},$$

worin d in mm.

Anzahl der Arme:

$$i = \frac{1}{8}\sqrt{D} \text{ bis } \frac{1}{7}\sqrt{D},$$

worin D den Teilkreisdurchmesser in mm bedeutet.

Der **Querschnitt** der auf Biegung beanspruchten Arme ergiebt sich für gewöhnlich unter Bezugnahme auf Abbild. 272 aus

$$Py = k_b W \frac{i}{4},$$

worin W das dem Biegungsmoment Py entsprechende Widerstandsmoment des Armquerschnittes bezeichnet.

Für normale Winden- und Transmissionsräder ist bei Wahl von k_b die Belastungsweise b (Tafel S. 309) zu grunde zu legen.

Zahnräder von Otto Gruson & Co. in Magdeburg-Buckau.

1. Gewichts-Tafel für Stirnräder.*)

Gewicht $= z(\alpha + \beta b) - \gamma$ kg.

$z =$ Zähnezahl. $b =$ Zahnbreite in mm.

Teilung	4 Arme.			6 Arme.			8 Arme.			10 Arme.		
t mm	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ
15	0,03	—	0,35	0,04	—	0,57	0,05	—	1,16	0,07	—	1,37
20	0,08	—	0,81	0,10	—	1,34	0,13	—	2,37	0,15	—	3,40
25	0,15	0,01	1,59	0,20	0,01	3,25	0,25	0,01	4,91	0,30	0,01	6,55
30	0,25	0,01	2,75	0,34	0,01	5,29	0,43	0,01	8,57	0,51	0,01	11,1
35	0,40	0,01	4,37	0,54	0,01	8,00	0,68	0,01	12,60	0,81	0,01	17,2
40	0,60	0,01	5,50	0,81	0,01	12,70	1,01	0,02	19,9	1,21	0,02	26,2
45	0,86	0,02	8,10	1,15	0,02	17,50	1,44	0,02	28,0	1,73	0,02	37,3
50	1,18	0,02	11,5	1,58	0,02	24,7	1,98	0,03	38,0	2,38	0,03	51,2
55	1,56	0,02	15,6	2,10	0,03	33,3	2,63	0,03	51,0	3,16	0,03	67,4
60	2,03	0,03	20,5	2,72	0,03	42,0	3,41	0,04	65,5	4,10	0,04	88,8
65	2,58	0,03	24,8	3,46	0,04	54,1	4,34	0,04	83,4	5,22	0,05	112,7
70	3,22	0,04	31,4	4,32	0,05	68,1	5,42	0,05	104,1	6,52	0,05	141,4
75	3,97	0,05	39,3	5,32	0,05	83,7	6,67	0,06	128,3	8,02	0,06	172,7
80	4,81	0,05	46,2	6,42	0,06	102,0	8,09	0,07	155,8	9,73	0,07	209,6
85	5,77	0,06	56,2	7,74	0,07	122,2	9,70	0,07	186,1	11,67	0,08	252,0
90	6,85	0,07	67,6	9,19	0,07	144,9	11,52	0,08	222,3	13,85	0,09	299,7
95	8,06	0,07	77,8	10,80	0,08	170,4	13,55	0,09	260 6	16,29	0,10	353,2
100	9,40	0,08	92,0	12,60	0,09	198,0	15,80	0,10	304,0	19,00	0,11	410,0

Die Gewichts-Tafel giebt die annähernden Gewichte für Stirnräder normaler Konstruktion.

Holzkammräder, Schneckenräder und **Stirnräder mit Winkelzähnen** (Präcisionsräder) wiegen annähernd so viel wie Stirnräder mit Eisenzähnen gleicher Teilung, Zähnezahl und Breite.

Kegelräder wiegen rd. 0,9 mal so viel wie Stirnräder.

*) Ueber die Gewichte grofser, aus einzelnen Teilen zusammengesetzter Stirnräder s. C. Bach, Turbinen und vertikale Wasserräder, 1886, S. 150, 176 u. f.

2. Tafel für Satzräder.

Für $Dn =$ (D in mm. n = Umdrehungszahl i. d. Min.) Zahndruck P in kg.						Teilung t mm	Teilkreisdurchmesser bei z Zähnen $D = \frac{t}{\pi} z$	Zähnezahl bei Teilkreisdurchmesser D in mm $z = \frac{\pi}{t} D$	Kopfhöhe mm	Fußhöhe mm	Breite b = $2{,}5t$ mm	Breite b = $3t$ mm	Für eine Anzahl der Arme: Blockräder	$i = 4$	$i = 6$	$i = 8$	$i = 10$
bis)000	30 000 bis 50 000	50 000 bis 80 000	80 000 bis 125 000	125 000 bis 200 000	200 000 bis 400 000								beträgt die Zähnezahl z =				
90	80	70	60	50	40	15	4,775 z	209,4 D	5	6	37	45	20—40	41—90	91—150	151—300	—
160	142	125	107	90	72	20	6,366 „	157,1 „	6	8	50	60	14—34	35—95	96—155	156—300	—
250	223	195	170	140	110	25	7,958 „	125,7 „	8	10	60	75	11—31	32—80	81—160	161—300	—
360	320	280	240	200	160	30	9,549 „	104,7 „	10	12	75	90	11—25	26—72	73—143	144—248	249—300
490	440	380	330	270	220	35	11,141 „	89,8 „	11	14	85	105	11—24	25—68	69—133	134—220	221—300
645	570	500	430	360	285	40	12,732 „	78,5 „	12	16	100	120	11—23	24—64	65—124	125—205	206—300
815	725	635	545	455	360	45	14,324 „	69,8 „	14	18	110	135	11—22	23—60	61—117	118—193	194—300
980	870	760	655	545	435	50	15,916 „	62,8 „	16	20	125	150	11—21	22—58	59—111	112—184	185—300
220	1080	945	810	675	540	55	17,507 „	57,1 „	17	23	140	165	11—20	21—55	56—105	106—176	177—300
450	1290	1130	965	805	645	60	19,099 „	52,4 „	19	25	150	180	11—19	20—52	53—101	102—168	169—285
700	1510	1320	1135	945	755	65	20,690 „	48,3 „	21	27	160	195	11—18	19—45	46—98	99—161	162—265
970	1750	1535	1315	1095	875	70	22,282 „	45,0 „	22	29	175	210	11—17	18—44	45—93	94—154	155—245
265	2010	1760	1510	1260	1005	75	23,873 „	41,9 „	24	31	190	225	11—16	17—44	45—91	92—149	150—230
575	2290	2000	1715	1430	1145	80	25,465 „	39,3 „	25	33	200	240	11—16	17—43	44—87	88—145	146—216
910	2585	2260	1940	1615	1290	85	27,056 „	37,0 „	27	35	210	255	11—15	16—43	44—84	85—140	141—200
260	2895	2535	2170	1810	1450	90	28,648 „	34,9 „	29	37	230	270	11—15	16—42	43—83	84—133	137—190
630	3230	2825	2420	2020	1615	95	30,239 „	33,1 „	31	39	240	285	11—14	15—41	42—82	83—136	134—180
025	3575	3130	2680	2235	1790	100	31,831 „	31,4 „	32	42	250	300	11—14	15—40	41—80	81—130	131—172

B. Reibungsräder.

Es bezeichne:

Q den Druck, mit welchem die beiden Scheiben gegen einander gepreſst werden,
P die durch das Reibungsräderpaar zu übertragende Kraft,
μ den Reibungskoefficienten (vergl. S. 199) u. zw. gleich

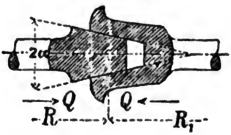
0,1	bis 0,15	bei	Guſseisen	auf Guſseisen,
0,15	„ 0,2	„	„	„ Papier,
0,2	„ 0,3	„	„	„ Leder,
0,3	„ 0,5	„	„	„ Holz.

Die kleineren Werte sind zu benutzen, wenn die Reibflächen glatt und fett sind, was gewöhnlich der Fall ist.

Damit gilt:

$$P \leqq Q\mu.$$

Abbild. 277.



Bei Keilnuteneingriff mit dem Keilnutenwinkel 2α ergiebt sich:

$$P \leqq Q \frac{\mu}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha},$$

woraus beispielsweise für $\alpha = 15^0$ und $\mu = 0,1$ folgt:

$$P \leqq 0,28\,Q.$$

C. Riemen- und Seilbetrieb.

Ueber den durch Gleiten des Riemens oder Seiles auf den Rollen entstehenden **Arbeits- und Geschwindigkeitsverlust** s. S. 216.

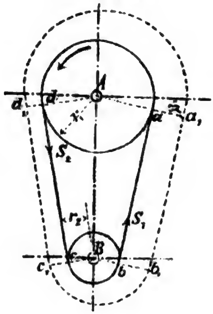
a. Spannungsverhältnisse.

Unter Bezugnahme auf Abbild. 278, worin A die treibende Scheibe sein möge, so daſs ab der ziehende und cd der gezogene Faden ist, bezeichne:

S_1 die Spannung im ziehenden Faden in kg,
S_2 die Spannung im gezogenen Faden in kg,
S_0 die Spannung, mit welcher der Faden aufgelegt werden muſs, in kg,
α den kleineren der beiden Centriwinkel, welche den vom Faden umschlungenen Bögen entsprechen,
μ den Reibungskoefficienten für die Berührung zwischen Faden und Rollenoberfläche (vergl. S. 215),
r_1 den Halbmesser der treibenden Rolle in cm,
r_2 den Halbmesser der getriebenen Rolle in cm,

P die durch den Faden zu übertragende Umfangskraft $= S_1 - S_2$, in kg,
f den Querschnitt des Fadens in qcm,
v die Geschwindigkeit des Fadens in m i. d. Sek.,
q das Gewicht des Fadens in kg f. d. lfd. m,
$q_1 = \frac{q}{f}$ das Gewicht eines Fadenprismas von 1 qcm Querschnitt und 1 m Länge,
k_z die von S_1 herrührende Spannung des Fadens in kg f. d. qcm $= \frac{S_1}{f}$,
e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= 2{,}71828$,
g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m,

Abbild. 278.



dann ist:

$$S_1 = P \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} + q \frac{v^2}{g};$$

$$S_2 = P \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} + q \frac{v^2}{g};$$

$$P = \left(S_1 - q \frac{v^2}{g}\right) \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} = \left(k_z - q_1 \frac{v^2}{g}\right) \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} f..$$

Setzt man:

$$\left(k_z - q_1 \frac{v^2}{g}\right) \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} = k,$$

so wird die **zu übertragende Kraft:**

$$P = kf.$$

Die durch einen gegebenen Faden übertragbare **Arbeitstärke** Pv wird zu einem **Maximum** $(Pv)_{max}$ für:

$$v = \sqrt{\frac{k_z g}{3 q_1}};$$

$$(Pv)_{max} = \frac{2}{3} k_z \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} f \sqrt{\frac{k_z g}{3 q_1}}.$$

Wenn der Faden nicht sehr stark durchhängt, kann man setzen:

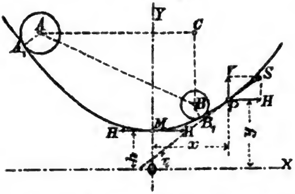
$$S_0 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{P}{2} \frac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1} + q \frac{v^2}{g}.$$

Während des **Betriebes** verschwindet das Glied $q\frac{v^2}{g}$ für den **Achsdruck,** so dafs dann dieser bei parallelen Fäden sich ergiebt zu:

$$P\frac{e^{\mu\alpha}+1}{e^{\mu\alpha}-1}.$$

Thatsächlich bildet der als durchaus biegsam vorausgesetzte Faden eine **Kettenlinie** $A_1 M B_1$ (Abbild. 279). A und B sind die Tragrollen.

Abbild. 279.



Wird die Kettenlinie auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, für welches die x-Achse Leitlinie und die y-Achse Symmetrieachse ist, und bedeuten:

x, y die Koordinaten des beliebigen Punktes P der Kettenlinie,

s die Länge des Kettenlinienbogens $\widehat{MP}$,

H die wagerecht gerichtete Spannung im Scheitel M,

S die Spannung im Punkte P,

$V = q\,s$ das Gewicht des Seilstückes $\widehat{MP}$,

$MO = h$ den Parameter der Kettenlinie,

so ist:

$$H = h\,q; \qquad S = y\,q;$$

aufserdem gelten die auf S. 112 gegebenen Beziehungen zwischen x, y, s und τ für die Kettenlinie.

Bei der Anordnung eines solchen Fadenbetriebes kann für gewöhnlich in folgender Weise vorgegangen werden.

Die Gröfse der Fadenspannung $S = y\,q$ pflegt in den Fällen der Anwendung meist nicht bedeutend abzuweichen von ihrer wagerechten Komponente, der Scheitelspannung H: infolgedessen kann die letztere annähernd als Fadenspannung genommen werden, d. h.

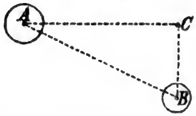
für den ziehenden Faden $S_1 \sim H_1 = h_1\,q = P\frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha}-1} + q\frac{v^2}{g}$;

" " gezogenen " $S_2 \sim H_2 = h_2\,q = P\frac{1}{e^{\mu\alpha}-1} + q\frac{v^2}{g}$.

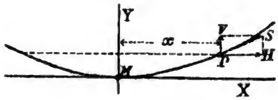
Hierdurch sind die Parameter h_1 und h_2 für die beiden Kettenlinien und daher diese selbst bestimmt. Es wird nun zunächst die eine, etwa die erstere, aufgezeichnet und die Abbild. 280 hergestellt, in welcher BC den Höhen-Unterschied der beiden Rollenachsen

und AC deren wagerechte Entfernung bedeutet, so dafs also BA die Centrale ist. Die Abbild. 280 wird nun auf der gezeichneten Kettenlinie so verschoben, dafs diese die beiden Rollen berührt und AC wagerecht liegt. Hierauf wird die zweite Kettenlinie des gezogenen Fadens gezeichnet und so gelegt, dafs sie die beiden Rollen auf der anderen (oberen) Seite berührt und ihre Leitlinie wagerecht zu liegen kommt.

Abbild. 280.



Abbild. 281.



Bei verhältnismäfsig nicht bedeutendem Höhenunterschied CB der beiden Rollenachsen kann an Stelle der Kettenlinie die **Parabel,** Abbild. 281, gesetzt werden:

$$y = \frac{q}{2H} x^2 .$$

Mit $$q = q_1 f \text{ und } S_1 \backsim H = k_z f$$ wird:

$$y = \frac{q_1}{2k_z} x^2 .$$

Angenähert ist (vergl. S. 106):

$$s = x\left(1 + \frac{2}{3}\frac{y^2}{x^2}\right).$$

b. Riemenbetrieb.

Die Anordnung mufs derartig sein, dafs bei jeder Scheibe die Mittellinie des auflaufenden Riementeils in die Mittellinie der Scheibe fällt.

1. Riemen.

Es bezeichne:

b die Breite des Riemens in cm,
s „ Stärke „ „ „ „,
(für einfache Lederriemen $s = 0{,}4$ bis $0{,}8$ cm,
für Doppelriemen bis 1,6 cm)
D den Durchmesser der Scheibe in cm,
n deren Umdrehungszahl i. d. Min.,
N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken.

Dann folgt unter mittleren Verhältnissen für die durch den Riemen **zu übertragende Kraft** P aus

$$P = k\,b\,s, \text{ mit } k = 10 \text{ bis } 12{,}5:$$
$$P = 10\,b\,s \text{ bis } P = 12{,}5\,b\,s,$$

je nach der Beschaffenheit des Leders, wobei vorausgesetzt ist (Bezeichn. s. S. 408 u. 409):

$\alpha \sim 2{,}8$. $v \sim 15$ m, $\mu = 0{,}25$, $q_1 = 0{,}11$, $k_z \doteq 22{,}5$ bis $27{,}5$. (Anderenfalls ist auf die Gleichung für P s. S. 409 zurückzugreifen.)

Hiernach überträgt ein Riemen unter normalen Verhältnissen f. d. qcm Querschnitt und f. 1 m Geschwindigkeit 1 : 7,5 bis 1 : 6 PS, d. h.:

$$f = b\,s = 6\,\frac{N}{v} \text{ bis } 7{,}5\,\frac{N}{v}.$$

Riemen aus Gummi, Baumwolltuch u. s. w. können in ähnlicher Höhe belastet werden.

G e s c h r ä n k t e R i e m e n sind mit etwas geringerem Koefficienten zu berechnen, falls der Achsenabstand nicht reichlich ausfällt.

Riemen, welche d u r c h G a b e l n g e f ü h r t und oft verschoben werden, oder die auf verhältnismäfsig k l e i n e n S c h e i b e n laufen oder sonst unter ungünstigen Verhältnissen arbeiten, sind entsprechend geringer zu belasten.

Die durch Riemen übertragbare **Arbeit** wird bei $k_z = 27{,}5$ kg f. d. qcm zu einem **Maximum** für:

$$v = 28{,}6 \text{ m i. d. Sek.}$$

Dieses Maximum beträgt f. d. qcm Riemenquerschnitt 3,5 PS.

Der **Druck,** welchen der gespannte Riemen während des Betriebes **auf die Achse** absetzt, ergiebt sich bei parallelem S_1 und S_2 mit $\mu = 0{,}25$ und $\alpha = 2{,}8$ zu

$$3\,P.$$

(Tafel hierzu s. S. 413.)

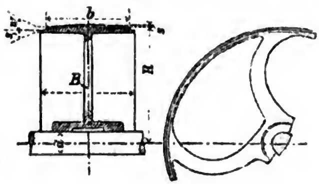
2. Riemenscheiben.

Breite des Scheibenkranzes: $B = 10 + 1{,}1\,b$,

Geschränkte Riemen, sowie solche, welche unruhig laufen:

$$B = 40 + 1{,}1\,b,$$

Abbild. 282.



Randstärke des Kranzes (Gufseisen):

$$s_1 = 3 + \frac{D}{200},$$

Wölbung des Kranzes:

$$w = \frac{1}{4}\sqrt{B} \text{ bis } \frac{1}{3}\sqrt{B},$$

Anzahl der Arme:

$$i = \frac{1}{7}\sqrt{D}.$$

In diesen empirischen Angaben sind die Gröfsen in mm einzuführen.

Tafel über Riemenabmessungen.

Riemenbreite b.	Riemenstärke s.	$k = 10$ kg f. d. qcm.			$k = 12,5$ kg f. d. qcm.		
		Uebertragbare Kraft f. 1 mm Riemenbreite.	Gesamte übertragbare Kraft P.	Werte von $\frac{N}{rn}$. (r in mm)	Uebertragbare Kraft in kg f. 1 mm Riemenbreite.	Gesamte übertragbare Kraft P.	Werte von $\frac{N}{rn}$. (r in mm)
mm	mm	kg	kg		kg	kg	
50	4	0,4	20	0,0000279	0,5	25	0,0000349
60	4	0,4	24	0,0000335	0,5	30	0,0000419
70	5	0,5	35	0,0000489	0,625	43,75	0,0000611
80	5	0,5	40	0,0000558	0,625	50	0,0000698
90	6	0,6	54	0,0000754	0,75	67,5	0,0000942
100	6	0,6	60	0,0000837	0,75	75	0,0001047
110	6	0,6	66	0,0000922	0,75	82,5	0,0001152
120	7	0,7	84	0,0001173	0,875	105	0,0001466
130	7	0,7	91	0,0001271	0,875	113,75	0,0001588
140	7	0,7	98	0,0001368	0,875	122,5	0,0001710
160	7	0,7	112	0,0001564	0,875	140	0,0001955
180	7	0,7	126	0,0001759	0,875	157,5	0,0002199
200	7	0,7	140	0,0001955	0,875	175	0,0002444
220	8	0,8	176	0,0002458	1,00	220	0,0003072
240	8	0,8	192	0,0002681	1,00	240	0,0003351
260	8	0,8	208	0,0002904	1,00	260	0,0003630
280	8	0,8	224	0,0003128	1,00	280	0,0003910
300	8	0,8	240	0,0003351	1,00	300	0,0004189
320	8	0,8	256	0,0003575	1,00	320	0,0004468
350	8	0,8	280	0,0003910	1,00	350	0,0004887
400	8	0,8	320	0,0004468	1,00	400	0,0005585
450	8	0,8	360	0,0005027	1,00	450	0,0006283
500	8	0,8	400	0,0005585	1,00	500	0,0006981

Armquerschnitt in der Regel elliptisch.

Ist h_1 die grofse und $0,4\,h_1$ die kleine Achse der Ellipse, so findet sich:

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{1,25}{i}\,b\,s\,D},$$

worin bs mindestens 3 qcm.

8. Stufenscheiben.

Riemenlänge für **offene Riemen** nach Abbild. 278 (S. 409), wenn $AB = e$ gesetzt wird:

$$L = \overline{ab} + \widehat{bec} + \overline{cd} + \widehat{dfa} = \pi(r_1 + r_2) + 2\beta(r_1 - r_2)$$

$$+ 2e\sqrt{1 - \left(\frac{r_1 - r_2}{e}\right)^2} \sim \pi(r_1 + r_2) + 2e + \frac{(r_1 - r_2)^2}{e}. \text{*)}$$

Soll nun L für ein zweites zusammengehöriges Halbmesserpaar R_1 und R_2 denselben Wert besitzen, so mufs sein, wenn gegeben

$$R_1 : R_2 = \varphi:$$

$$R_2 = -\frac{1}{2}\frac{\varphi + 1}{(\varphi - 1)^2} e\pi +$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\varphi + 1}{(\varphi - 1)^2} e\pi\right)^2 + (r_1 + r_2)e\pi + (r_1 - r_2)^2},$$

und hieraus:

$$R_1 = R_2\,\varphi.$$

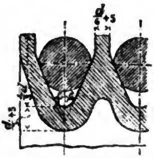
Für **gekreuzte Riemen** mufs sein:

$$R_1 + R_2 = r_1 + r_2.$$

c. Hanfseil- und Baumwollseilbetrieb.

Durchmesser der Seilscheibe, wenn möglich, bei Hanfseil mindestens das 40-fache der Seildicke.

Abbild. 283.



Bezeichnet d den Durchmesser des Seils in cm, so beträgt bei keilförmiger Rille, Abbild. 283:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{8}{20} \text{ bis } \frac{9}{20},$$

die **übertragbare Kraft** P:

$$P = 3\,d^2 \text{ bis } 5\,d^2,$$

je nach den Verhältnissen, unter denen das Seil zu arbeiten hat, und je nach der Güte des Seils.

Der gröfsere Wert erscheint nur dann zulässig, wenn der Betrieb wagerecht oder nur wenig schief, der Achsenabstand genügend, der Wechsel in der Gröfse von P nicht zu bedeutend, die Scheibendurchmesser reichlich bemessen sind, die Geschwindigkeit v etwa 20 m nicht überschreitet, das Seil aus vorzüglichem Hanf gefertigt ist und die Spleifsstellen mit Sorgfalt hergestellt wurden.

---

*) Vergl. Kohn, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1886, S. 1004.

Hiernach überträgt das Seil f. 1 Kreiscentimeter (d. i. für $d = 1$ cm) und f. 1 m Geschwindigkeit 1:25 bis 1:15 PS, d. i.

$$d^2 = 15 \frac{N}{v} \text{ bis } 25 \frac{N}{v}.$$

Bei Verwendung von z Seilen:

$$z\, d^2 = 15 \frac{N}{v} \text{ bis } 25 \frac{N}{v}.$$

Stärke der Seile zwischen 30 und 55 mm.

Die durch ein Hanfseil übertragbare Kraft wird zu einem Maximum bei etwa 25 m Geschwindigkeit i. d. Sek.

Baumwollseile gestatten kleinere Rollendurchmesser herab bis auf 30 d, sowie geringere Achsenentfernung. Belastung ähnlich wie bei Hanfseilen.

Transmissionsseile

aus badischem **Schleifshanf.** *)		aus hellstem **Manillahanf.** *)		aus bester amerik. **Baumwolle.** *)	
Durchm. mm	Gewicht f. d. lfd. m kg	Durchm. mm	Gewicht f. d. lfd. m kg	Durchm. mm	Gewicht f. d. lfd. m kg
25	0,540	25	0,480	25	0,480
30	0,750	30	0,610	30	0,730
35	0,960	35	0,780	35	0,870
40	1,220	40	1,030	40	1,080
45	1,480	45	1,290	45	1,295
50	1,750	50	1,600	48	1,455
55	2,100	55	1,820	50	1,680
				55	1,905

d. Drahtseilbetrieb.

Es bezeichne:

d den Durchmesser des Seils in cm,
δ „ „ der einzelnen Eisendrähte in cm,
i deren Anzahl,
D den Durchmesser der Seilscheibe in cm,
E den Elasticitätsmodul des Drahtes in kg f. d. qcm;

dann gilt für den **Durchmesser der Seilscheibe:**

$$D \geq 150\, d.$$

Geringster **Abstand der Achsen** 15 bis 20 m, gröfster 125 m.

*) Nach Felten & Guilleaume in Köln (Rhein).

Für Eisenseile wähle man die **Gesamtspannung:**

$$\frac{S_1}{i\,\frac{\pi\,\delta^2}{4}} + \left(\frac{3}{8}E\right)\frac{\delta}{D} \leqq 1050 \text{ kg f. d. qcm.}$$

Unter mittleren Verhältnissen (mit den Bezeichnungen von S. 408 u. 409),

d. i. $D = 200\,d$; $i\,\frac{\pi\,\delta^2}{4} = 0{,}42\,\frac{\pi\,d^2}{4}$; $q = 0{,}35\,d^2$; $\mu = 0{,}25$, $\alpha = 2{,}8$; $v = 25$ m, und bei genügendem Achsenabstand wird: $S_1 = 225\,d^2$; $P = 100\,d^2$.

Dann überträgt das Drahtseil f. d. Kreiscentimeter (d. i. für $d = 1$ cm) und f. 1 m Geschwindigkeit $\frac{4}{3}$ PS, folglich:

$$d^2 = \frac{3}{4}\,\frac{N}{v}.$$

Die durch ein Eisendrahtseil übertragbare Kraft wird zu einem Maximum für etwa 45 m Geschwindigkeit.

Die **Seilscheiben** werden meist mit Lederausfütterung versehen. Doch können sie auch ohne Ausfütterung benutzt werden, nur mufs dann die Rille entsprechend dem Durchmesser des Seiles ausgedreht sein.

(Vergl. auch Lastseile und Rollen u. s. w. unter III.)

Bei Bestellung von Transmissionsseilen empfiehlt sich die Angabe der zu übertragenden PS, der Scheibendurchmesser, des Achsenabstandes, der Umdrehungszahlen, des Rillenprofils und dessen etwaiger Ausfütterung.

Dauer eines Transmissions-Drahtseiles durchschnittlich 2 bis 3 Jahre bei fortwährendem Betriebe, gute Einrichtung vorausgesetzt. Zur Verhütung des Rostens streiche man die Drahtseile bisweilen mit gekochtem Leinöl oder Seilfirnis. Stahldrahtseile am besten aus verzinkten Drähten.

Bei Trieben von 1000 m Länge und darüber ordne man statt der Leitrollen besser zweirillige Seilscheiben in Abständen von etwa 100 m an, so dafs die einzelnen Seillängen nur 200 m betragen.

Gewichte von Seilscheiben (mit gufseisernen Armen).

		Einteilige Scheiben.								Zweiteilige Scheiben.			
Seilscheiben-Durchmesser.	mm	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000	3250	3500	3750
Gewicht der einrilligen Seilscheiben.	kg	106	135	160	215	270	330	400	575	1015	1200	1410	1600
Gewicht der zweirilligen Seilscheiben.	kg	170	210	255	315	395	510	645	825	1270	1580	1950	2300

Transmissions-Drahtseile v. Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

1. Normale Seilscheiben-Durchmesser.				2. Kleine Seilscheiben-Durchmesser.			
Seil-dicke.	Zahl der Drähte im Seil.	Dicke der Drähte im Seil.	Ungef. Gewicht f. 100 m Seil.	Seil-dicke.	Zahl der Drähte im Seil.	Dicke der Drähte im Seil.	Ungef. Gewicht f. 100 m Seil.
mm	Stück	mm	kg	mm	Stück	mm	kg
9	36	1,0	26	11	48	1,0	36
10	42	1,0	31	12	54	1,0	40
11	36	1,2	38	13	60	1,0	45
12	42	1,2	45	14	64	1,0	48
13	36	1,4	51	15	72	1,0	55
14	42	1,4	61	16	64	1,2	69
15	48	1,4	70	18	72	1,2	79
16	42	1,6	79	20	80	1,2	88
18	48	1,6	91	22	80	1,4	120
20	48	1,8	115	24	88	1,4	133
22	54	1,8	130	26	80	1,6	156
24	60	1,8	146	28	88	1,6	173
26	60	2,0	180	30	80	1,8	198
28	66	2,0	200	32	88	1,8	219
30	72	2,0	220	34	96	1,8	241
				37	96	2,0	297

3.

Transmissions-Drahtseile ohne Hanf in den Litzen

(nur für grofse Achsenabstände und grofse Seilscheiben).

Kleinster zulässig. Durchm. der Seilscheiben.	Drahtdicke.	Durchmesser des Seiles.	Zahl der Drähte.	Ungef. Gewicht f. 100 m Seil.	Kleinster zulässig Durchm. der Seilscheiben	Drahtdicke.	Durchmesser des Seiles.	Zahl der Drähte.	Ungef. Gewicht f. 100 m Seil.
mm	mm	mm		kg	mm	mm	mm		kg
1000	1,0	7	24	18	1300	1,3	9	24	30
		9	42	32			12	42	54
		11	49	38			14	49	63
		12	56	42			15	56	71
1100	1,1	7,5	24	22	1400	1,4	10	24	35
		10	42	38			13	42	62
		12	49	45			15	49	74
		13	56	51			17	56	82
1200	1,2	8,5	24	26	1500	1,5	10,5	24	41
		11	42	46			14	42	71
		13	49	54			16	49	84
		14	56	60			18	56	95

Kleinster zulässig. Durchm der Seilscheiben. mm	Drahtdicke. mm	Durchmesser des Seiles. mm	Zahl der Drähte.	Ungef. Gewicht f. 100 m Seil. kg	Kleinster zulässig. Durchm. der Seilscheiben. mm	Drahtdicke. mm	Durchmesser des Seiles. mm	Zahl der Drähte.	Ungef. Gewicht f. 100 m Seil. kg
1600	1,6	11	24	46	1800	1,8	13	24	58
		15	42	81			17	42	103
		17	49	96			19	49	122
		19	56	108			21	56	136
1700	1,7	12	24	52	2000	2,0	14	24	72
		16	42	92			19	42	127
		18	49	108			21	49	150
		20	56	121			23	56	168

D. Zapfen.*)

In folgendem ist unter **Flufsstahl** überall Tiegelflufsstahl (bisher Gufsstahl genannt) zu verstehen.

a. Tragzapfen.

1. Der cylindrische Tragzapfen.

Es bezeichne:

P den Zapfendruck in kg,

d den Durchmesser des Zapfens in cm,

l die Länge des Zapfens in cm,

k_b die zulässige Biegungsspannung in kg f. d. qcm,

k den zulässigen Flächendruck in kg f. d. qcm.

Die Rücksicht auf **Festigkeit** ergiebt für den vollen Zapfen:

$$P\frac{l}{2} = 0{,}1\, k_b\, d^3,$$

und für den hohlcylindrischen Zapfen, dessen äufserer Durchmesser d_2, dessen innerer d_1:

$$P\frac{l}{2} = 0{,}1\, k_b\, \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}. \quad \text{(Näherungsformel s. S. 422.)}$$

Mit Rücksicht auf die Gröfse des zulässigen **Flächendruckes** wird:

$$P = k\, l\, d.$$

---

*) Ueber Flächendruck und Reibungswiderstand der Zapfen s. S. 205 u. f. Eine während des Druckes erschienene Arbeit von Reuleaux über diesen Gegenstand s. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, S. 932.

Vergl. ferner Bach, Maschinenelemente, II. Auflage, S. 277 bis 316.

Aus beiden Rücksichten folgt:

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{0{,}2\,k_b}{k}}.$$

In den meisten Fällen wechselt die Kraftrichtung (Belastungsweise *c* der Tafel S. 309), daher ist die

zulässige Biegungsspannung

für:	Flufsstahl	Schweifseisen	Gufseisen
$k_b =$	500	300 bis 400	150 bis 250 kg f. d. qcm.

Der **Flächendruck** k kann für ununterbrochen sich drehende Zapfen in nachstellbaren Lagern unter normalen Verhältnissen gesetzt werden:

Gehärteter Flufsstahl auf gehärtetem Flufsstahl bis . 150 kg f. d. qcm,
" " " Bronze . . . . 80 " "
ungehärteter " " " . . . . 50 " "
Schweifseisen mit glatter, dichter Oberfläche auf Bronze 40 kg f. d. qcm,
" " nicht ganz reiner " oder Gufseisen auf Bronze . . . . 30 " "
" mit nicht ganz reiner Oberfläche auf Gufseisen . . . . 25 " "
" auf Pockholz bei Wasserschmierung . 25 " "

Für Zapfen, welche sich nicht beständig drehen, sondern schwingen, kann höher gegangen werden; für Zapfen von Seil-, Kettenrollen u. s. w., welche sich nur unterbrochen drehen, und bei denen die Abnutzung entweder gering ist oder nicht ins Gewicht fällt, werden die oben gegebenen Werte 50 bis herab auf 25 um das Doppelte bis Dreifache überschritten.

Für die aus Flufsstahl gefertigten Kurbel- und Kreuzkopfzapfen normaler Dampfmaschinen wählt man $k = 60$ bezw. 75 bis 80 kg f. d. qcm.

Damit der Zapfen **nicht heifs läuft,** mufs sein:

$$l \geq \frac{P\,n}{30000\,A_z}.$$

Hierin ist A_z eine Erfahrungszahl (die zulässige specifische Reibungsarbeit). Diese darf für Flufsstahlzapfen auf Bronze, bei denen beide Lagerschalen die Wärme abführen, unter Voraussetzung guter Luftkühlung (Kurbelzapfen von Dampfmaschinen u. s. w.) zu 1,25 angenommen werden. Findet die Wärmeabführung vorzugsweise nur durch die eine Lagerschale statt und fehlt der kühlende Luftzug, so sinkt A_z herunter auf 0,5. Durch Kühlung mit Wasser läfst sich

A_z wesentlich steigern. Je vorzüglicher die Laufflächen sind, um so gröfser darf unter sonst gleichen Verhältnissen A_z gewählt werden.*)

Da es sich für die zuletzt gegebene Beziehung um **Reibungsarbeit** handelt, so ist bei starker Veränderlichkeit von P für diese Gröfse nicht der gröfste Wert, sondern ein mittlerer Betrag einzuführen.

2. Der kugelförmige Tragzapfen.

Meist nur als **Kurbelzapfen** verwandt. Bezeichnet für diesen Fall d_1 den Kugeldurchmesser, so gilt, wenn Flufsstahl auf Bronze gleitet:

$$P = 40\, d_1^2,$$

und mit Rücksicht auf das Heifslaufen unter Voraussetzung genauer Kugelform:

$$d_1 \geqq \frac{P\,n}{30\,000}.$$

b. Spurzapfen.

1. Der ebene Spurzapfen.

Bezeichnet d den Durchmesser des Zapfens und k den zulässigen Flächendruck (vergl. S. 419), so gilt:

$$P = 0{,}8\, k\, d^2;$$

$$d \geqq \frac{P\,n}{60\,000\, A_z}.$$

Bei gehärtetem Stahl auf Bronze für gewöhnlich $A_z = 0{,}67$ (vergl. S. 419), unter Umständen weicht man nicht unbedeutend davon ab.

2. Der ringförmige Spurzapfen.

$$P = 0{,}8\, k\,(d_2^2 - d_1^2);$$

$$d_2 - d_1 \geqq \frac{P\,n}{60\,000\, A_z}.$$

d_2 äufserer, d_1 innerer Durchmesser; über k und A_z vergl. das unter **1.** Gesagte.

3. Kammzapfen.

Mit
$$\frac{d_1 + d_2}{2} = d_m, \quad \frac{d_2 - d_1}{2} = b$$

ergiebt sich hierfür, wenn $\mathfrak{z}$ die Anzahl der tragenden Ringe ist:

$$P = 3\, k\, b\, d_m\, \mathfrak{z};$$

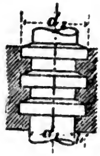
$$b\,\mathfrak{z} \geqq \frac{P\,n}{120\,000\, A_z}.$$

---

*) In neuster Zeit geht man häufig mehr oder minder weit über die angegebenen Werte hinaus, was unter Umständen nicht unbedenklich ist. Vergl. hierüber Bach, Maschinenelemente, II. Aufl., S. 303 u. f.

Bei Kammzapfen hält es schwer, die gleichmäfsige Berührung sämtlicher Ringflächen zu sichern; daher ist es ratsam, k und A_z niedriger in die Rechnung einzuführen, wie unter 1. Hinsichtlich A_z kommt überdies in betracht, dafs die Wärmeableitung durch den Körper des Kammzapfenlagers nach aufsen verhältnismäfsig weit schwieriger. Mit Rücksicht hierauf wird bei Luftkühlung gesetzt:

Abbild. 284.



$$b\,\mathfrak{z} \geq \frac{P\,n}{20000}.$$

c. Wagenschneiden.

Aus glashartem, nicht angelassenem Stahl.

Zulässiger Druck f. 1 mm Schneidenlänge bei kleinem Ausschlage 50 bis 120 kg, bei gröfserem Ausschlage rd. 20 kg.

Bei den Schneiden grofser Festigkeitsmaschinen (z. B. der Werder-Maschine) finden sich Drücke bis zu 300 kg f. 1 mm, bei einer Abrundung der Schneide mit etwa 0,75 mm Durchmesser.

E. Achsen und Wellen.

In folgendem ist unter **Flufsstahl** überall Tiegelflufsstahl (bisher Gufsstahl genannt) zu verstehen.

Es bedeute:

M_b das biegende Moment, M_d das drehende Moment in cmkg,
d den Durchmesser einer vollen Welle (Achse) in cm,
d_1 den inneren Durchmesser einer hohlen Welle (Achse) in cm,
d_2 den äufseren Durchmesser einer hohlen Welle (Achse) in cm,
$J = \frac{\pi}{64} d^4 \sim \frac{1}{20} d^4$ bezw. $\frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4) \sim \frac{1}{20}(d_2^4 - d_1^4)$, *)
N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken,
n die Anzahl der Umdrehungen der Welle i. d. Min.,
E den Elasticitätsmodul des Materials der Welle (Achse), in kg f. d. qcm,
$G = 0{,}4\,E$ den Schubelasticitätsmodul, in kg f. d. qcm.

a. Achsen.

Die hier allein in Rechnung zu ziehende **Biegungsspannung** ergiebt

für den **vollen Kreis**:

$$M_b = \frac{1}{10} k_b d^3,$$

für den **Kreisring**:

$$M_b = \frac{1}{10} k_b \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}.$$

---

*) Tafel für $J = \frac{\pi}{64} d^4$ s. S. 326.

Ist die Wandstärke der Hohlachse gering und wird gesetzt:

$$\frac{d_2 - d_1}{2} = s; \qquad \frac{d_2 + d_1}{2} = d_m,$$

so findet sich angenähert, da $\frac{d_2{}^4 - d_1{}^4}{d^2} \sim 8\, d_m^2\, s$:

$$M_b = 0{,}8\, k_b\, d_m^2\, s.$$

In den meisten Fällen wechselt die Kraftrichtung (Belastungsweise *c*, Tafel S. 309), daher ist

bei Flufsstahl	Schweifseisen	Gufseisen	Eichenholz
$k_b = 500$	300 bis 400	150 bis 250	60 kg f. d. qcm. (Wasserradachsen.)

Wechselt die Kraftrichtung nicht vollständig oder überhaupt nicht, so ist k_b nach Mafsgabe der Tafel S. 309 gröfser zu wählen.

b. Wellen.

Bei Beanspruchung auf **Drehung** allein gilt

für den **vollen Kreis:**

$$M_d = \frac{1}{5}\, k_d\, d^3,$$

für den **Kreisring:**

$$M_d = \frac{1}{5}\, k_d\, \frac{d_2{}^4 - d_1{}^4}{d_2} \sim 1{,}6\, k_d\, d_m^2\, s.$$

(Formel für den Drehungswinkel ψ der Welle s. S. 353.)

1. In den Fällen, in welchen das **Drehungsmoment ein gleichbleibendes, ruhig wirkendes** ist, kann k_d genommen werden:

für Flufsstahl = 600, für Gufseisen = 150,
für Schweifseisen = 360, bei vorzüglicher Beschaffenheit = 480 kg f. d. qcm.

2. **Schwankt M_d ohne Stofs abwechselnd** oder wenigstens oft **zwischen 0 und seinem gröfsten Werte,** so gilt für k_d:

400 (Flufsstahl), 240 bis 320 (Schweifseisen), 100 (Gufseisen) kg f. d. qcm.

3. **Wechselt M_d ohne eigentliche Stöfse fortgesetzt** oder wenigstens oft **zwischen $+M_d$ und $-M_d$**, so können für k_d die Werte

200 (Flufsstahl), 120 bis 160 (Schweifseisen), 50 (Gufseisen) kg f. d. qcm

eingeführt werden.

Eigentlichen Stofswirkungen ist durch besondere Beurteilung Rechnung zu tragen.

Die Belastungsweise 1. kommt bei Wellen kaum vor; am nächsten stehen z. B. die Wellen von Turbinen, Wasserrädern, sofern die Arbeitsmaschinen ihren Kraftbedarf nicht stark wechseln. Bei solchen Wellen liegt k_d zwischen den Werten unter 1. und 2., kann also genommen werden

500 (Flufsstahl), 300 bis 400 (Schweifseisen), 125 (Gufseisen), 50 bis 60 kg f. d. qcm (eichene Wasserradwellen).

Die meisten Wellen werden den Belastungsweisen 2. und 3. gemäfs belastet.

Dementsprechend gilt für:

Tiegelflufsstahl (Gufsstahl):

$$M_d = 80\,d^3 \text{ bis herab auf } 40\,d^3 \text{ oder } d = \sqrt[3]{900\frac{N}{n}} \text{ bis } \sqrt[3]{1800\frac{N}{n}}.$$

Gewöhnliches Schweifseisen (Schmiedeisen):

$$M_d = 48\,d^3 \text{ bis herab auf } 24\,d^3 \text{ oder } d = \sqrt[3]{1500\frac{N}{n}} \text{ bis } \sqrt[3]{3000\frac{N}{n}}.$$

Schweifseisen (Schmiedeisen) **vorzüglicher Güte:**

$$M_d = 64\,d^3 \text{ bis herab auf } 32\,d^3 \text{ oder } d = \sqrt[3]{1125\frac{N}{n}} \text{ bis } \sqrt[3]{2250\frac{N}{n}}.$$

Gufseisen:

$$M_d = \begin{cases} 20\,d^3 & \text{bis herab auf } 10\,d^3; \\ 20\,\dfrac{d_2^4 - d_1^4}{d_2} & \text{,, ,, ,, } 10\,\dfrac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}, \end{cases}$$

$$\text{oder} \quad d = \sqrt[3]{3600\frac{N}{n}} \text{ bis } \sqrt[3]{7200\frac{N}{n}};$$

$$\text{,,} \quad \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2} = 3600\frac{N}{n} \text{ ,, } 7200\frac{N}{n}.$$

Bei Feststellung des kleinsten inneren Durchmessers einer hohlen Achse oder Welle ist die geringste Stärke mafsgebend, welche der Kern erhalten mufs.

Normale Triebwerkwellen können berechnet werden nach:

$$M_d = 24\,d^3 = 3 \cdot (2\,d)^3 \text{ bezw. } d = \sqrt[3]{3000\frac{N}{n}},$$

wobei die zulässige **Entfernung der Lager** zu ermitteln ist aus:

$$l \leqq 100\sqrt{d}.$$

Tafel für normale Triebwerkwellen.

d cm	$M_d = 24\,d^3$ cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	$M_d = 24\,d^3$ cmkg	$\frac{N}{n}$	d cm	$M_d = 24\,d^3$ cmkg	$\frac{N}{n}$
3,0	648	0,009	7,0	8232	0,114	12	41472	0,576
3,5	1029	0,014	7,5	10125	0,141	13	52728	0,732
4,0	1536	0,021	8,0	12288	0,171	14	65856	0,915
4,5	2187	0,030	8,5	14739	0,205	15	81000	1,125
5,0	3000	0,042	9,0	17496	0,243	16	98304	1,365
5,5	3993	0,055	9,5	20577	0,286	17	117912	1,638
6,0	5184	0,072	10,0	24000	0,333	18	139968	1,944
6,5	6591	0,092	11	31944	0,444	20	192000	2,666

Um die **Formänderungen** bei weniger starken schweifseisernen Wellen gering zu halten, sei der Drehungswinkel $\psi = \frac{1}{4}$ Grad f. d. lfd. m Welle (vergl. S. 353); alsdann wird:

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \text{ oder } d = 0{,}73 \sqrt[4]{M_d}\,;$$

hierbei ist für die Entfernung der Lager zu wählen:

für $d =$ 3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0 cm
$l \leqq$ 170	180	190	200	210	220	230	240	250 cm

Für **starke** Wellen liefert diese Gleichung zu **geringe** Durchmesser.

c. Belastete Wellen.

Wellen, auf denen schwere Räder sitzen oder welche sonst erheblich auf Biegung beansprucht werden, sind mit Rücksicht hierauf zu berechnen.

Dieser Fall ist auf S. 360 u. f. ausführlich behandelt und wird hier darauf ausdrücklich verwiesen.

F. Kupplungen.

a. Scheibenkupplung. (Abbild. 285.)

Hat eigentlich nur noch für stärkere Wellen Berechtigung. Bei ihrer Anwendung müssen alle Lager offen sein und alle Gegenstände, welche auf der Welle zu befestigen sind, geteilt hergestellt werden.

$$d_1 = d - 2 \text{ bis } d - 4 \text{ mm.}$$

$$s_1 = 0{,}4\, d + 10 \text{ mm.}$$

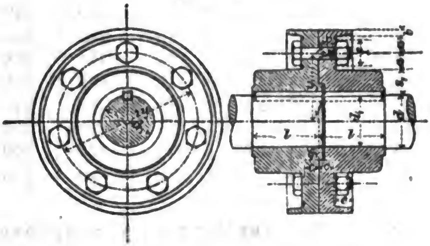
$l \geqq 1{,}25\, d$ für warm oder kalt mit der Presse aufgezogene Scheiben.

$$\delta = \frac{d}{8} + 10 \text{ mm bis } \frac{d}{6} + 10 \text{ mm.}$$

Die **Anzahl der Schrauben** z berechnet sich aus dem zu übertragenden Drehungsmoment M_d nach der Gleichung:

$$\frac{M_d}{y\, z}\, \frac{x}{2} = 60\, \delta^3.$$

Abbild. 285.



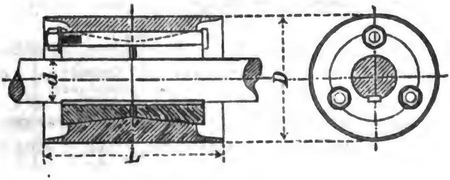
Hierin (sämtliche Längen in cm) kann $M_d = 36\, d^3$ gesetzt werden; x ergiebt sich aus der Scheibenstärke $c = 1{,}25\, \delta$ und der zwischen etwa 3 und 6 mm schwankenden Höhe der Arbeitsleiste.

$$a = 1{,}5\, \delta; \qquad y = \frac{d_1}{2} + s_1 + a;$$

$$b = \frac{\delta}{4} + 5 \text{ mm}; \quad e = \frac{5}{4}\, \delta; \quad f = 2{,}1\, \delta + 5 \text{ mm}; \quad g = \frac{s_1}{2}; \quad h = \frac{\delta}{3}.$$

b. Klemmkupplung nach Sellers.

Abbild. 286.



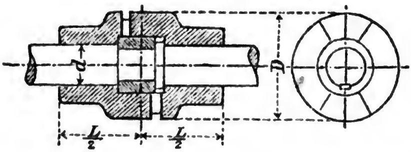
Abmessungen der käuflichen Kupplungen.

(Berlin-Anhaltische Maschinenbau-Aktien-Gesellschaft in Dessau).

Bohrung *d.* mm	Länge *L.* mm	Durchmesser *D.* mm	Gewicht. kg	Bohrung *d.* mm	Länge *L.* mm	Durchmesser *D.* mm	Gewicht. kg
30	150	100	8	90	320	235	71
35	160	110	9	95	330	246	78
40	170	120	10	100	360	260	86
45	200	130	14	105	370	270	95
50	210	140	17,5	110	380	280	102
55	220	150	21	115	390	290	120
60	240	165	27,5	120	410	300	134
65	250	180	34	125	425	315	147
70	265	190	40	130	445	325	162
75	290	200	44	135	460	340	190
80	300	212	56	140	470	350	220
85	310	226	68	145	480	360	250
				150	500	370	287

c. Längsbewegliche Kupplung (Ausdehnungs-Kupplung).

Abbild. 287.



Zur Sicherung der centrischen Lage beider Wellen wird das Innere der Kupplung mit einem gedrehten Ring ausgestattet.

Abmessungen der käuflichen Kupplungen.

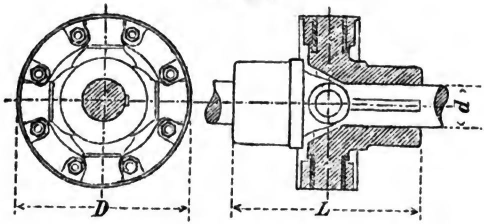
(B.-A. M.-A.-G. Dessau.)

Bohrung *d.* mm	Länge $\frac{L}{2}$. mm	Durchmesser *D.* mm	Gröſste Ausdehnung. mm	Gewicht. kg
40	90	100	12	7
45	100	110	12	9
50	110	125	12	12,5

Bohrung d. mm	Länge $\frac{L}{2}$. mm	Durchmesser D. mm	Gröfste Ausdehnung. mm	Gewicht. kg
55	120	135	12	16
60	130	150	14	22
65	140	160	14	27
70	150	175	14	34
75	160	185	14	40
80	170	200	16	50
85	180	210	16	59
90	185	225	16	68
95	195	235	16	80
100	205	250	20	94
105	215	260	20	108
110	225	275	20	125
115	235	285	20	142
120	250	300	20	166

d. Kreuzgelenkkupplung.

Abbild. 288.



Abmessungen der käuflichen Kupplungen.

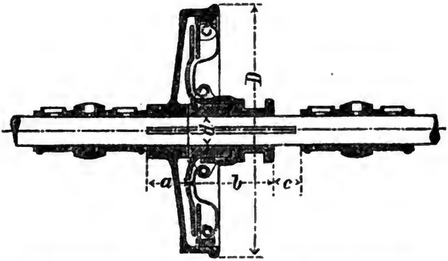
(B.-A. M.-A.-G. Dessau.)

Bohrung d. mm	Länge L. mm	Durchmesser D. mm	Gewicht. kg	Bohrung d. mm	Länge L. mm	Durchmesser D. mm	Gewicht. kg
35	130	135	5	75	270	280	38
40	160	160	7	80	310	305	52
45	160	160	8	85	310	305	53
50	200	195	13	90	350	350	75
55	200	195	14	95	350	350	76
60	230	240	24	100	390	390	105
65	230	240	25	105	390	390	107
70	270	280	36				

e. Reibungskupplung von Dohmen-Leblanc (D. R. P.).

In 5 Anordnungen, je nach dem Zweck.

Abbild. 289.



Abmessungen der käuflichen Kupplungen.

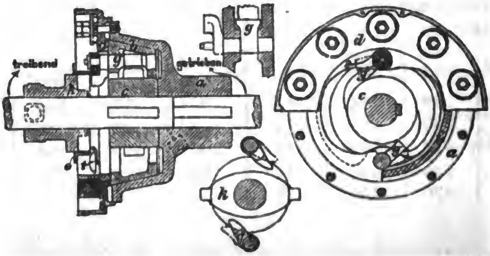
(Anordnung 1, zur Verbindung zweier Wellen, welche dieselbe Richtung haben und während des Betriebes gekuppelt oder von einander gelöst werden sollen.)

(B.-A. M.-A.-G. Dessau.)

Bohrung *d.* mm	Durchmesser *D.* mm	Länge *a.* mm	Länge *b + c.* mm	Gewicht. kg	Bohrung *d.* mm	Durchmesser *D.* mm	Länge *a.* mm	Länge *b + c.* mm	Gewicht. kg
50	450	80	210	60	95	1040	195	425	480
55	550	90	235	70	100	1040	195	425	500
60	550	90	235	90	105	1040	195	425	520
65	660	125	290	135	110	1290	200	458	670
70	860	135	305	200	115	1290	200	458	700
75	670	150	315	210	120	1490	230	520	1000
80	670	150	315	220	125	1490	230	520	1050
85	670	150	315	230	130	1490	230	520	1100
90	880	165	350	310	140	1700	260	585	1550
					150	1700	260	585	1600

f. Reibungskupplung von Lohmann & Stolterfoht in Berlin und Witten (Ruhr) (D. R. P.)

Abbild. 290.



Wellendurchmesser.	Arbeitsstärke bei 100 minutlichen Umdrehungen.	Größter Durchmesser der Kupplung.	Größte Länge der Kupplung.	Gewicht.	Wellendurchmesser.	Arbeitsstärke bei 100 minutlichen Umdrehungen.	Größter Durchmesser der Kupplung.	Größte Länge der Kupplung.	Gewicht.
mm	PS	mm	mm	kg	mm	PS	mm	mm	kg
40	1,5	290	275	35	100	35	580	575	235
	3	310	305	45		50	625	625	305
	4	340	330	55	110	7	470	490	120
50	1,5	290	275	34		15	505	540	165
	3	310	305	43		30	580	575	230
	4	340	330	52		50	625	625	300
	6	390	370	70		70	700	675	400
60	1	290	280	35	120	12	505	540	160
	2	310	305	42		25	580	580	228
	3	340	330	50		45	625	625	295
	5	390	370	68		70	700	675	390
	8	410	420	95		100	745	725	500
70	1	310	310	43	130	20	580	580	220
	2	340	335	52		40	625	630	285
	4	390	370	65		65	700	675	385
	8	410	420	92		100	745	725	490
	15	470	475	130		130	790	760	600
80	2	340	340	52	140	30	625	630	280
	4	390	385	65		50	700	685	380
	8	410	420	90		85	745	725	480
	15	470	475	126		120	790	760	585
	23	505	535	175		160	850	820	750
90	3	390	385	66	150	40	700	685	370
	6	410	435	90		70	745	735	480
	12	470	475	122		110	790	760	570
	22	505	535	170		150	850	820	735
	35	580	575	240		200	900	870	890
100	5	410	435	90	175	300	1040	1000	1400
	10	470	490	125	200	450	1200	1050	1950
	20	505	535	165					

Auf der treibenden Welle ist der mit Zähnen versehene Körper *c*, auf der getriebenen Welle der Hohlkegel *a* aufgekeilt. Gegen die innere Fläche des letzteren wird der sonst lose Reibungskegel *b* durch Druckring *d* mittelst Schrauben dauernd so stark angepreßt, daß die entstehende Reibung (zwischen *a* und *b*) zur Ueberleitung des zu übertragenden Momentes ausreicht. Der Kegel *b* trägt die beweglichen Klinken *g*, welche sich in eingerücktem Zustande der Kupplung gegen die

Zähne des Körpers *c* legen. Soll ausgerückt werden, so ist die Hülse *k*, deren Anlaufflächen hierbei durch Vermittlung von Hebeln auf Auswärtsdrehung der Klinken *g* wirken, nach *b* hin zu verschieben. Das Einrücken erfolgt durch Zurückziehen der Hülse *k*.

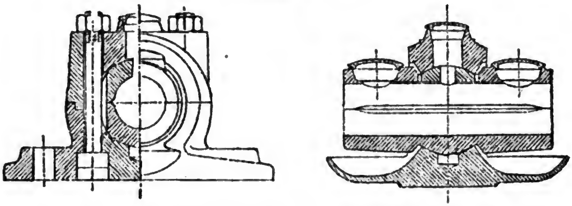
Die Patentinhaber fertigen diese Kupplungen in verschiedenen Formen, von denen die abgebildete die gebräuchlichste ist. Für die richtige Wahl der Abmessungen kommen aufser der Gröfse der zu übertragenden Momente namentlich in betracht: die Häufigkeit der Benutzung, Gröfse der beim Einrücken in Bewegung zu setzenden Massen und sonstige Betriebsverhältnisse.

Die Kupplung, welche durch einfache Hanfseilleitung von 10 bis 13 mm Stärke aus gröfseren Entfernungen leicht ein- und ausgerückt werden kann, erscheint geeignet zum Ein- und Ausrücken gröfserer Maschinen und ganzer Triebwerksanlagen.

G. Lager.

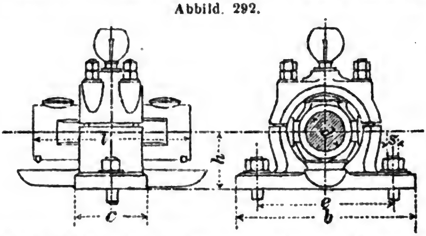
a. Lager nach Sellers.

Abbild. 291.



b. Geschlossenes Stehlager mit Kugelbewegung.

Abbild. 292.



Der Mittelpunkt des Lagers kann nur wagerecht verstellt werden.

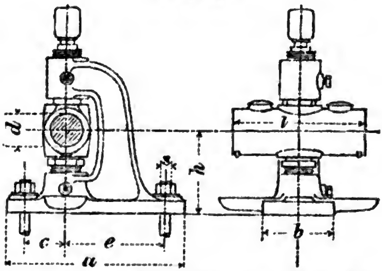
(B.-A. M.-A.-G. Dessau.)

Wellen-durchmesser *d*. mm	Länge der Schale *l*. mm	Lagerhöhe *h*. mm	Fufsplatte. *b* mm	*c* mm	Schrauben. *e* mm	*s* mm	Gewicht. kg
25	100	48	160	65	115	13	4
30	120	55	190	75	140	13	6
35	140	55	190	75	140	13	7

Wellen-durchmesser d. mm	Länge der Schale l. mm	Lagerhöhe h. mm	Fufsplatte. b mm	c mm	Schrauben. e mm	s mm	Gewicht. kg
40	160	70	220	90	166	13	9
45	180	70	220	90	166	13	11
50	200	82	260	105	200	16	15
55	220	82	260	105	200	16	17
60	240	95	310	125	230	20	24
65	260	95	310	125	230	20	25
70	280	110	350	140	260	23	36
75	300	110	350	140	260	23	37
80	320	110	350	140	260	23	39
85	340	125	400	165	300	26	54
90	360	125	400	165	300	26	59
95	380	125	400	165	300	26	63
100	400	140	450	190	340	29	84
105	420	140	450	190	340	29	88
110	440	140	450	190	340	29	92
115	460	160	516	220	396	33	110
120	480	160	516	220	396	33	115
125	500	160	516	220	396	33	120
130	520	160	516	220	396	33	125
135	540	180	580	250	460	36	145
140	560	180	580	250	460	36	150

c. Offenes Stehlager mit Kugelbewegung.

Abbild. 293.



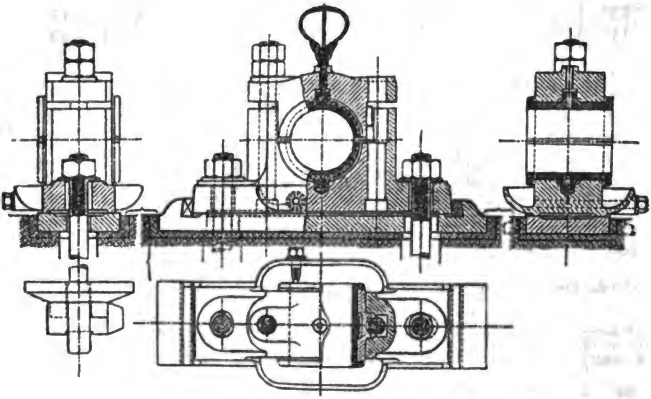
Der Mittelpunkt der Lagerschalen kann nach jeder Richtung verstellt werden.

(B.-A. M.-A.-G. Dessau.)

Wellen-durch-messer d. mm	Länge der Schale l. mm	Lager-höhe h. mm	Fuſsplatte. a mm	b mm	Schrauben. c mm	e mm	s mm	Gewicht. kg
40	160	130	270	90	60	150	13	14
45	180	130	270	90	60	150	13	15
50	200	145	315	105	70	175	16	19
55	220	145	315	105	70	175	16	21
60	240	175	380	125	85	215	20	30
65	260	175	380	125	85	215	20	32
70	280	210	445	140	100	255	23	46
75	300	210	445	140	100	255	23	49
80	320	210	445	140	100	255	23	52
85	340	240	510	165	115	295	26	70
90	360	240	510	165	115	295	26	74
95	380	240	510	165	115	295	26	78
100	400	270	570	190	130	340	29	102
105	420	270	570	190	130	340	29	108
110	440	270	570	190	130	340	29	114

d. Normallager.

Abbild. 294.

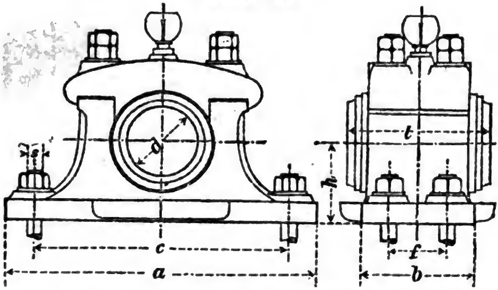


Ueber die Berechnung und Entwicklung der einzelnen Abmessungen des sogen. **Normallagers** s. Bach, Maschinenelemente 1881, S. 224 u. f.

e. Stehlager mit Rotgufsschalen.

Die B.-A. M.-A.-G. zu Dessau führt die Stehlager mit Rotgufsschalen nach Abbild. 295 aus.

Abbild. 295.

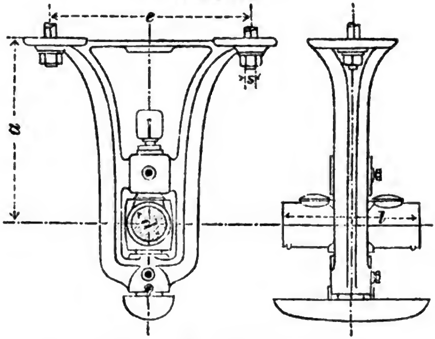


Wellen-durch-messer *d.* mm	Länge der Schale *l.* mm	Lager-höhe *h.* mm	Fufsplatte. *a* mm	*b* mm	Schrauben. *c* mm	*f* mm	*s* mm	Gewicht. kg
100	200	130	450	170	360	90	23	95
110	220	130	450	170	360	90	23	100
120	240	150	540	190	430	100	26	125
130	260	150	540	190	430	100	26	130
140	280	180	650	240	530	120	33	170
150	300	180	650	240	530	120	33	175
160	320	180	650	240	530	120	33	180
170	340	210	780	280	640	150	39	295
180	360	210	780	280	640	150	39	305
190	380	240	890	320	720	170	46	420
200	400	240	890	320	720	170	46	430

f. Geschlossenes Hängelager. (Abbild. 296, S. 434.)

Wellen-durchmesser *d.* mm	Länge der Schale *l.* mm	Ausladung *a.* mm	Schrauben. *e* mm	*s* mm	Zahl	Gewicht. kg
40	160	250	300	20	2	15
		300	325	20	2	16
		350	350	20	2	17

Abbild. 296.



(B.-A. M.-A.-G. Dessau.)

Wellen-durchmesser *d.* mm	Länge der Schale *l.* mm	Ausladung *a.* mm	Schrauben. *e* mm	*s* mm	Zahl	Gewicht. kg
40	160	400	360	20	2	18
		500	400	23	2	20
45	180	250	300	20	2	16
		300	325	20	2	17
		350	350	20	2	18
		400	360	20	2	19
		500	400	23	2	22
50	200	300	340	20	2	25
		350	360	20	2	27
		400	380	23	2	30
		500	420	23	2	32
		600	480	23	2	42
55	220	300	340	20	2	27
		350	360	20	2	29
		400	380	23	2	32
		500	420	23	2	35
		600	480	23	2	38
60	240	300	370	23	2	38
		350	390	26	2	40
		400	410	26	2	42
		500	440	29	2	47

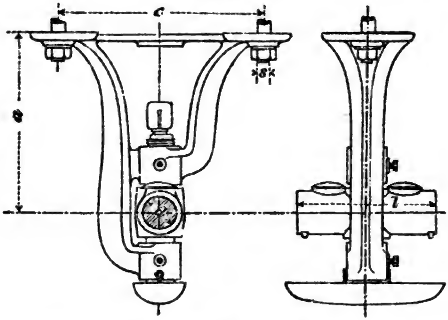
Wellen-durchmesser d. mm	Länge der Schale l. mm	Ausladung a. mm	Schrauben. e mm	s mm	Zahl	Gewicht. kg
60	240	600	500	29	2	53
		700	540	29	2	60
65	260	300	370	23	2	40
		350	390	26	2	43
		400	410	26	2	45
		500	440	29	2	50
		600	500	29	2	56
		700	540	29	2	63
70	280	350	420	26	2	53
		400	440	26	2	57
		500	490	29	2	67
		600	540	29	2	73
		700	580	23	4	79
		800	620	26	4	87
75	300	350	420	26	2	56
		400	440	26	2	60
		500	490	29	2	70
		600	540	29	2	76
		700	580	23	4	82
		800	620	26	4	90
80	320	350	420	26	2	59
		400	440	26	2	63
		500	490	29	2	73
		600	540	29	2	79
		700	580	23	4	85
		800	620	26	4	93
85	340	400	440	23	4	77
		500	500	23	4	83
		600	560	26	4	89
		700	600	26	4	97
		800	675	29	4	106
90	360	400	440	23	4	79
		500	500	23	4	85
		600	560	26	4	91
		700	600	26	4	99
		800	675	29	4	108
95	380	400	440	23	4	82
		500	500	23	4	88
		600	560	26	4	94

Wellendurchmesser *d.* mm	Länge der Schale *l* mm	Ausladung *a.* mm	Schrauben. *e* mm	*s* mm	Zahl	Gewicht. kg
95	380	700	600	26	4	102
		800	675	29	4	111
100	400	500	550	26	4	130
		600	575	26	4	142
		700	625	29	4	151
		800	675	33	4	160
105	420	500	550	26	4	135
		600	575	26	4	145
		700	625	29	4	154
		800	675	33	4	164
110	440	500	550	26	4	139
		600	575	26	4	148
		700	625	29	4	158
		800	675	33	4	168
115	460	600	600	29	4	220
		700	700	33	4	255
		800	800	33	4	290
120	480	600	600	29	4	250
		700	700	33	4	280
		800	800	33	4	310
125	500	600	600	29	4	258
		700	700	33	4	288
		800	800	33	4	320
130	520	600	600	29	4	265
		700	700	33	4	295
		800	800	33	4	325

g. Offenes Hängelager. (Abbild. 297, S. 437.)

Wellendurchmesser *d.* mm	Länge der Schale *l.* mm	Ausladung *a.* mm	Schrauben. *c* mm	*s* mm	Zahl	Gewicht. kg
30	120	250	280	16	2	11
35	140	250	280	16	2	12
40	160	250	300	20	2	15
		300	325	20	2	16
		350	350	20	2	17

Abbild. 297.



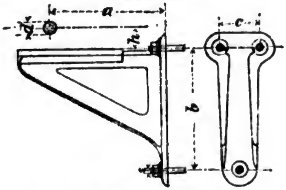
(B.-A. M.-A.-G. Dessau.)

Wellen-durchmesser d. mm	Länge der Schale l. mm	Ausladung a. mm	Schrauben. c mm	Schrauben. s mm	Schrauben. Zahl	Gewicht. kg
40	160	400	360	20	2	18
		500	400	23	2	21
45	180	250	300	20	2	16
		300	325	20	2	17
		350	350	20	2	18
		400	360	20	2	19
		500	400	23	2	22
50	200	300	340	20	2	26
		350	360	20	2	29
		400	380	23	2	32
		500	420	23	2	36
		600	480	23	2	38
55	220	300	340	20	2	27
		350	360	20	2	30
		400	380	23	2	33
		500	420	23	2	37
		600	480	23	2	39
60	240	300	370	23	2	40
		350	390	26	2	42
		400	410	26	2	45

Wellen-durchmesser *d*. mm	Länge der Schale *l*. mm	Ausladung *a*. mm	Schrauben. *c* mm	*s* mm	Zahl	Gewicht. kg
60	240	500	440	29	2	50
		600	500	29	2	61
		700	540	29	2	72
65	260	300	370	23	2	42
		350	390	26	2	44
		400	410	26	2	47
		500	440	29	2	52
		600	500	29	2	63
		700	540	29	2	74
70	280	350	420	26	2	56
		400	440	26	2	60
		500	490	29	2	70
		600	540	29	2	78
		700	580	23	4	86
75	300	350	420	26	2	59
		400	440	26	2	64
		500	490	29	2	73
		600	540	29	2	80
		700	580	23	4	88
80	320	350	420	26	2	61
		400	440	26	2	66
		500	490	29	2	75
		600	540	29	2	83
		700	580	23	4	92
85	340	400	440	23	4	80
		500	500	23	4	85
		600	560	26	4	92
		700	600	26	4	100
90	360	400	440	23	4	82
		500	500	23	4	87
		600	560	26	4	94
		700	600	26	4	102
95	380	400	440	23	4	84
		500	500	23	4	89
		600	560	26	4	96
		700	600	26	4	104

h. Wandkonsolen für Stehlager mit veränderlicher Ausladung.

Abbild. 298.



(B.-A. M.-A.-G. Dessau.)

Wellen-durchmesser d.	Ausladung der Konsolen a.	Anker.				Gewicht.
		h	b	c	s	
mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg
25	200—300	48	300	110	16	15
25	300—400	48	400	110	16	17
30—35	200—300	55	300	110	16	17
30—35	300—400	55	400	110	16	20
40—45	300—400	70	400	125	20	23
40—45	400—500	70	500	125	20	27
40—45	500—600	70	600	125	20	31
50—55	300—400	82	400	140	20	29
50—55	400—500	82	500	140	20	35
50—55	500—600	82	600	140	20	42
60—65	300—400	95	400	160	23	34
60—65	400—500	95	500	160	23	42
60—65	500—600	95	600	160	23	50
60—65	600—700	95	700	160	23	58
60—65	700—800	95	800	160	23	70
60—65	800—900	95	900	160	23	94
70—80	300—400	110	400	180	26	42
70—80	400—500	110	500	180	26	52
70—80	500—600	110	600	180	26	63
70—80	600—700	110	700	180	26	73
70—80	700—800	110	800	180	26	84
85—95	300—400	125	400	230	33	67
85—95	400—500	125	500	230	33	79
85—95	500—600	125	600	230	33	92
85—95	600—700	125	700	230	33	105
85—95	700—800	125	800	230	33	120
100—110	500—600	140	600	300	36	120
100—110	600—700	140	700	300	36	135
100—110	700—800	140	800	300	36	150

III. LASTSEILE, RIEMEN, GURTE UND KETTEN NEBST TROMMELN UND ROLLEN.

A. Seile, deren Trommeln und Rollen.

a. Hanfseile.

1. Hanfseile von Felten & Guilleaume in Köln (Rhein).

Runde Seile aus bestem russischen Reinhanf.

Ungeteert.			Geteert.		
Durchmesser. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Arbeitslast bei 8-facher Sicherheit. kg	Durchmesser. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Arbeitslast bei 8-facher Sicherheit. kg
16	0,20	200	16	0,22	176
18	0,26	254	20	0,35	275
20	0,31	314	23	0,42	363
23	0,36	416	26	0,56	464
26	0,51	531	29	0,70	578
29	0,62	660	33	0,87	748
33	0,78	855	36	1,04	890
36	0,93	1017	39	1,15	1044
39	1,03	1194	46	1,68	1453
46	1,50	1661	52	2,18	1857
52	1,97	2122			

Runde Seile aus bestem badischen Schleifshanf.

Ungeteert. Durchmesser. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Arbeitslast bei 8-facher Sicherheit. kg	Geteert. Durchmesser. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Arbeitslast bei 8-facher Sicherheit. kg
16	0,21	230	16	0,23	200
18	0,27	290	20	0,36	314
20	0,32	350	23	0,43	416
23	0,37	470	26	0,58	531
26	0,53	600	29	0,70	660
29	0,64	740	33	0,90	855
33	0,80	960	36	1,07	1017
36	0,96	1145	39	1,18	1194
39	1,06	1340	46	1,73	1661
46	1,55	1870	52	2,24	2122
52	2,03	2390			

Flache Seile aus bestem badischen Schleifshanf. Geteert. — **Kabelseile** aus bestem badischen Schleifshanf. Geteert.

Breite. mm	Dicke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Bruchbelastung. kg	Durchmesser. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Arbeitslast bei 6-facher Sicherheit. kg
92	23	2,35	14812	59	2,67	4550
105	26	3,04	19110	65	3,70	5530
118	26	3,36	21476	72	4,00	6780
130	29	4,26	26390	78	4,80	7960
130	33	4,80	30030	85	5,60	9450
144	33	5,28	33264	92	6,40	11070
157	33	5,60	36267	98	7,46	12575
157	36	6,24	39564	105	8,53	14420
183	36	7,20	46116			
183	39	7,84	49959			
200	44	9,25	61600			
250	46	12,10	80500			
310	47	15,00	101600			

Am gebräuchlichsten sind die runden dreilitzigen Seile. Flache Hanfseile aus 4 bis 6 runden zusammengenähten Seilen hergestellt.

2. Es bezeichne:

P die zulässige Belastung in kg,
D den Rollendurchmesser bis Seilmitte, in cm,
r den Zapfenhalbmesser in cm,
d den Seildurchmesser in cm,
μ den Zapfenreibungskoefficienten.

Man wählt bei Winden und Flaschenzügen:

für runde lose geschlagene, leicht biegsame Seile, im neuen Zustande:

$$D \geqq 7\,d; \qquad P \leqq 60\,d^2.$$

für runde festgeschlagene Seile, ungeteert, im neuen Zustande:

$$D \geqq 10\,d; \qquad P \leqq 80\,d^2.$$

Stark gebrauchte Förderseile erfordern $D \geqq 40\,d$.

Abbild. 299.



Verhältnis der Kraft K im ziehenden Trum zum Widerstande Q im auflaufenden abhängig von der Seilsteifigkeit und Zapfenreibung.

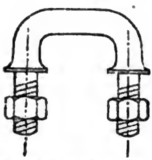
Für Rollen bei paralleler Seilrichtung ist:

$$K = Q\left(1 + \frac{1}{8}\,\frac{d^2}{D} + \frac{4\,\mu\,r}{D}\right) \text{ bis } Q\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{d^2}{D} + \frac{4\,\mu\,r}{D}\right).$$

Gewöhnliche Seilrollen nach Abbild. 299 im Umfang glatt ausgedreht, so dafs sich das Seil ohne Klemmung einlegt. Zulässiger Flächendruck der Nabe bezw. der Zapfen $\leqq$ 70 kg f. d. qcm (Gufseisen auf Schweifseisen).

Seiltrommeln erhalten Endflansche und glatten Umfang. Wandstärke mit Rücksicht auf die Herstellung $\geqq$ 10 bis 12 mm, wenn nicht die auftretende Biegungs- und Drehungsbeanspruchung stärkere Abmessungen erfordert. Trommellänge reichlich zu wählen, so dafs zur Schonung der Seilbefestigung stets einige Seilwindungen auf der Trommel bleiben. Seilbefestigungsbügel nach Abbild. 300 entweder angeschraubt oder angegossen.

Abbild. 300.



Seilablenkung zur Sicherung regelrechter Aufwicklung möglichst gering, erforderlichenfalls unter Anwendung einer Zuführungsrolle mit freier Verschiebbarkeit in Richtung der Achse, oder mit mehrfacher Uebereinanderwicklung des Seiles zur Beschränkung der Trommellänge.

Seilreibungstrommeln für Spillwinden mit auf- und ablaufendem Seil, das bei geringer Spannung des ablaufenden Trums unter mehr-

facher Umschlingung nur durch Reibung mitgenommen wird, erhalten konoidische Mantelform, um das Bestreben des Seils zu beseitigen, die Trommel zu verlassen.

Seilreibungsrollen für Aufzüge mit Gegengewicht erfordern zur Sicherung der Seilmitnahme durch Klemmen keilförmige Umfangsnuten, wenn nicht $D \geqq 32\,d$ bis $40\,d$ gewählt werden kann.

b. Drahtseile.*)

1. Förderseile.

Es bezeichne:

P die auf das Seil wirkende Zugkraft (Last und Eigengewicht des frei herabhängenden Trums) in kg,
D den Durchmesser der Seilscheibe in cm,
d den Durchmesser des Seiles in cm,
δ den Durchmesser der Seildrähte in cm,
i die Anzahl der Seildrähte,
E den Elasticitätsmodul des Drahtmaterials in kg f. d. qcm,
k_z die zulässige Gesamtspannung des Seiles in kg f. d. qcm.

Unter Berücksichtigung der Biegungsspannung des Seiles beim Auflaufen auf die Seilscheibe gilt für die **zulässige Gesamtspannung:**

$$\frac{P}{i\,\frac{\pi\,\delta^2}{4}} + \left(\frac{3}{8}\,E\right)\frac{\delta}{D} \leqq k_z\,.$$

Förderseile werden rund und flach hergestellt, letztere aus runden nebeneinander gelegten Seilen, welche durch Nähen verbunden sind. Die runden Seile selbst unterscheiden sich durch Zahl und Stärke der Drähte, Zahl der Litzen und Hanfeinlagen, Zahl der Windungen der einzelnen Drähte und Litzen f. d. lfd. m Länge und schliefslich durch das Drahtmaterial. Im allgemeinen ist für die **Auswahl einer bestimmten Seilkonstruktion und Seilscheibe** zu berücksichtigen, dafs bei gleichem Material und gleicher Bruchfestigkeit ein Seil aus vielen dünnen Drähten biegsamer ist, als ein solches aus stärkeren bei geringerer Drahtzahl, dafs ferner durch Hanfeinlagen die Biegsamkeit trotz Vergröfserung des Seildurchmessers erhöht wird, und dafs naturgemäfs flache Seile ebenfalls biegsamer sind als gleich tragfähige runde, also kleinere Trommeldurchmesser gestatten. Es ist empfehlenswert, sich vor endgültiger Entscheidung mit der Drahtseilfabrik unmittelbar in Verbindung zu setzen und deren Rat über die Auswahl des Seiles einzuholen.

Der allgemeinen Verwendung flacher Seile steht u. a. ihre verhältnismäfsig geringere Dauerhaftigkeit entgegen, eine Folge der ungleichen Dehnung der einzelnen Seilstränge.

*) Ueber Transmissions-Drahtseile s. S. 415 u. f.

Flache Förderseile von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

Drahtdicke. mm	Zahl der Drähte im Seile.	Breite des Seiles. mm	Dicke des Seiles. mm	Gewicht f. d. lfd. m Seil. kg	Bruchlast des Seiles in kg — aus Eisen oder Bessemerstahl — mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von 5500	Bruchlast des Seiles in kg — aus Patent-Gufsstahldraht — 12000	15000	18000
1,0	120	38	9	1,00	5200	11300	14100	16950
	144	44	10	1,15	6240	13560	16950	20350
	168	46	11	1,35	7280	15820	19800	23750
	192	50	12	1,50	8320	18100	22600	27150
1,2	120	46	11	1,35	7460	16300	20350	24450
	144	51	12	1,65	8950	19560	24450	29350
	168	55	13	1,90	10440	22820	28500	34200
	192	60	14	2,30	11930	26080	32600	39100
1,4	120	53	13	1,90	10160	22170	27700	33250
	144	60	14	2,25	12190	26600	33250	39900
	168	64	15	2,60	14220	31000	38750	46500
	192	70	16	3,20	16250	35430	44300	53150
1,6	120	61	15	2,50	13270	28950	36200	43450
	144	68	16	2,90	15920	34800	43450	52200
	168	73	17	3,40	18570	40600	50700	60900
	192	80	18	4,00	21220	46300	57900	69500
1,8	120	68	16	3,10	16800	36600	45750	54900
	144	77	18	3.70	20150	43920	54900	65880
	168	82	19	4,30	23510	51240	64050	76860
	192	93	20	5,15	26870	58560	73200	87840
	224	110	19	5,70	31350	68320	85400	102480
	256	124	20	6,90	35830	78080	97600	117120
	288	135	24	7,70	40300	87840	109800	131760
	320	150	25	8,50	44780	97600	122000	146400
2,0	120	76	18	3,80	20730	45240	56500	67860
	144	85	20	4,55	24880	54300	67800	81450
	168	91	22	5,30	29020	63350	79100	95000
	192	104	23	6,35	33170	72400	90500	108600
	224	120	22	7,10	38700	84460	105600	126700
	256	138	23	8,50	44230	96520	120650	144800
	288	150	26	9,50	49760	108580	135700	162870
	320	165	28	10,60	55300	120640	150800	180960

Ebenso mufs auf Erhöhung der Biegsamkeit runder Förderseile durch reichliche Hanfeinlagen verzichtet werden, wenn das Seil im Betriebe durch Uebereinanderwickeln gequetscht wird und schliefslich bleibt selbst die Wahl möglichst schwacher Drähte ausgeschlossen, wenn durch den Seillauf starke mechanische Abnutzungen durch Reibung oder Pressung zu befürchten sind. Vorzüglich sind bei Einwirkung sauerer Grubenwässer die Drähte so stark als irgend zulässig zu nehmen und durch Verzinken oder Verbleien möglichst zu schützen. In der Regel wählt man zu Förderseilen Drähte von 1,4 bis höchstens 2,8 mm mit Rücksicht darauf, dafs D womöglich $\geqq 1000\,\delta$. Nur gezwungen geht man auf $D < 1000\,\delta$ bis zum Grenzwerte $500\,\delta$ herab, wenn gleichzeitig möglichst starke Drähte und möglichst kleine Trommeldurchmesser durch die Anlage gefordert werden.

Bei gleicher Drahtdicke ist ferner der Trommeldurchmesser mit der Drahtzahl zu vergröfsern und womöglich $D \geqq 100\,d$, nur ausnahmsweise auf Kosten der Betriebsdauer $D \leqq 70\,d$ unter Wahrung der obigen Beziehung zwischen D und δ.

Als **Drahtmaterial** findet vorzugsweise zäher Tiegelflufsstahl von 11 500 bis 13 000 kg f. d. qcm Bruchfestigkeit Verwendung. Nur bei gröfseren Förderlasten und Fördertiefen nimmt man weniger zähen Stahl von 15 000 bis 16 000 kg f. d. qcm Bruchfestigkeit (vergl. die Tafeln), und verwendet im äufsersten Falle selbst Material von 18 000 bis 20 000 kg Bruchfestigkeit. Die Abnahme der Dehnbarkeit mit der Zunahme der Bruchfestigkeit vermindert die Betriebsdauer und schliefst die Anwendung kleinerer Seilscheiben als für normale Verhältnisse unbedingt aus.

Für Menschenförderung ist bei Förderseilen aus Eisen $k_z = 1500$, bei Tiegelflufsstahlseilen $k_z = 2000$ kg f. d. qcm in die Gleichung S. 443 einzusetzen.

Runde Förderseile von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

$d = \delta\sqrt{3\,i}$ für runde Förderseile mit 8 Hanfseelen,

$d = \delta\sqrt{2{,}5\,i}$ „ „ „ „ 7 „

$d = \delta\sqrt{2{,}3\,i}$ „ „ „ „ 1 Hanfseele.

*) Die Bruchbelastungen der Seile sind in sämtlichen Tafeln von Felten & Guilleaume aus der durch Versuche bestimmten Bruchfestigkeit der verwandten Drähte durch Addition der im Seile vorhandenen Drahtquerschnitte als Rechnungsergebnis unter der Voraussetzung ermittelt, dafs alle Drähte voll und gleichzeitig beansprucht werden.

Für Seile, die durch ihre Lastführung gegen Aufdrehen gesichert sind, ist Längsschlag dem Kreuzschlag vorzuziehen, wenn das Seil nicht mehr als 19 Drähte in der Litze erfordert — sogen. Albert- oder Lemy-Seile.

Drahtdicke. mm	Zahl der Drähte im Seile.	Zahl der Hanfseelen im Seile.	Durchmesser des Seiles. mm	Gewicht f. d. lfd. m Seil. kg	Bruchlast des Seiles in kg: aus Eisen oder Bessemerstahl	Bruchlast des Seiles in kg: aus Patent-Gufsstahldraht		
					mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von			
					5500	12000	15000	18000
1,4	36	7	13	0,55	3050	6660	8330	9990
	42	1	13	0,65	3560	7760	9700	11640
	42	7	14	0,65	3560	7760	9700	11640
	49	1	14	0,75	4150	9050	11310	13580
	49	8	17	0,80	4150	9050	11310	13580
	56	8	18	0,95	4740	10340	12930	15510
	84	1	19	1,30	7110	15510	19390	23260
	96	7	21	1,40	8130	17730	22160	26590
	114	1	23	1,70	9650	21060	26320	31590
	133	1	25	2,00	11260	24570	30710	36850
1,6	36	7	15	0,70	3980	8690	10860	13040
	42	1	15	0,85	4640	10140	12670	15210
	42	7	17	0,85	4640	10140	12670	15210
	49	1	17	0,95	5420	11830	14790	17750
	49	8	19	1,00	5420	11830	14790	17750
	56	8	20	1,20	6190	13520	16900	20280
	84	1	22	1,70	9290	20280	25350	30420
	96	7	24	1,85	10620	23170	28960	34760
	114	1	26	2,25	12610	27500	34380	41250
	133	1	28	2,60	14710	32100	40120	48150
1,8	36	7	17	0,90	5040	11000	13750	16500
	42	1	17	1,05	5880	12820	16000	19230
	42	7	19	1,05	5880	12820	16000	19230
	49	1	19	1,25	6850	14960	18700	22440
	49	8	21	1,30	6850	14960	18700	22440
	56	8	23	1,50	7830	17100	21370	25650
	84	1	25	2,10	11750	25660	32100	38490
	96	7	27	2,30	13420	29320	36650	43980
	114	1	29	2,75	15970	34800	43500	52200
	133	1	31	3,25	18610	40600	50750	60900
2,0	36	7	19	1,10	6220	13570	16960	20350
	42	1	19	1,30	7250	15840	19800	23760
	42	7	21	1,30	7250	15840	19800	23760
	49	1	21	1,50	8460	18480	23100	27720
	49	8	24	1,55	8460	18480	23100	27720
	56	8	26	1,85	9670	21120	26400	31680

Drahtdicke. mm	Zahl der Drähte im Seile.	Zahl der Hanfseelen im Seile.	Durchmesser des Seiles. mm	Gewicht f. d. lfd. m Seil. kg	Bruchlast des Seiles in kg — aus Eisen oder Bessemerstahl — mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von 5500	aus Patent-Gufsstahldraht 12000	15000	18000
2,0	84	1	27	2,60	14500	31680	39600	47500
	96	7	30	2,85	16570	36200	45250	54300
	114	1	32	3,40	19700	42990	53730	64480
	133	1	35	4,00	22960	50150	62690	75220
	162	1	38	5,00	27990	61070	76340	91600
	180	1	41	5,70	31100	67860	84830	101800
2,2	36	7	21	1,30	7530	16420	20530	24630
	42	1	21	1,55	8780	19170	23960	28750
	42	7	23	1,60	8780	19170	23960	28750
	49	1	23	1,85	10240	22350	27940	33530
	49	8	26	1,90	10240	22350	27940	33530
	56	8	28	2,25	11700	25540	31930	38310
	84	1	30	3,15	17550	38310	47890	57470
	96	7	33	3,45	20060	43780	54730	65670
	114	1	35	4,10	23830	52000	65000	78000
	133	1	38	4,80	27800	60660	75830	90990
	162	1	42	5,90	33870	73900	92380	110850
	180	1	45	7,00	37630	82100	102630	123150
2,5	36	7	24	1,70	9720	21200	26500	31800
	42	1	24	2,00	11340	24730	30910	37100
	42	7	26	2,05	11340	24730	30910	37100
	49	1	26	2,35	13230	28850	36060	43280
	49	8	30	2,45	13230	28850	36060	43280
	56	8	32	2,90	15120	32970	41210	49460
	84	1	34	4,10	22680	49460	61830	74200
	96	7	37	4,45	25920	56520	70650	84780
	114	1	40	5,30	30780	67150	83940	100780
	133	1	44	6,20	35910	78340	97930	117500
	162	1	48	7,50	43740	95430	119290	143150
	180	1	52	9,00	48600	106000	132500	159000
2,8	36	7	26	2,10	12190	26600	33250	39900
	42	1	26	2,50	14220	31030	38790	46550
	42	7	29	2,55	14220	31030	38790	46550
	49	1	29	3,00	16590	36200	45250	54300
	49	8	33	3,10	16590	36200	45250	54300
	56	8	35	3,65	18960	41370	51710	62060

Drahtdicke. mm	Zahl der Drähte im Seile.	Zahl der Hanfseelen im Seile.	Durchmesser des Seiles. mm	Gewicht f. d. lfd. m Seil. kg	Bruchlast des Seiles in kg: aus Eisen oder Bessemerstahl, mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von 5500	Bruchlast des Seiles in kg: aus Patent-Gufsstahldraht, mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von 12000	15000	18000
2,8	84	1	38	5,10	28440	62060	77580	93100
	96	7	42	5,60	32500	70930	88660	106400
	114	1	45	6,70	38610	84240	105300	126360
	133	1	49	7,80	45040	98280	122850	147420
	162	1	53	10,60	54860	119700	149630	179550
	180	1	58	11,30	60960	133000	166250	199500
3,1	36	7	29	2,55	14940	32610	40760	48920
	42	1	29	3,05	17430	38050	47560	57080
	42	7	32	3,10	17430	38050	47560	57080
	49	1	32	3,60	20340	44390	55490	66590
	49	8	37	3,75	20340	44390	55490	66590
	56	8	40	4,45	23240	50730	63410	76100
	84	1	42	6,25	34860	76100	95130	114150
	96	7	47	6,85	39840	86970	108710	130460
	114	1	50	8,20	47320	103250	129060	154880
	133	1	55	9,60	55210	120560	150700	180840
	162	1	59	13,00	67250	146730	183410	220100
	180	1	64	13,80	74720	163060	203830	244590
3,4	36	7	32	3,10	17980	39220	49030	58830
	42	1	32	3,70	20980	45760	57200	68640
	42	7	35	3,75	20980	45760	57200	68640
	49	1	35	4,35	24480	53380	66730	80070
	49	8	41	4,50	24480	53380	66730	80070
	56	8	44	5,40	27970	61000	76250	91500
	84	1	46	7,50	41960	91500	114380	137250
	96	7	51	8,25	47950	104570	130710	156860
	114	1	54	10,00	56930	124180	155220	186270
	133	1	60	11,50	66420	144880	181100	217320
	162	1	65	15,70	80900	176480	220600	264720
	180	1	70	16,60	89890	196100	245120	294150

2. **Kabelseile** finden nur für aufsergewöhnlich kleine Trommeldurchmesser Verwendung und gestatten diese durch ihre grofse Biegsamkeit, welche dadurch erzielt wird, dafs das ganze Kabelseil aus mehreren einzelnen Seilen zusammengeschlagen ist, die ihrerseits wieder aus mehreren Litzen bestehen.

Nach Felten & Guilleaume darf man bei Kabelseilen mit dem Trommeldurchmesser bis $D = 400\,\delta$ herabgehen, bei Steigerung der Seilspannung bis 1 : 4 der Bruchgrenze. Diese äufsersten Grenzwerte sind vorzüglich bei stärkeren Drähten möglichst zu vermeiden. Schutz gegen Rost durch Verzinken bei Benutzung von Tiegelflufsstahl-(Gufsstahl-)draht dringend empfohlen.

Kabelseile von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

Drahtdicke. mm	Zahl der Drähte im Seile.	Durchmesser des Seiles $d = \delta\sqrt{3,3\,i}$ mm	Gewicht f. d. lfd. m Seil. kg	Bruchlast des Seiles in kg. Seil aus geglühtem Eisen- oder Bessemerdraht: (4000 kg f. d. qcm)	Seil aus Patent-Gufsstahldraht mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von 9000	12000
1,0	120	20	0,90	3770	8500	11300
	144	22	1,10	4520	10200	13560
	210	25	1,70	6600	14850	19800
	252	28	2,20	7900	17800	23700
	294	32	2,70	9200	20700	27600
1,2	120	24	1,40	5430	12220	16300
	144	27	2,00	6520	14670	19560
	210	31	3,00	9500	21380	28500
	252	35	3,60	11400	25650	34200
	294	38	4,20	13300	29900	39900
1,4	120	28	2,00	7390	16630	22170
	144	32	2,70	8870	19950	26610
	210	36	3,80	12930	29100	38800
	252	40	4,70	15500	34900	46500
	294	45	5,50	18100	40700	54300
1,6	120	32	2,50	9650	21700	28950
	144	36	3,40	11600	26100	34800
	210	41	4,60	16900	38000	50700
	252	46	5,75	20300	45650	60700
	294	51	7,00	23650	53200	70950
1,8	120	36	3,20	12200	27450	36600
	144	40	4,10	14640	32940	43920
	210	46	5,80	21350	48040	64050
	252	51	7,30	25620	57650	76860
	294	57	9,00	29890	67250	89670
2,0	120	40	3,90	15080	33930	45240
	144	45	4,80	18100	40720	54300
	210	51	7,00	26400	59400	79200
	252	57	8,70	31700	71300	95000
	294	63	11.50	36950	83140	110850

3. Bremsberg- und Haspelseile.

Trommeldurchmesser $D \geq 300\,\delta$, womöglich $D = 500\,\delta$. Für Leitrollen im allgemeinen $D \geq 300\,\delta$ ausreichend. Haspelseile, wenn, wie üblich, links geschlagen, sind von links nach rechts fortschreitend aufzuwickeln, da sich sonst das Seil bei freianhängender Last von selbst während des Betriebes aufdreht.

Haspelseile von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

Drahtdicke. mm	Zahl der Drähte im Seile.	Zahl der Hanfseelen im Seile.	Durchmesser des Seiles. mm	Gewicht f. d. lfd m Seil. kg	Bruchlast des Seiles in kg.		
					Seil aus geglühtem Eisen- oder Bessemerdraht: (4000 kg f. d. qcm)	Seil aus Patent-Gufsstahldraht mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von 9000	12000
1,0	24	1	7	0,20	755	1700	2260
	28	1	8	0,25	880	1980	2640
	35	1	8,5	0,30	1100	2475	3300
	42	1	9	0,34	1320	2970	3960
	42	7	10	0,37	1320	2970	3960
	49	1	11	0,40	1540	3465	4620
	49	8	12	0,42	1540	3465	4620
	56	8	13	0.48	1760	3960	5280
1,2	24	1	8	0,28	1085	2440	3260
	28	1	9	0,33	1270	2850	3810
	35	1	10	0,40	1585	3565	4760
	42	1	11	0,48	1900	4275	5700
	42	7	12	0,50	1900	4275	5700
	49	1	13	0,57	2215	4990	6650
	49	8	14	0,65	2215	4990	6650
	56	8	15	0,75	2530	5700	7590

Bremsberg- und Streckenförderseile von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

Drahtdicke. mm	Zahl der Drähte im Seile.	Zahl der Hanfseelen im Seile.	Durchmesser des Seiles. mm	Gewicht f. d. lfd. m Seil. kg	Bruchlast des Seiles in kg.			
					Seil aus Eisen- oder Bessemerdraht		Seil aus Patent-Gufsstahldraht	
					mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von			
					4000	6000	9000	12000
	24	1	7	0,20	755	—	1700	—
	28	1	8	0,25	880	—	1980	—
	35	1	8	0,30	1100	—	2475	—
1,0	36	7	9	0,35	—	1700	—	3400
	42	1	9	0,35	1320	—	2970	—
	42	7	11	0,40	—	1980	—	3960
	49	1	11	0,40	1540	—	3465	—
	24	1	8,5	0,30	1085	—	2440	—
	28	1	10	0,35	1270	—	2850	—
	35	1	10	0,40	1585	—	3565	—
1,2	36	7	11	0,45	—	2445	—	4890
	42	1	11	0,50	1900	—	4275	—
	42	7	13	0,55	—	2850	—	5700
	49	1	13	0,60	2215	—	4990	—
	24	1	10	0,40	1480	—	3330	—
	28	1	11	0,45	1725	—	3880	—
	35	1	11	0,50	2155	—	4850	—
1,4	36	7	13	0,55	—	3330	—	6660
	42	1	13	0,65	2585	—	5820	—
	42	7	14	0,65	—	3880	—	7760
	49	1	14	0,75	3020	—	6790	—
	24	1	11	0,50	1930	—	4340	—
	28	1	13	0,60	2250	—	5060	—
	35	1	13	0,70	2810	—	6320	—
1,6	36	7	15	0,75	—	4345	—	8690
	42	1	15	0,85	3380	—	7605	—
	42	7	17	0,85	—	5070	—	10140
	49	1	17	0,95	3940	—	8870	—
	24	1	13	0,60	2440	—	5490	—
	28	1	14,5	0,75	2850	—	6410	—
	35	1	14,5	0,90	3560	—	8010	—
1,8	36	7	17	0,95	—	5500	—	11000
	42	1	17	1,05	4275	—	9620	—
	42	7	19	1,05	—	6410	—	12820
	49	1	19	1,25	4990	—	11220	—

Drahtdicke. mm	Zahl der Drähte im Seile.	Zahl der Hanfseelen im Seile.	Durchmesser des Seiles. mm	Gewicht f. d. lfd. m Seil. kg	Bruchlast des Seiles in kg. Seil aus Eisen- oder Bessemerdraht, mit einer Bruchfestigkeit in kg f. d. qcm Drahtquerschnitt von 4000	6000	Seil aus Patent-Gufsstahldraht 9000	12000
	24	1	14	0,75	3020	—	6795	—
	28	1	16	0,90	3520	—	7920	—
	35	1	16	1,10	4400	—	9900	—
	36	7	19	1,15	—	6785	—	13570
	42	1	19	1,30	5280	—	11880	—
2,0	42	7	21	1,30	—	7920	—	15840
	49	1	21	1,50	6160	—	13860	—
	72	1	25	2,25	9050	—	20360	—
	84	1	27	2,60	10560	—	23760	—
	96	1	30	2,85	12070	—	27160	—
	114	1	32	3,40	14330	—	32240	—
	24	1	15,5	0,90	3650	—	8215	—
	28	1	18	1,05	4260	—	9585	—
	35	1	18	1,25	5325	—	11980	—
2,2	36	7	21	1,30	—	8210	—	16420
	42	1	21	1,55	6390	—	14380	—
	42	7	23	1,60	—	9585	—	19170
	49	1	23	1,85	7450	—	16765	—
	24	1	17,5	1,15	4710	—	10600	—
	28	1	20	1,40	5495	—	12370	—
	35	1	20	1,65	6870	—	15460	—
2,5	36	7	24	1,70	—	10600	—	21200
	42	1	24	2,00	8245	—	18550	—
	42	7	26	2,05	—	12365	—	24730
	49	1	26	2,35	9620	—	21640	—
	24	1	20	1,45	5910	—	13300	—
	28	1	22,5	1,75	6895	—	15520	—
	35	1	22,5	1,95	8620	—	19400	—
2,8	36	7	26	2,10	—	13300	—	26600
	42	1	26	2,50	10345	—	23275	—
	42	7	29	2,55	—	15515	—	31030
	49	1	29	3,00	12070	—	27150	—
	24	1	22	1,75	7250	—	16310	—
	28	1	25	2,10	8460	—	19025	—
	35	1	25	2,40	10575	—	23780	—
3,1	36	7	29	2,55	—	16305	—	32610
	42	1	29	3,05	12685	—	28540	—
	42	7	32	3,10	—	19025	—	38050
	49	1	32	3,60	14800	—	33300	—

4. Aufzugseile.

Werden für kleinere Trommeldurchmesser in Drahtstärken von 0,5 bis 1,2 mm mit vielen Drähten nach Art der Kabelseile besonders biegsam hergestellt, so dafs $D \geqq 500\,\delta$ bei $D = 28\,d$ für Seile mit $i = 96$ und $D = 18\,d$ bei Seilen mit $i = 252$ statthaft. Sind gröfsere Trommeldurchmesser zulässig, so finden Seile von geringerer Drahtzahl bei Drahtstärke von 1 bis 1,6 mm Verwendung. Hierbei ist D mit zunehmender Drahtdicke und Seildicke wachsend zwischen $D = 500\,\delta$ bis $D = 940\,\delta$ zu wählen, entsprechend den näheren Angaben der nachfolgenden Tafel. Material für Aufzugseile Tiegelflufsstahldraht von 12000 kg Festigkeit f. d. qcm. In der Praxis finden sich Ausführungen mit mehrjähriger Betriebsdauer bei schweren Laufkranen mit **Materialspannungen** bis auf

$$3000 \geqq \frac{P}{i\frac{\pi\delta^2}{4}} + \left(\frac{3}{8}\,2150000\right)\frac{\delta}{D} \cdot {}^{*)} \quad (P \text{ s. S. } 443.)$$

Patent-Gufsstahldraht-Aufzugseile von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

Gröfsere Trommeldurchmesser.**)

Durchmesser der Windentrommel. mm	Bruchlast des Seiles un-verzinkt. kg	Bruchlast des Seiles ver-zinkt. kg	Seildicke $d = \delta\sqrt{2{,}1\,i}$ mm	Zahl der Drähte im Seile.	Dicke der Drähte im Seile. mm	Ungefähres Gewicht von 100 m Seil. kg
500	3990	3610	9	42	1,0	32
	4655	4210	10	49	1,0	37
	6840	6190	12	72	1,0	54
	7980	7220	13	84	1,0	63
	9120	8250	15	96	1,0	72
	10830	9800	16	114	1,0	86
550—600	4790	4320	10	42	1,1	38
	5590	5040	11	49	1,1	44
	8210	7410	13	72	1,1	65
	9580	8650	14	84	1,1	76
	10940	9880	16	96	1,1	87
	13000	11740	17	114	1,1	103
650—700	5710	5250	11	42	1,2	45
	6660	6120	13	49	1,2	53
	9790	9000	15	72	1,2	78
	11420	10500	16	84	1,2	91
	13050	12000	18	96	1,2	104
	15500	14250	19	114	1,2	113

*) Vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1884 S. 710 und 1887 S. 871.

**) Die Seile für gröfsere Trommeldurchmesser sind mit gewöhnlichem Kreuzschlag, die nachstehenden für kleinere Trommeldurchmesser dagegen als Kabelseile biegsamer, aber auch weniger dauerhaft hergestellt.

Felten & Guilleaume empfehlen vor endgültiger Wahl eines bestimmten Seiles sich unmittelbar mit der Fabrik in Verbindung zu setzen und die Tafelangaben nur als allgemeine Entwurfsgrundlage zu betrachten.

Durchmesser der Windentrommel. mm	Bruchlast des Seiles unverzinkt. kg	Bruchlast des Seiles verzinkt. kg	Seildicke $d=\delta\sqrt{2,1\,i}$ mm	Zahl der Drähte im Seile.	Dicke der Drähte im Seile. mm	Ungefähres Gewicht von 100 m Seil. kg
750—800	6720	5710	12	42	1,3	52
	7840	6660	14	49	1,3	62
	11520	9790	16	72	1,3	91
	13440	11420	17	84	1,3	107
	15360	13050	19	96	1,3	122
	18240	15500	20	114	1,3	145
900—1000	7770	6720	13	42	1,4	62
	9060	7840	15	49	1,4	72
	13320	11520	17	72	1,4	106
	15540	13440	19	84	1,4	123
	17760	15360	21	96	1,4	141
	21090	18240	22	114	1,4	168
1000—1250	8900	7770	14	42	1,5	71
	10390	9060	16	49	1,5	83
	15260	13320	19	72	1,5	122
	17810	15540	20	84	1,5	142
	20350	17760	22	96	1,5	162
	24170	21090	23	114	1,5	192
1250—1500	10120	8900	15	42	1,6	81
	11810	10390	17	49	1,6	94
	17350	15260	20	72	1,6	138
	20245	17810	21	84	1,6	161
	23140	20350	23	96	1,6	184
	27470	24170	25	114	1,6	219

Kleinere Trommeldurchmesser.

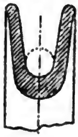
Durchmesser der Windentrommel. mm	Bruchlast des Seiles unverzinkt. kg	Bruchlast des Seiles verzinkt. kg	Seildicke $d=\delta\sqrt{3,8\,i}$ mm	Zahl der Drähte im Seile.	Dicke der Drähte im Seile. mm	Ungefähres Gewicht von 100 m Seil. kg
250	2300	1830	9	96	0,5	18
	2880	2290	10	120	0,5	23
	3460	2750	11	144	0,5	27
	4030	3200	12	168	0,5	32
	5040	4000	13	210	0,5	39
	6050	4800	14	252	0,5	48

Durchmesser der Windentrommel. mm	Bruchlast des Seiles un-verzinkt. kg	Bruchlast des Seiles ver-zinkt. kg	Seildicke $d=\delta\sqrt{3{,}3i}$ mm	Zahl der Drähte im Seile.	Dicke der Drähte im Seile. mm	Ungefähres Gewicht von 100 m Seil. kg
250—300	3260	2780	10	96	0,6	25
	4080	3480	12	120	0,6	32
	4900	4170	13	144	0,6	39
	5710	4870	14,5	168	0,6	45
	7140	6090	16	210	0,6	58
	8570	7300	17,5	252	0,6	68
300—350	4410	3840	13	96	0,7	34
	5520	4800	15	120	0,7	44
	6620	5700	16	144	0,7	53
	7730	6700	17	168	0,7	62
	9660	8400	18	210	0,7	77
	11590	10080	20	252	0,7	93
350—400	5760	5080	14	96	0,8	44
	7200	6300	16	120	0,8	58
	8640	7600	17,5	144	0,8	69
	10080	8900	19	168	0,8	81
	12600	11100	20,5	210	0,8	101
	15120	13300	22	252	0,8	121
400—450	7390	6570	16	96	0,9	56
	9240	8200	18	120	0,9	73
	11090	9800	19	144	0,9	87
	12930	11500	21	168	0,9	102
	16170	14300	23	210	0,9	128
	19400	17200	25	252	0,9	153
450—500	9120	8250	18	96	1,0	70
	11400	10300	20	120	1,0	90
	13680	12300	22	144	1,0	108
	15960	14400	24	168	1,0	126
	19950	18000	26	210	1,0	158
	23940	21600	28	252	1,0	189
500—600	13050	10940	20	96	1,2	100
	16320	13680	24	120	1,2	125
	19580	16410	27	144	1,2	150
	22840	19150	29	168	1,2	175
	28560	23940	31	210	1,2	218
	34270	28720	35	252	1,2	262

Drahtseilrollen und Trommeln. Rollenumfangsnut nach Abbild. 301 auf das 2,5- bis 3-fache des Seildurchmessers so eingedreht, dafs das Seil mit möglichst kleinem Spielraum, aber ohne jede

Klemmung gebettet wird. Auslegerrollen erfordern weitere Nutquerschnitte, um das pendelnde Seil gegen Durchscheuern an den Flanschrändern zu schützen. Meist sind Schutzbügel, welche das Ausspringen des Seiles aus der Nut verhindern, notwendig und gestatten dann flachere Nuten. Alle Scheiben sind möglichst leicht zu konstruieren und sorgfältig auszubalancieren. Auf Seiltrommeln lagert man das Seil in spiralförmig eingedrehten Umfangsnuten von kreisbogenförmigem Profil. Seilablenkung aus der Mittellage möglichst $\leq 1:50$, erforderlichenfalls durch Zuführungsrollen mit Verschiebbarkeit in achsialer Richtung.

Abbild. 301.

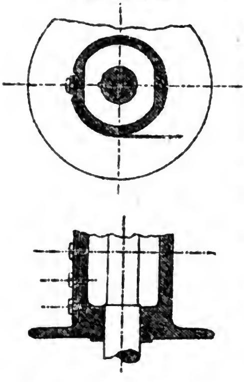


Der Seillauf ist möglichst so anzuordnen, dafs das Seil beim Auflaufen an allen Rollen und Trommeln in demselben Sinne gebogen wird, oder es sind, wenn dies nicht ausführbar, stärkere Seile als sonst zu verwenden.

B. Riemen und Gurte und deren Trommeln.

Riemen aus gutem Kernleder gestatten für Aufzüge 35 bis 40 kg Belastung f. d. qcm.

Abbild. 302.



Hanfgurte doppelt gewebt, etwa 4 mm stark, aus russischem Hanf: 70 bis 80 kg f. d. qcm, vierfach gewebt und etwa 6 bis 7 mm stark: 60 bis 70 kg f. d. qcm. Gurte bis 60 cm breit gewebt.

Trommeldurchmesser = der 30- bis 40-fachen Riemen- oder Gurtstärke. Die Befestigung der Gurte erfolgt am Trommelumfang durch Klemmschienen mit flachköpfigen Schrauben nach Abbild. 302. Die Löcher für letztere sind in Leder durch Einschlagen eines Locheisens herzustellen, in Hanfgurten dagegen mittelst eines Pfriemens durch Aufweiten der Gewebemaschen. Zur Schonung der Befestigung sollen sich bei tiefster Laststellung noch immer 1 bis 2 Gurtlagen auf der Trommel befinden.

C. Ketten, deren Trommeln und Rollen.

a. Geschweifste Ketten

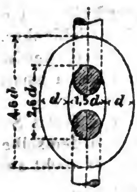
werden mit kurzen und langen Gliedern, letztere auch mit Steg ausgeführt (Abbild. 303, 304 u. 305).

Nach Harttung*) wird die Dauer der Ketten wesentlich erhöht, wenn beim Schmieden darauf geachtet wird, dafs die harten Schweifsstellen (an den kurzen Seiten) nur mit ebensolchen, und weiche gebogene Enden unter sich in Berührung kommen.

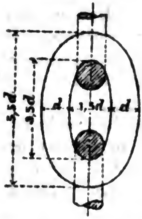
*) Vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891. S. 879.

Die Mafse in den Abbildungen werden in der Praxis nur angenähert innegehalten, besonders finden sich bezüglich der inneren Baulänge der Kettenglieder mannigfache Abweichungen auch bei gleicher Ketteneisenstärke und für schwächere Ketten häufig verhältnis-

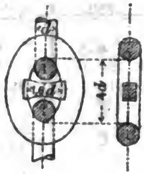
Abbild. 303.



Abbild. 304.



Abbild. 305.



mäfsig gröfsere Baulängen, so dafs bei Verwendung kalibrierter Ketten die genauen Abmessungen stets von der besonderen Bezugsquelle zu ermitteln sind, bevor die zugehörigen Daumenrollen konstruiert werden.

Als Windenkette ist die kurzgliedrige Kette am gebräuchlichsten, weil sie kleinere Rollen- und Trommeldurchmesser gestattet. Die Stegkette ist um etwa 20% tragfähiger, findet aber nur als Ankerkette Verwendung.

Bergwerks-, Schiffs- und Kranketten (englische Ketten) von H. Schlieper Sohn in Grüne bei Iserlohn (Westfalen).

Stärke der Ketten d. Zoll rhein.	Stärke der Ketten d. mm	Gewicht von 100 m. kg	Zulässige Belastung. kg	Geprüfte Tragfähigkeit kg	Aeufserste Zugkraft. kg	Bemerkung.
$\frac{3}{16}$	6,5	80	500	1000	2000	Aeufsere Gliederbreite stets = 3,5 d, äufsere Gliederlänge = 4,5 d bei Kranketten, = 5,5 d bei Förderketten für Kettenbahnen.
$\frac{4}{16}$	7	108	750	1500	3000	
$\frac{9}{32}$	8	130	850	1750	3500	
$\frac{5}{16}$	9	160	925	1850	3700	
$\frac{6}{16}$	10	223	975	1950	3900	
$\frac{7}{16}$	11	320	1250	2500	5000	
$\frac{8}{16}$	13	413	1950	3900	7800	
$\frac{9}{16}$	15	540	2250	4500	9000	
$\frac{10}{16}$	16	640	2925	5850	11700	
$\frac{11}{16}$	18	763	3500	7000	14000	
$\frac{12}{16}$	20	913	4375	8750	17500	
$\frac{13}{16}$	21	1040	5175	10350	20700	
$\frac{14}{16}$	23	1200	5725	11450	22900	
$\frac{15}{16}$	25	1390	6575	13150	26300	
1	26	1600	7375	14750	29500	
$1\frac{1}{4}$	33	2400	11250	22500	45000	
$1\frac{1}{2}$	40	3520	15000	30000	60000	

Kalibrierte Ketten und Daumenräder von Georg Kieffer in Köln (Rhein).

(Die ursprüngliche Tafel ist nach „Ernst, Hebezeuge“ berichtigt.)

Ketten-eisenstärke *d*. mm	Teilung *l*.*) mm	Teilkreisdurchmesser *D* in mm (obere Zahl). Daumenzahl *n* (untere Zahl).										
4,5	16	102 10										
5	18,5	72 6	83 7	95 8	118 10	212 18	283 24	365 31				
6	18,5	72 6	83 7	95 8	118 10	130 11	142 12	200 17	212 18	248 21	283 24	365 31
6	20	166 13	179 14	204 16	255 20	281 22	357 28	484 38	637 50			
7	22,5	73 5	144 10	172 12	187 13	287 20	387 27	458 32	616 43	859 60		
8	22,5	116 8	144 10	158 11	244 17	258 18	316 22	387 27	458 32	616 43		
9	25	82 5	97 6	128 8	160 10	176 11	239 15	319 20	430 27	573 36		
9,5	31	101 5	120 6	159 8	198 10	238 12	316 16	336 17	395 20	474 24	593 30	
11	30	98 5	135 7	192 10	211 11	268 14	287 15	382 20	459 24	574 30	1471 77	
13	36	117 5	162 7	185 8	207 9	253 11	276 12	321 14	345 15	551 24	826 36	
14,5	42,5	165 6	218 8	272 10	380 14	407 15	866 32					
16	48	156 5	186 6	216 7	337 11	490 16						
18	54	210 6	243 7	277 8	311 9							
20	62,5	242 6	281 7	320 8	360 9							
22	62,5	243 6	282 7	321 8	361 9	479 12	796 20					
25	72	279 6	325 7	370 8	415 9							
30	80	361 7	411 8									

*) Teilung der Kette ist die innere Baulänge der Glieder.

Zulässige Belastung, wenn d Ketteneisenstärke in cm und der Rollen- oder Trommeldurchmesser $\geqq 20\,d$:

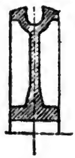
$P = 1000\,d^2$ für neue und wenig angestrengte Ketten,
$P = 800\,d^2$ „ häufiger benutzte Ketten,
$P = 500\,d^2$ „ Dampfwindenketten.

Kalibrierte Ketten sind in jedem einzelnen Fall niedriger zu belasten:

$$P = 625\,d^2; \qquad d \geqq 0{,}04\sqrt{P},$$

um schädliche Dehnungen zu verhindern, ebenso sind Richtungsänderungen im Kettenlauf mit entgegengesetzter Biegungsrichtung an den Auflaufstellen nur bei verhältnismäfsig stärkeren Ketten zulässig. Ketten über 26 mm Eisenstärke womöglich zu vermeiden.

Abbild. 306.



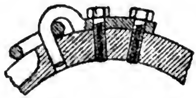
Kettenrollen mit abgeschrägten Seitenrädern nach Abbild. 306 vermindern die Biegungsspannung der Kettenglieder durch günstigere Unterstützung. Seitenränder nur bei unruhigem Kettenlauf oder stärkerer Ablenkung erforderlich. Rolle für schräg geführte Kettenglieder nach Abbild. 307.

Kettentrommeln womöglich mit spiralförmig eingegossener Nut nach Rollenprofil Abbild. 306, oder bei Kettenzuführung mit diagonal gestellten Kettengliedern Kreisbogenprofil; Ganghöhe der Spiralnut im Trommelumfang = Breite der Kettenlagerung + 3 bis 6 mm, Kettentrommeldurchmesser $D \geqq 20\,d$. Trommellänge möglichst so, dafs Uebereinanderwicklungen vermieden werden. Befestigung der Kette am Trommelumfang nach Abbild. 308.

Abbild. 307.



Abbild. 308.



Antriebkraft der Trommel im Umfang infolge der Kettenreibung, abgesehen von der Zapfenreibung für die Last Q:

$$P = Q\left(1 + 0{,}3\,\frac{d}{D}\right).^{*)}$$

Bei Rollen mit auf- und ablaufendem Trum:

$$P = Q\left(1 + 0{,}4\,\frac{d}{D}\right).$$

Daumenrollen für kalibrierte Ketten als Haspelräder und als Ersatz für Trommeln häufig benutzt, gestatten Antrieb mit Ziehkette

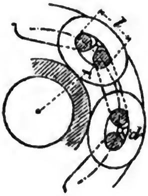
*) Auf S. 215 ist der etwas zu geringe Wert $P = Q\left(1 + 0{,}2\,\frac{d}{D}\right)$ angegeben.

aus beliebiger Entfernung und möglichste Beschränkung des Lastarmes mit dem Vorteil unveränderter Richtung des Kettenzuges.

Teilkreisdurchmesser $D = 2r$ (Abbild. 309) für die Daumenzahl n, die Teilung l und die Ketteneisenstärke d:

$$D = 2r = \sqrt{\left(\frac{l}{\sin\frac{90}{n}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\cos\frac{90}{n}}\right)^2}$$

Abbild. 309.



Für kleine Werte von d und grofse von n (Haspelräder) genügend genau:

$$D = 2r = \frac{l}{\sin\frac{90}{n}}.$$

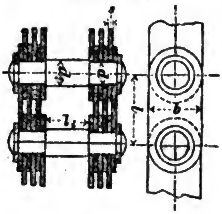
Tafel für D und n s. S. 458.

Daumenzahl n für Daumenrollen als Ersatz für Trommeln (Kettennufs) $\geqq 4$.

Das Ausspringen der Kette ist nötigenfalls durch einen Schutzbügel zu verhindern; das unbelastete Trum läfst man frei ablaufen.

b. Gelenkketten.

Abbild. 310.



Alle Gelenkketten sind nur in Verbindung mit Daumenrollen benutzbar.

1. Gallsche Kette. (Abbild. 310.)

Bolzen aus Stahl mit gedrehten Zapfen, Laschen aus sehnigem Schweifseisen.

Wegen des hohen Preises finden Gallsche Ketten vorzugsweise für grofse Lasten $P \geqq 10\,000$ kg allgemeinere Verwendung an Stelle der gewöhnlichen kalibrierten Gliederketten. (Tafel s. S. 461.)

Abbild. 311.



Daumenrolle aus Gufseisen meist mit voller Scheibe. Profil der Daumen nach Abbild. 311 durch Kreisbögen gebildet, welche das freie Ein- und Ausschwingen der Kette gestatten.

Daumenzahl n für Rollen als Ersatz für Windentrommeln $\geqq 8$, für Leitrollen $\geqq 16$.

Teilkreisdurchmesser:

$$D = 2r = \frac{l}{\sin\frac{180}{n}}.$$

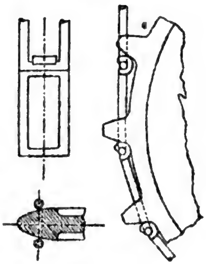
Gallsche Gelenkketten von Zobel, Neubert & Co. in Schmalkalden.

Teilung oder Baulänge *l.* mm	Länge des mittleren Bolzens l_1. mm	Stärke des mittleren Bolzens d_1. mm	Zapfenstärke *d.* mm	Plattenzahl *i.*	Plattendicke *s.* mm	Plattenbreite *b.* mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Höchste Betriebs-Belastung *P.* kg	Bemerkungen.
15	12	5	4	2	1,5	12	0,70	100	ohne Unterlagscheiben vernietet.
20	15	7,5	6	2	2	15	1,00	250	
25	18	10	8	2	3	18	2,00	500	
30	20	11	9	4	2	20	2,70	750	
35	22	12	10	4	2	27	3,77	1000	
40	25	14	12	4	2,5	30	5,00	1500	mit Unterlagscheiben vernietet.
45	30	17	14	4	3	35	7,10	2000	
50	35	22	17,5	6	3	38	11,11	3000	
55	40	24	21	6	4	40	16,50	4000	
60	45	26	23	6	4	46	19,00	5000	
65	45	28	24	6	4	53	24,00	6000	
70	50	32	26	8	4,5	53	31,50	7500	
80	60	34	30	8	4,5	65	34,00	10000	
85	65	35	31	8	5	70	40,70	12500	
90	70	40	35	8	5,5	70	48,80	15000	
110	80	45	37	8	6	85	65,00	20000	
120	90	45	40	8	6,5	100	82,00	25000	

2. Stotzsche Kette. (Abbild. 312).

Vorzugsweise als Treib- und Elevatorkette benutzt, liefert durch den eigentümlichen Bau ihrer Gelenke die verhältnismäfsig günstigste Beschränkung des specifischen Druckes in diesen, in Verbindung mit dem Vorteil leichter Zerlegbarkeit und Auswechselbarkeit einzelner Glieder. Material zäher schmiedbarer Gufs. Belastung im Betrieb abhängig vom zulässigen specifischen Flächendrucke in den Gelenken, welcher bei guter und dauernder Einfettung < 60 kg f. d. qcm zu halten ist. Hierbei steigt nur bei einzelnen Ketten die Spannung der Kettenglieder bis auf $\frac{1}{8}$ der Bruchgrenze und sinkt zum Teil auf $\frac{1}{13}$, so dafs damit die Tragfähigkeit der Kette gleichzeitig vollkommen gesichert ist. (Tafel s. S. 462.)

Abbild. 312.



Kettendaumenräder nach Abbild. 312, Teilkreisdurchmesser und Daumenprofilierung wie bei den Rädern für Gallsche Ketten.

Allgemeine Bemerkung. Drahtseile stellen sich verhältnifsmäfsig am billigsten, Hanfseile und Ketten sind teuerer, am kostspieligsten kalibrierte Gliederketten und Gelenkketten. Letztere kommen daher als Lastketten vorzugsweise in betracht, wenn möglichste Beschränkung des Trommelhalbmessers unter Anwendung von Daumenrädern gefordert wird.

Zerlegbare Treibketten von A. Stotz in Stuttgart.*)

Bezeichnung der Ketten.	Teilung des einzelnen Gliedes. mm	Breite des einzelnen Gliedes. mm	Bruchbelastung. kg	Bezeichnung der Ketten.	Teilung des einzelnen Gliedes. mm	Breite des einzelnen Gliedes. mm	Bruchbelastung. kg
22/18	22,24	18	250	65/61	64,25	60	2000
26/23	25,80	23	525	a. 65/65	65,20	64	2000
26/20	25,86	19	350	b. 65/65	65,45	64	2600
32/25	31,80	25	560	a. 71/100*	71,50	103	3500
35/33	34,55	33	850	b. 71/100*	72,50	103	3800
35/24	35,00	24	550	82/82	82,75	82	2400
a. 36/36	36,00	36	1000	100/60	99,00	60	2600
41/31	41,13	31	1000	100/64	99,70	65	2800
41/33	41,13	33	1000	100/70	100,00	72	3000
50/35	48,70	36	980	110/125*	110,05	122	6000
50/28	49,00	28	570	120/90	120,00	89	4150
50/40	49,50	39	1900	134/65	133,00	66	3300
50/50	50,50	50	2050	135/60	133,33	60	2900
55/50	55,50	50	1650	135/70	134,60	75	3600
55/40	55,95	39	1300	136/80	136,00	80	3800
55/80*	56,50	80	2200	148/70	147,77	77	2900
59/43	59,00	43	1500	a. 150/150*	149,50	150	6265
59/54	59,00	53	1850	b. 150/150*	150,50	150	10290
63/48	63,50	48	2250	c. 150/150*	151,25	150	8800
64/55	63,75	54	2660				

Die mit * bezeichneten Ketten haben Mittelstege. a bedeutet leichtes, b schweres, c mittleres Modell.

D. Haken und Oesen.

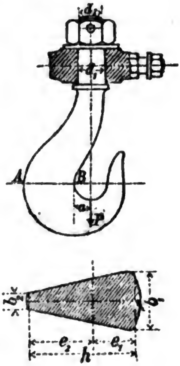
1. Die **Haken** werden gewöhnlich als einfache Haken (Abbild. 313) und nur für sehr grofse Lasten als Doppelhaken, sogen. Widderköpfe (Abbild. 314) konstruiert.

Ermittlung des auf Zug und Biegung beanspruchten gefährlichen Querschnittes ***AB.*** (Abbild. 313.) Wenn man statt des

*) In dem neusten Preis-Verzeichnis (1891) findet sich eine weitere Anzahl von Ketten-Nummern, deren Anführung hier des beschränkten Raumes halber unterblieben ist.

gekrümmten, excentrisch belasteten Hakenmaules die näherungsweise Berechnung für einen geraden, excentrisch belasteten Stab zuläfst, ergiebt sich **gleiche Beanspruchung** des Materials in den äufsersten gezogenen und gedrückten Fasern bei trapezförmigem Querschnitt:

Abbild. 313.



für $$h = a\left(\frac{b_1}{b_2} - 1\right)$$

und $$b_1 - b_2 = \frac{6\,P}{h\,k_z},$$

wenn k_z die zulässige Zugspannung des Materials bedeutet.

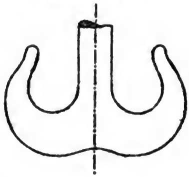
Zur Bestimmung der Werte h, b_1 und b_2 aus diesen Gleichungen ist von vornherein für $b_1 : b_2$ ein festes Verhältnis zu wählen. Empfehlenswert $b_1 : b_2 \geqq 3{,}5$.

k_z bei vorzüglichem Schweifseisen mit Rücksicht auf die Vernachlässigung der Spannungserhöhung durch die Krümmung am gefährlichen Querschnitt = 600 bis 750 kg f. d. qcm.

Maulhalbmesser a bei Seilhaken = 0,75 d bis d für Seile vom Durchmesser d,

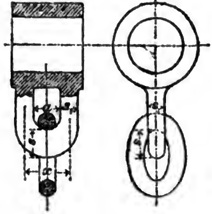
Maulhalbmesser a bei Kettenhaken = d bis 1,5 d für Ketten von der Eisenstärke d.

Abbild. 314.



Der **Hakenschaft** soll sich mit reichlichem Spielraum in der Aufhängung bewegen können. Hängt er in der stark belasteten losen Flasche eines mehrrolligen Flaschenzuges, so ist erforderlichenfalls durch doppelgelenkige Aufhängung des Querstückes die sonst infolge des unvermeidlichen Schiefziehens der Flasche auftretende Biegungsbeanspruchung des Hakenschaftes fern zu halten, oder wenigstens die obere Mündung der Bohrung des Querstückes kugelförmig auszufräsen und die Unterlagscheibe der Mutter dementsprechend auf der Unterfläche ebenfalls kugelförmig zu gestalten.

Abbild. 315.



Kerndurchmesser des Schaftgewindes d_2 bestimmt durch

$$P = 300\,d_2^2 \ (d_2 \text{ in cm}) \text{ oder:}$$

$$P = 2000\,d_2^2 \ (d_2 \text{ in Zoll engl.}).$$

Querstück und dessen Zapfen sind auf Biegung zu berechnen, letztere unter gleichzeitiger Berücksichtigung des zulässigen Flächendruckes $k \leqq 100$ kg f. d. qcm.

Doppelhaken sind nach dem Gefühl zu entwerfen und nach Mafsgabe der dann aus der Rechnung für die Zug- und Biegungs- bezw. Druck- und Biegungsspannung in den Querschnitten sich ergebenden Werte innerhalb der zulässigen Grenzen endgültig zu bestimmen.

2. Oesen nach Abbild. 315 a. S. 463 dienen zum Einhängen von Ketten bei Rollenzügen. Bei elliptischer Form des gefährlichen Querschnittes mit der Höhe s und der Stärke s_1 angenähert:

$$\frac{Px}{8} = \frac{1}{10} s_1 s^2 k_b .$$

Hieraus s bestimmbar, wenn s_1 beliebig angenommen, $k_b = 900$ kg f. d. qcm.

IV. SPERR- UND BREMSWERKE.

A. Sperrwerke.

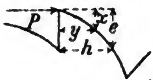
a. Zahngesperre.

Sperrzähne sind durch Biegungsbeanspruchung (nicht durch Scherung) gefährdet und dementsprechend auf erstere zu berechnen.

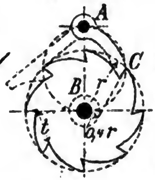
Ist P der Umfangsdruck in kg,
b die Breite des Sperrrades in cm,
k_b die zulässige Biegungsspannung in kg f. d. qcm,
($k_b \gtrless 300$, je nachdem Stofswirkungen zu berücksichtigen sind)
so gilt (Abbild. 316):

$$Px = k_b \frac{b y^2}{6} .$$

Abbild. 316.



Abbild. 317.



Dabei ist die Berechnung für denjenigen Querschnitt durchzuführen, für welchen $x : y^2$ den gröfsten Wert annimmt.

Meist giebt man den Sperrrädern 8 bis 12 Zähne, selten weniger, nur ausnahmsweise bis 20 oder mehr.

Damit die Sperrklinke leicht an der Eingriffläche der Zähne herabgleitet, bestimme man den Eingriffpunkt C (Abbild. 317) als Schnitt des Radumfanges mit dem Halbkreise über AB und wähle die Richtungen der Eingriffflächen als Tangenten an einen Kreis um B mit $0,4\,r$ als Halbmesser.*)

*) Die Eingrifffläche der Zähne mufs einen Winkel mit der Umfangstangente an die Zahnspitze bilden $> 90^0 +$ Reibungswinkel.

b. Klemmgesperre.

Haben vor Zahngesperren den Vorzug geräuschlosen Ganges, sind meist aber nur bei einzelnen Schaltwerken in Anwendung.

Bedingung für die Klemmsperrung:

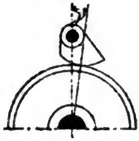
$$\operatorname{tg} \gamma < \mu \qquad (\mu \text{ Reibungskoefficient}).$$

Mit $\mu = 0{,}1$ bis $0{,}15 : \gamma$ höchstens 5 bis 8^0.

Zur Vermeidung dieses kleinen Winkels Keilnuteneingriff.

Bedingung für die Klemmsperrung bei einem halben Keilnutenwinkel α:

Abbild. 318.



$$\operatorname{tg} \gamma < \frac{\mu}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha},$$

z. B. für $\alpha = 15^0$ und $\mu = 0{,}1$ bis $0{,}15$: $\gamma = 15^0$ bis 20^0.

B. Bremsen.

Bremsscheiben sind möglichst auf der Antriebwelle oder, wenn diese verschiebbar, auf der nächsten Vorgelegewelle anzuordnen. In den meisten Fällen genügt alsdann für gewöhnliche Winden ein Bremsscheibendurchmesser von 300 bis 400 mm.

Es bezeichne:

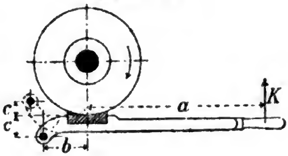
K den Druck am Bremshebelgriff,
P die Bremskraft am Umfange der Bremsscheibe,
μ den Reibungskoefficienten (Holz auf Eisen trocken 0,5; Eisen auf Eisen geschmiert 0,15 bis 0,1).

a. Backenbremsen.

$$K = P \frac{b}{a+b}\left(\frac{1}{\mu} \pm \frac{c}{b}\right).$$

Das — Zeichen gilt für die gezeichnete Drehrichtung, das + Zeichen für die entgegengesetzte.

Abbild. 319.



$$\text{Für } \frac{b}{c} = \mu \text{ wird } K = 0,$$

d. h. die Bremse wirkt selbstthätig (nur möglichst annähern, jedoch stets $b : c$ noch etwas $> \mu$).

Für die punktiert gezeichnete Anordnung des Bremshebels wird $c = -c$, also:

$$K = P \frac{b}{a+b}\left(\frac{1}{\mu} \mp \frac{c}{b}\right).$$

Bei Anwendung von Keilnuteneingriff ist statt μ zu setzen:

$$\frac{\mu}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha},$$

wenn α den halben Keilnutenwinkel bezeichnet.

b. Kegelbremsen.

Als selbständige Bremsen nur äufserst selten angewandt.

$$K = P\frac{b}{a}\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\mu},$$

worin a den Hebelarm der Kraft K, b die Entfernung der Kegelachse von dem Drehpunkte des Hebels, α den halben Spitzenwinkel des Kegels bedeutet.

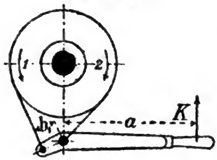
c. Bandbremsen.

Bezeichnungen aufser denjenigen auf S. 465:

e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= 2{,}71828$,
α der vom Bremsband umspannte Bogen,
δ die Dicke, b die Breite des Bremsbandes, beides in cm,
k_z die zulässige Zugspannung des Bremsbandes in kg f. d. qcm.

1. Einfache Bandbremse.

Abbild. 820.



$$K = P\frac{b_1}{a}\frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \text{ für Drehrichtung 1.}$$

$$K = P\frac{b_1}{a}\frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} \text{ für Drehrichtung 2.}$$

Tafel über $e^{\mu\alpha} = \tau$ für verschiedene Werte von $\varphi = \alpha : 2\pi$ s. S. 215, letzte Spalte.

Häufig ist $\varphi = 0{,}7$; für diesen Wert und $\mu = 0{,}18$ wird $e^{\mu\alpha} = 2{,}21$ und $\frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} = 0{,}826$.

Für den Querschnitt des **Bremsbandes** gilt:

$$b\,\delta = \frac{P}{k_z}\frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Die Rücksicht auf Abnutzung bedingt eine entsprechende Vergröfserung von δ. δ wähle man nicht über 3 mm, b höchstens 80 mm.

2. Differentialbremse.

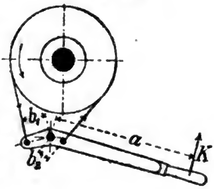
$$K = \frac{P}{a}\frac{b_1 - b_2 e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Für $b_1 \gtreqless b_2 e^{\mu\alpha}$,
wird $K = 0$ oder negativ,
d. h. die Bremse wirkt selbstthätig (nur annähern, jedoch stets b_1 noch $> b_2 e^{\mu\alpha}$).

Für $\varphi = 0{,}7$ liefert $b_1 = 2{,}5\, b_2$ bis $3\, b_2$ brauchbare Werte. (Tafel für $e^{\mu\alpha}$ s. S. 215.)

Umlaufrichtung stets so, dafs das beim Lastniedergang auflaufende Trum an dem kürzesten Hebelarm wirkt. Berechnung des Bremsbandes wie oben.

Abbild. 321.

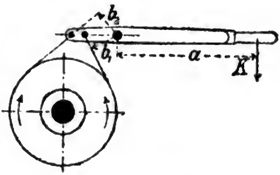


3. Bandbremse für wechselnde Umlaufrichtung.

$$b_1 = b_2;$$

$$K = \frac{P b_1}{a} \frac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Abbild. 322.

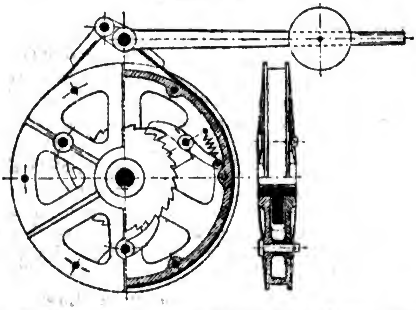


K im Verhältnis zu P sehr grofs, daher für diesen Fall Bandbremsen nicht viel günstiger als Backenbremsen; letztere der Einfachheit halber vorzuziehen.

d. Sperrradbremsen und Sicherheitskurbeln.

1. Neuerdings Sperr- und Bremswerk meist vereinigt zu einer **Sperrradbremse** (Abbild. 323, in dieser Form ausgeführt von der Duisburger Maschinen-Fabrik.)

Abbild. 323.



2. Durch Einschalten einer Reibungskupplung zwischen Kurbel und Triebling, deren eine Hälfte durch ein Zahngesperre am Rücklauf gehindert wird, gelangt man zur Konstruktion von **Sicherheitskurbeln**, welche beim Rücklauf der Winde stehen bleiben und den Lastniedergang selbstthätig hindern, bis durch eine Rückwärtsdrehung die Kupplung so weit gelöst wird, dafs sie nur noch als Bremse wirkt. Empfehlenswerte Ausführungen sind die von Mégy; E. Becker, Berlin; Weidtman.

V. MASCHINENTEILE ZUR AUFNAHME UND ZUR FORTLEITUNG VON FLÜSSIGKEITEN.

A. Pumpen und Prefscylinder.

1. Nicht auszubohrende, gufseiserne **Pumpencylinder** (vom Durchmesser d) erhalten eine Wandstärke, sofern nur Rücksichten auf Herstellung u. s. w. mafsgebend sind:

$$s \geqq 10 + \frac{d}{50} \text{ mm, wenn stehend gegossen,}$$

$$s \geqq 12 + \frac{d}{40} \text{ mm, wenn liegend gegossen.}$$

Die innere Pressung p_i kg f. d. qcm fordert eine Wandstärke, welche mit Rücksicht auf etwaiges Kernverlegen zu bestimmen ist aus:

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0{,}4\,p_i}{k_z - 1{,}3\,p_i}} + 0{,}8 \text{ bis } 0{,}6 \text{ cm.}$$

(Vergl. Festigkeit der Gefäfswandungen S. 364 u. 365.)

In Hinsicht auf etwaige Stofswirkungen (Pumpen u. s. w.) sei

$$k_z < 100 \text{ kg f. d. qcm.}$$

Ausgebohrte Cylinder, welche genaue cylindrische Form beim Ausbohren erlangen und im Betriebe beibehalten müssen, die überdies ein- oder zweimaliges Ausbohren nach eingetretener Abnutzung gestatten sollen, erhalten eine um etwa 3 bis 10 mm gröfsere Wandstärke.

2. Prefscylinder.

Prefscylinder sind nach der letzten Gleichung zu berechnen, wobei man mitunter zulassen mufs für k_z die Werte:

$k_z = 300$ bis 600 kg f. d. qcm für Gufseisen,
500 „ 1000 „ „ „ Phosphorbronze,
900 „ 1800 „ „ „ Schweifseisen (durch Zusammenschweifsen schraubenförmig gewundenen Quadrateisens).

Flufsstahlcylinder können wie Schweifseisen belastet werden nach Mafsgabe dessen, was das liefernde Werk gewährleistet.*)

Für den Fall, dafs durch den Prefskolben eine bestimmte Kraft P zu übertragen ist, wird r_a zu einem Minimum für $p_i = 0{,}36\,k_z$, und zwar: $\min(r_a) = 1{,}5\,r_i$.

*) Die Deutsch-Oesterreichischen Mannesmannröhren-Werke gewährleisten $k_z = 1250$ bis 3000 kg f. d. qcm für Martin-, $k_z = 2000$ bis 4500 kg. f. d. qcm für Tiegelflufsstahl.

3. Dampfcylinder.

Bei d mm Bohrung kann die Wandstärke s für gewöhnlich bestimmt werden aus

$$s = 13 + \frac{d}{50} \text{ mm, wenn stehend gegossen,}$$

$$s = 15 + \frac{d}{40} \text{ mm, wenn liegend gegossen.}$$

B. Rohre.

a. Allgemeines.

Die **lichte Weite** einer Rohrleitung d (in m) ergiebt sich aus der i. d. Sek. durchströmenden Menge Q (in cbm) und der Durchströmungsgeschwindigkeit v (in m i. d. Sek.) nach der Formel:

$$\frac{\pi d^2}{4} v = Q.$$

Tafel s. S. 236 u. 237.

Als **Normalwerte für v** können gelten:

für Wasser $v = 0{,}7$ bis 1,5 m,

für Gas $v = 2$ bis 5 m bei geringem Druck (Leuchtgas), sonst höher.

für Luft $v = 7$ bis 10 m bei hohem Druck (Kompressor), sonst niedriger,

für Dampf $v = 15$ bis 30 m. (Vergl. S. 273 sowie Siebenter Abschnitt, Kraftmaschinen, III. Dampfmaschinen.

Für **gröfsere Anlagen** ist eine genauere Ermittlung der vorteilhaftesten Rohrweite in der Art vorzunehmen, dafs Zinsen und Tilgung der (mit der Rohrweite wachsenden) Anlagekosten und die (mit der wachsenden Rohrweite abnehmenden) Betriebskosten zusammen ein Minimum bilden. Vergl. hierbei über Druckhöhenverlust S. 231 u. f. sowie in der Tafel auf S. 236 u. 237.*)

b. Gufseiserne Rohre.

Falls die Gleichung:

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0{,}4\, p_i}{k_z - 1{,}3\, p_i}} + 0{,}3 \text{ bis } 0{,}6 \text{ cm}$$

nicht gröfsere Werte liefert, ist bei der Lichtweite d des gufseisernen Rohres die **Wandstärke** zu wählen:

$$s = 7 + \frac{d}{60} \text{ mm für stehend gegossene Rohre,}$$

$$s = 9 + \frac{d}{50} \text{ mm für liegend gegossene Rohre.}$$

Im übrigen darf auf folgende Tafel verwiesen werden.

---

*) Vergl. u. a. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1890. S. 103.

Normal-
für gufseiserne Muffen-

Gemeinsam aufgestellt von dem Vereine deutscher Ingenieure und

Lichter Durchmesser D. mm	Normale Wandstärke δ. mm	Aeufserer Rohrdurchmesser D_1. mm	Gewicht eines Rohrstückes von 1 m Länge. kg	Muffenrohre. Stärke der Dichtungsfuge f. mm	Innere Muffenweite D_2. mm	Innere Muffentiefe t. mm	Dichtungstiefe t'. mm	Gewicht einer Muffe. kg	Uebliche Nutzlänge eines Rohres L. m	Gewicht eines Rohres von vorstehender Nutzlänge. kg	Gewicht f. d. lfd. m Rohr bei vorstehender Nutzlänge. kg
40	8	56	8,75	7	70	74	62	2,68	2	20,18	10,09
50	8	66	10,57	7,5	81	77	65	3,14	2	24,28	12,14
60	8,5	77	13,26	7,5	92	80	67	3,89	2	30,41	15,21
70	8,5	87	15,20	7,5	102	82	69	4,35	3	49,95	16,65
80	9	98	18,24	7,5	113	84	70	5,09	3	59,81	19,94
90	9	108	20,29	7,5	123	86	72	5,70	3	66,57	22,19
100	9	118	22,34	7,5	133	88	74	6,20	3	73,22	24,41
125	9,5	144	29,10	7,5	159	91	77	7,64	3	94,94	31,65
150	10	170	36,44	7,5	185	94	79	9,89	3	119,21	39,74
175	10,5	196	44,36	7,5	211	97	81	12,00	3	145,08	48,36
200	11	222	52,86	8	238	100	83	14,41	3	172,99	57,66
225	11,5	248	61,95	8	264	100	83	16,89	3	202,71	67,57
250	12	274	71,61	8,5	291	103	84	19,61	4	306,05	76,51
275	12,5	300	81,85	8,5	317	103	84	22,51	4	349,91	87,48
300	13	326	92,68	8,5	343	105	85	25,78	4	396,50	99,13
325	13,5	352	104,08	8,5	369	105	85	28,83	4	445,15	111,29
350	14	378	116,07	8,5	395	107	86	32,23	4	496,51	124,13
375	14	403	124,04	9	421	107	86	34,27	4	530,43	132,61
400	14,5	429	136,89	9,5	448	110	88	39,15	4	586,71	146,68
425	14,5	454	145,15	9,5	473	110	88	41,26	4	621,82	155,46
450	15	480	158,87	9,5	499	112	89	44,90	4	680,38	170,10
475	15,5	506	173,17	9,5	525	112	89	48,97	4	741,65	185,41
500	16	532	188,04	10	552	115	91	54,48	4	806,64	201,66
550	16,5	583	212,90	10	603	117	92	62,34	4	913,94	228,49
600	17	634	238,90	10,5	655	120	94	71,15	4	1026,75	256,69
650	18	686	273,86	10,5	707	122	95	83,10	4	1178,54	294,64
700	19	738	311,15	11	760	125	96	98,04	4	1342,64	335,66
750	20	790	350,76	11	812	127	97	111,29	4	1514,33	378,58
800	21	842	392,69	12	866	130	98	129,27	4	1700,03	425,01
900	22,5	945	472,76	12,5	970	135	101	160,17	4	2051,21	512,80
1000	24	1048	559,76	13	1074	140	104	195,99	4	2435,03	608,76
1100	26	1152	666,81	13	1178	145	106	243,76	4	2911,00	727,75
1200	28	1256	783,15	13	1282	150	108	294,50	4	3427,10	856,78

Die normalen Wandstärken δ gelten für Rohre, welche einem Betriebsdrucke von etwa 10 Atm. und einem Probedrucke von höchstens 20 Atm. ausgesetzt sind und vor allem Wasserleitungszwecken dienen. Für gewöhnliche Druckverhältnisse von Wasserleitungen (4 bis 7 Atm.) ist eine Verminderung der Wandstärken und dementsprechend auch der Gewichte zulässig, desgleichen auch für Leitungen, in welchen nur ein geringer Druck herrscht (Gasleitungen, Windleitungen, Kanalisationsleitungen u. s. w.). Für Dampfleitungen, welche gröfseren Temperaturunterschieden und dadurch entstehenden Spannungen, sowie für Leitungen, welche unter besonderen Verhältnissen schädigenden äufseren Einflüssen ausgesetzt sind, ist es empfehlenswert, die Wandstärken bezw. Gewichte entsprechend zu erhöhen.

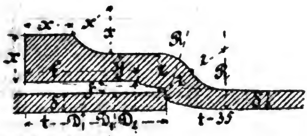
Der äufsere Durchmesser ist feststehend; Aenderungen der Wandstärke werden nur auf den lichten Durchmesser des Rohres von Einflufs sein. Als unabänderlich normal gilt ferner die innere Muffenform, die Art des Anschlusses an das Rohr, sowie die Bleifugenstärke f.

Tafel
und Flanschenrohre.

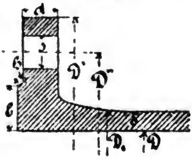
dem Deutschen Vereine von Gas- und Wasserfachmännern, revidiert 1882.

Flanschenrohre.														
Durchmesser d. Flansches D''	Dicke des Flansches d	Breite b der Dichtungsleiste	Höhe h der Dichtungsleiste	Lochkreisdurchmess. D'	Anzahl der Schrauben	Stärke der Schrauben s'		Länge der Schrauben l	Durchmesser d. Schraubenloches s	Gewicht eines Flansches nebst Anschluss	Uebliche Baulänge	Gewicht eines Rohres bei vorstehender Baulänge	Gewicht f. d. lfd. m Rohr bei vorstehender Baulänge	Lichter Durchmesser D
mm	mm	mm	mm	mm		mm	Zoll engl.	mm	mm	kg	m	kg	kg	mm
140	18	25	3	110	4	13	1/2	70	15	1,89	2	21,28	10,64	40
160	18	25	3	125	4	15,5	5/8	75	17	2,41	2	25,96	12.98	50
175	19	25	3	135	4	15,5	5/8	75	17	2,96	2	32,44	16,22	60
185	19	25	3	145	4	15,5	5/8	75	17	3,21	3	52,02	17,34	70
200	20	25	3	160	4	15,5	5/8	75	17	3,84	3	62,40	20,80	80
215	20	25	3	170	4	15,5	5/8	75	17	4,37	3	69,61	23,20	90
230	20	28	3	180	4	19	3/4	85	21	4,96	3	76,94	25,65	100
260	21	28	3	210	4	19	3/4	85	21	6,26	3	99,82	33,27	125
290	22	28	3	240	6	19	3/4	85	21	7,69	3	124,70	41,57	150
320	22	30	3	270	6	19	3/4	85	21	8,96	3	151,00	50,33	175
350	23	30	3	300	6	19	3/4	85	21	10,71	3	180,00	60,00	200
370	23	30	3	320	6	19	3/4	85	21	11,02	3	207,89	69,30	225
400	24	30	3	350	8	19	3/4	100	21	12,98	3	240,79	80,26	250
425	25	30	3	375	8	19	3/4	100	21	14,41	3	274,37	91,46	275
450	25	30	3	400	8	19	3/4	100	21	15,32	3	308,68	102,89	300
490	26	35	4	435	10	22,5	7/8	105	25	19,48	3	351,20	117,07	325
520	26	35	4	465	10	22,5	7/8	105	25	21,29	3	390,79	130,26	350
550	27	35	4	495	10	22,5	7/8	105	25	24,29	3	420,70	140.23	375
575	27	35	4	520	10	22,5	7/8	105	25	25,44	3	461,55	153,85	400
600	28	35	4	545	12	22,5	7/8	105	25	27,64	3	490,73	163,58	425
630	28	35	4	570	12	22,5	7/8	105	25	29,89	3	536,39	178,80	450
655	29	40	4	600	12	22,5	7/8	105	25	32,41	3	584,33	194,78	475
680	30	40	4	625	12	22,5	7/8	105	25	34,69	3	633, 0	211,17	500
740	33	40	5	675	14	26	1	120	28,5	44,28	3	727,26	242,42	550
790	33	40	5	725	16	26	1	120	28,5	47,41	3	811,52	270,51	600
840	33	40	5	775	18	26	1	120	28,5	50,13	3	921,84	307,28	650
900	33	40	5	830	18	26	1	120	28,5	56,50	3	1046,45	348,82	700
950	33	40	5	880	20	26	1	120	28,5	59,81	3	1171,90	390,63	750

Abbild. 324.



Abbild. 325.



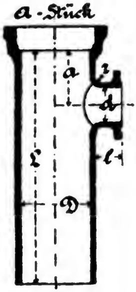
Aus Gründen der Fabrikation sind bei geraden Normalrohren Abweichungen von den durch Rechnung ermittelten Gewichten um höchstens $\pm$ 3% zu gestatten.

In den Gewichtsberechnungen ist das specifische Gewicht des Gufseisens zu 7,25 eingesetzt worden.

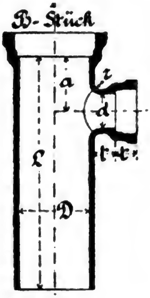
Für die Anordnung der Schraubenlöcher bei den Flanschenrohren gilt die Regel, dafs in der lotrechten Ebene der Achse des Rohres sich keine Schraubenlöcher befinden sollen.

Normale Formstücke für gufseiserne Rohrleitungen.

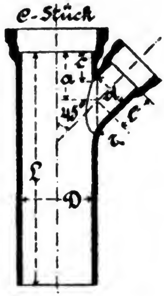
Abbild. 326.



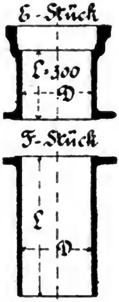
Abbild. 327.



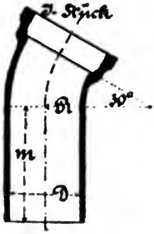
Abbild. 328.



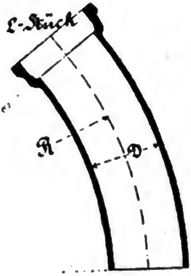
Abbild. 329.



Abbild. 330.



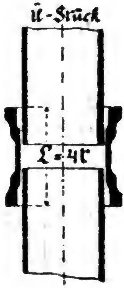
Abbild. 331.



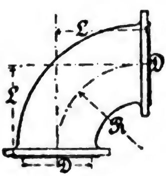
Abbild. 332.



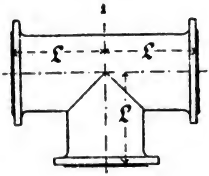
Abbild. 333.



Abbild. 334.

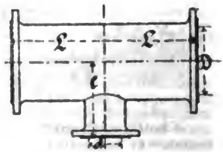


Abbild. 335.



$L = D + 100.$

Abbild. 336.



$l = \frac{D}{2} + \frac{d}{2} + 100.$

Die Bezeichnungen der einzelnen Formstücke geschieht in der Weise, dafs die Art (*A*, *B*, *C* . . .) unter Hinzufügung der Zahl für den lichten Durchmesser angegeben wird (z. B. *E* 300). Bei den *A*, *B*, *C*-Stücken giebt eine zweite Zahl unter einem Bruchstrich $\left(\text{z. B. } A\,\frac{300}{150}\right)$ den Durchmesser des Zweigrohres, bei den Krümmern die Anzahl der Stücke für den Quadranten an.

A- und *B*-Stücke.

$a = 0{,}2\,D + 0{,}5\,d + 100$ mm,
$l = 0{,}1\,d + 120$ mm,
t = Muffentiefe des Abzweiges,
$r = 0{,}05\,d + 40$ mm.

D Durchmesser des Hauptrohres. mm	*d* Durchmesser des Abzweiges. mm	*L* Baulänge m
40 bis 100	40 bis 100	0,8
125 „ 325	40 „ 325	1,0
350 „ 500	40 „ 300	1,0
	325 „ 500	1,25
550 „ 750	40 „ 250	1,0
	275 „ 500	1,25
	550 „ 750	1,5

E-Stück.

$L = 300$ mm.

F-Stück.

$L = 600$ für $D = 40$ bis 475,
$L = 800$ „ $D = 500$ „ 750,

J-Stück.

$$R = \begin{cases} 250 \text{ für } D = 40 \text{ bis } 90, \\ 150 + D \text{ für } D \geq 100. \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 200 + D \text{ für } D = 40 \text{ bis } 375, \\ 600 \text{ mm } „\ D \geqq 400. \end{cases}$$

C-Stück.

$a = 0{,}1\,D + 0{,}7\,d + 80$ mm,
$c = 0{,}1\,D + 80$ mm,
$l = 0{,}75\,a$,
$r = d$.

D Durchmesser des Hauptrohres mm	*d* Durchmesser des Abzweiges. mm	*L* Baulänge. m
40 bis 100	40 bis 100	0,8
125 „ 275	40 „ 275	1,0
300 „ 425	40 „ 250	1,0
	275 „ 425	1,25
450 „ 600	40 „ 250	1,0
	275 „ 425	1,25
	450 „ 600	1,50
650 „ 750	40 „ 250	1,0
	275 „ 425	1,25
	450 „ 600	1,5
	650 „ 750	1,75

K-Stück.

(Form wie *L*-Stück.) $R = 10\,D$.

L-Stück.

$R = 5\,D$, zulässig für $D \geqq 300$.

R-Stück.

(Uebergangsrohr) $L = 1000$.

Ü-Stück.

(Ueberschieber) $L = 4\,t$.

Für Abbild. 334 bis 336, ist: $L = D + 100$ mm,

für Abbild. 336 aufserdem: $l = \frac{D}{2} + \frac{d}{2} + 100$ mm.

Baulänge der Absperrschieber:

für Flanschenschieber $L = D + 200$ mm,
„ Muffenschieber mit unmittelbar eingetriebenen Ringen
$L = 0{,}7\,D + 100$ mm,
„ „ „ eingebleiten Sitzringen $L = D + 250 - 2\,t$.

Sämtliche Formstücke über 750 mm Durchmesser werden nicht als normale Formstücke betrachtet.

Bei der Berechnung der Gewichte von Formstücken ist dem Gewichte, welches nach den normalen Abmessungen berechnet ist, ein Zuschlag von 15%, bei Krümmern ein solcher von 20% zu geben. Diejenigen Abzweigstücke, deren Abzweig einen Durchmesser von 400 mm und mehr besitzt, sind von 2 Atm. Betriebsdruck an, sowohl in ihren Wandungen, als auch, wenn nötig, durch Rippen zu verstärken.

Gewichte gußeiserner Rohr-Formstücke.*)

D mm	*A*-Stücke. d in mm. Gewicht in kg. d = D	80	100	150	200	300	*B*-Stücke. d in mm. Gewicht in kg. d = D	80	100	150	200	300
40	14	—	—	—	—	—	14	—	—	—	—	—
50	19	—	—	—	—	—	19	—	—	—	—	—
60	22	—	—	—	—	—	22	—	—	—	—	—
70	27	—	—	—	—	—	27	—	—	—	—	—
80	30	30	—	—	—	—	31	31	—	—	—	—
90	33	32	—	—	—	—	34	33	—	—	—	—
100	37	35	37	—	—	—	38	36	38	—	—	—
125	54	49	51	—	—	—	55	50	52	—	—	—
150	68	59	63	68	—	—	70	60	64	70	—	—
175	88	79	81	84	—	—	90	80	82	86	—	—
200	97	88	90	91	97	—	100	89	91	94	100	—
225	106	95	97	100	104	—	110	96	98	102	107	—
250	125	111	113	116	121	—	130	112	114	118	124	—
275	144	126	128	131	136	—	150	127	129	133	139	—
300	162	146	148	152	155	162	170	147	149	154	158	170
350	241	174	178	182	187	199	250	175	179	184	190	207
400	299	210	212	216	222	234	310	211	213	218	225	242

D mm	*C*-Stücke. d in mm. Gewicht in kg. d = D	80	100	150	200	300	*E*-Stücke. kg	*F*-Stücke. kg	*Ü*-Stücke. kg	*K*-Stücke. $R = 10\,D$. Grad	kg	Krümmer von 90°. $R = 300 + \frac{1}{2}D$. kg
40	16	—	—	—	—	—	8	9	7	45	9	10
50	21	—	—	—	—	—	10	10	8	45	10	11
60	25	—	—	—	—	—	12	11	10	45	14	14
70	31	—	—	—	—	—	15	14	12	45	18	18
80	37	37	—	—	—	—	17	16	14	45	23	21
90	40	39	—	—	—	—	19	18	15	45	28	23
100	45	42	45	—	—	—	21	20	17	45	34	28
125	65	57	60	—	—	—	26	25	22	45	44	33
150	82	69	72	82	—	—	33	32	26	45	53	45
175	106	88	91	101	—	—	40	39	34	45	68	50
200	119	95	98	108	119	—	47	46	41	30	87	66
225	132	102	105	115	126	—	55	54	46	30	108	75
250	152	115	118	128	139	—	62	61	55	30	136	100
275	178	133	136	146	157	—	71	70	63	30	168	115
300	229	149	152	162	173	229	82	80	75	22,5	178	130
350	282	179	182	192	203	261	102	100	98	22,5	215	165
400	354	218	221	231	242	309	123	120	120	22,5	262	210

*) Nach Uhland Kalender für Maschinen-Ingenieure 1892. S. 67.

R-Stücke.

Gewicht in kg f. d. Stück. *D* = lichter Durchm. des glatten Endes.

D mm	Lichter Durchmesser des Muffenendes in mm. 50	60	70	80	90	100	125	150	175	200	225	250	275	300	350
60	16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
70	19	21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
80	21	23	25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
90	23	25	28	30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
100	24	26	30	33	35	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
125	27	29	32	35	38	42	—	—	—	—	—	—	—	—	—
150	34	35	38	40	43	46	51	—	—	—	—	—	—	—	—
175	41	43	45	47	49	51	56	62	—	—	—	—	—	—	—
200	—	49	52	54	56	58	63	69	75	—	—	—	—	—	—
225	—	—	58	61	62	64	69	75	81	88	—	—	—	—	—
250	—	—	66	68	70	72	77	82	88	95	103	—	—	—	—
275	—	—	—	76	77	79	84	90	96	102	111	118	—	—	—
300	—	—	—	82	84	86	91	97	103	110	118	126	135	—	—
325	—	—	—	—	94	96	100	106	112	119	126	134	142	150	—
350	—	—	—	—	—	103	108	114	120	127	134	141	149	157	—
375	—	—	—	—	—	—	118	124	130	136	142	148	154	162	185
400	—	—	—	—	—	—	—	130	136	142	148	157	163	172	192

Flanschen-Formstücke.

(Abbild. 334 bis 336 a. S. 472.)

Lichter Durchm. *D* mm	Flanschen-Durchm. mm	Flanschen-Deckel kg	Flanschen-Krümmer kg	Flanschen-T-Stücke kg	Flanschen-+-Stücke kg	Lichter Durchm. *D* mm	Flanschen-Durchm. mm	Flanschen-Deckel kg	Flanschen-Krümmer kg	Flanschen-T-Stücke kg	Flanschen-+-Stücke kg
40	140	2	7	10	13	200	350	16	55	76	102
50	160	2,5	8,5	13	17	225	370	18	65	88	117
60	175	3	10	15	20	250	400	21	80	110	147
70	185	4	13	19	25	275	425	26	95	135	180
80	200	5	15	21	28	300	450	30	110	165	205

c. Schweifseiserne Rohre.

Gewicht des Eisens = 7800 kg f. d. cbm.

1. Kesselrohre
(übereinander geschweifst).

Aeufserer Durchmesser. Zoll engl.	mm	Gewöhnliche Wandstärke. mm	Gewicht für d. lfd. m. kg
1¼	31,7	2¼	1,6
1½	38,1	2¼	1,9
1¾	44,4	2½	2,5
2	50,8	2¾	3,2
2¼	57,1	2¾	3,6
2½	63,5	3¼	4,8
2¾	69,8	3¼	5,3
3	76,2	3¼	5,8
3¼	82,5	3½	6,7
3½	88,9	3½	7,3
3¾	95,2	3½	7,8
4	101,6	4	9,5
4¼	107,9	4	10,2
4½	114,3	4	10,8
4¾	120,6	4½	12,8
5	127,0	4½	13,5
5¼	133,3	4½	14,2
5½	139,7	5	16,5
5¾	146,0	5	17,2
6	152,4	5	18,1
6½	165,1	5	19,6
7	177,8	5	21,2
7½	190,5	5½	24,9
8	203,2	6	28,9
8½	215,9	7	35,8
9	228,6	7	38,0
9½	241,5	8	45,6
10	254,0	8	48,2
10½	266,7	8¾	55,3
11	279,4	8¾	58,0
11½	292,1	9½	65,7
12	304,8	9½	68,7

In Längen bis reichlich 5 m.

Rohre von kleinerem oder gröfserem Durchmesser sind

2. Gas- und Wasserleitungsrohre
mit Gewinde und Muffen.
(Stumpf geschweifst; a. 12 Atm. geprüft.)

Lichter Durchmesser. Zoll engl.	mm	Aufsenweite. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg
⅛	3,2	10	1,9	0,40
¼	6,4	13	2,1	0,57
⅜	9,5	16,5	2,3	0,82
½	12,7	20,5	2,7	1,15
⅝	15,9	24	3,0	1,50
¾	19,1	26,5	3,0	1,72
⅞	22,2	30	3,3	2,25
1	25,4	33	3,3	2,44
1¼	31,7	42	3,7	3,40
1½	38,1	48	3,9	4,20
1¾	44,4	51	4,0	4,60
2	50,8	59	4,3	5,80
2¼	57,1	69	4,5	6,80
2½	63,5	75	4,7	7,70
2¾	69,8	81	4,8	8,90
3	76,2	89	5,0	10,0
3½	88,9	102	5,3	11,5
4	101,6	114	5,3	13,5

In Längen bis 14 Fufs engl. = 4270 mm.

In der Regel mit Durchmessern von ⅜ bis 3 Zoll engl. auf Lager.

Gasrohrgewinde s. S. 384.

Dampfheizungsrohre s. Elfter Abschnitt, Hochbau. V. Ausbau. Heizung.

3. Prefsrohre ohne Gewinde
für Manometer, Wasserdruckpressen u. s. w.
Wandstärke 6 mm.

Lichter Durchm. Zoll engl.	mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Lichter Durchm. Zoll engl.	mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg
¼	6	2,05	1	25	4,90
⅜	10	2,50	1¼	32	6,00
½	13	2,90	1½	38	7,00
⅝	16	3,40	1¾	44	7,80

4. Flanschenrohre

zur Leitung von Dampf, Prefsluft, Wasser u. s. w. mit drehbaren Flanschen und gebörtelten Enden, oder aufgeschweifsten ineinander gedrehten Bunden, oder aufgeschweifsten glatten Bunden, sowie mit aufgelöteten festen Flanschen.

Aeufserer Durchmesser. Zoll engl.	Aeufserer Durchmesser. mm	Wandstärke mm	Flanschen-Durchmesser. mm	Flanschen-stärke. mm	Flanschen-Lochkreis. mm	Durchmesser der Schrauben-löcher. mm	Zahl der Schrauben-löcher.	Gewicht f. d. lfd. m einschl. Flanschen. kg
1½	38	2¼	96	8	68	11,5	3	2,40
1⅝	41,5	2¼	99	8	71	11,5	3	2,40
1¾	44,5	2¼	103	8	75	11,5	3	2,52
1⅞	47,5	2¼	106	8	78	11,5	3	2,74
2	51	2½	116	10	84	14	3	3,22
2⅛	54	2½	121	10	89	14	3	3,50
2¼	57	2¾	124	10	92	14	3	4,00
2⅜	60	3	129	10	97	14	3	4,60
2½	63,5	3	133	12	101	14	3	4,90
2¾	70	3	140	12	108	14	4	5,40
3	76	3	146	12	114	14	4	5,90
3¼	83	3¼	163	12	126	17	4	7,05
3½	89	3¼	169	14	132	17	4	7,66
3¾	95	3¼	175	14	138	17	4	8,17
4	102	3¾	185	14	148	17	4	10,00
4¼	108	3¾	191	14	154	17	4	10,60
4½	114	3¾	197	14	160	17	4	11,20
4¾	121	4	204	14	167	17	4	12,63
5	127	4	226	16	179	21	4	13,68
5¼	133	4	231	16	184	21	4	14,35
5½	140	4½	239	16	192	21	4	16,70
5¾	146	4½	245	16	198	21	6	17,40
6	152	4½	254	16	207	21	6	18,10
6¼	159	4½	261	16	214	21	6	19,10
6½	165	4½	269	16	222	21	6	19,70
6¾	171	4½	275	16	228	21	6	20,60
7	178	4½	286	18	240	21	6	21,70
7½	191	5½	300	18	253	21	6	27,70
8	203	5½	313	20	266	21	6	29,90
8½	216	6½	327	20	280	21	6	30,67
9	229	6½	341	20	294	21	7	38,92

d. Nahtlose Stahlrohre (Mannesmannrohre) der Deutsch-Oesterreichischen Mannesmannröhren-Werke in Berlin.

1. Leitungsrohre

für Betriebsdrücke bis 10 Atm. Probedruck 20 Atm.
Muffen mit Bleidichtung oder Flanschenverbindung.

Lichter Durchmesser. Zoll engl.	mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m kg	Gewöhnliche Längen. m	Lichter Durchmesser. Zoll engl.	mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m kg	Gewöhnliche Längen. m
2	51	3,5	5,0	4—6,5	10	254	4,5	30,7	4—6,5
3	76	3,5	7,5		11	280	4,5	33,7	3—5
4	102	3,5	9,8		12	305	4,5	37,0	
5	127	3,5	12,2		13	330	5	41,1	
6	152	4	16,4		14	356	5	44,2	
7	178	4	19,1		15	381	5	47,3	
8	203	4	22,1		16	407	5	51,5	
9	229	4	24,7						

Leitungsrohre von zwischenliegenden Abmessungen werden ebenfalls gefertigt.

2. Hochdruckrohre

für Betriebsdrücke bis 50 Atm. Probedruck 100 Atm., falls kein höherer Probedruck vereinbart wird.

Diese Rohre werden durch übergeschraubte Muffen mit einander verbunden. Gewöhnliche Längen = 4 bis 6,5 m.

Lichter Durchmesser. Zoll engl.	mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m kg	Lichter Durchmesser. Zoll engl.	mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m kg
2	51	3,5	5,0	6	152	5	21,2
3	76	3,5	7,5	7	178	5	25,2
4	102	4	11,0	8	203	5	29,2
5	127	4	14,2				

Aufserdem werden Hochdruckrohre für noch höhere Drücke und mit obigen, sowie gröfseren Durchmessern bis zu 16 Zoll engl. = 407 mm u. zw. mit Flanschenverbindungen angefertigt.

3. Rohre aus härtbarem Tiegelflufsstahl

bis zu den härtesten Sorten zur Herstellung von Bohrern, Fräsern und anderen Werkzeugen, Lager- und Steuerungsbüchsen u. dergl. sind vorrätig in allen Abmessungen von 15 bis 60 mm innerem Durchmesser bei 5 bis 25 mm Wandstärke in Längen bis zu 1,5 m.

Rohre von gröfseren Durchmessern bis zu 150 mm im lichten und Längen bis 4 m werden auf Verlangen angefertigt.

e. Nahtlose Kupfer-, Bronze- und Messingrohre (Patent Mannesmann) von C. Heckmann in Duisburg-Hochfeld.

1. Kupfer- und Bronze-Rohre.

Gewicht f. d. lfd. m in kg.

Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke in mm									
	1	1¼	1½	1¾	2	2½	3	3½	4	5
3	0,113	0,150	0,191	0,235	0,283	0,389	0,509	0,643	—	—
5	0,170	0,221	0,276	0,334	0,396	0,530	0,679	0,841	1,018	—
6	0,198	0,256	0,318	0,383	0,452	0,601	0,763	0,940	1,131	1,555
8	0,254	0,327	0,403	0,482	0,565	0,742	0,933	1,138	1,357	1,838
10	0,311	0,398	0,488	0,581	0,679	0,884	1,103	1,336	1,583	2,120
12	0,367	0,468	0,572	0,680	0,791	1,025	1,272	1,534	1,809	2,403
14	0,424	0,539	0,657	0,779	0,905	1,166	1,442	1,732	2,036	2,686
15	0,452	0,574	0,700	0,829	0,961	1,237	1,527	1,831	2,149	2,827
16	0,881	0,609	0,742	0,878	1,018	1,308	1,612	1,930	2,262	2,969
18	0,537	0,680	0,827	0,977	1,131	1,449	1,781	2,128	2,488	3,251
20	0,594	0,751	0,912	1,076	1,244	1,590	1,951	2,326	2,714	3,534
22	0,650	0,822	0,997	1,175	1,357	1,732	2,120	2,523	2,940	3,817
24	0,707	0,892	1,081	1,274	1,470	1,873	2,290	2,721	3,167	4,100
25	0,735	0,928	1,124	1,324	1,527	1,944	2,375	2,820	3,280	4,241
26	0,763	0,963	1,166	1,373	1,583	2,014	2,460	2,919	3,393	4,382
28	0,820	1,034	1,251	1,472	1,696	2,156	2,629	3,117	3,619	4,665
30	0,876	1,104	1,336	1,571	1,809	2,297	2,799	3,315	3,845	4,948
32	0,933	1,175	1,421	1,670	1,923	2,439	2,969	3,513	4,072	5,231
34	0,990	1,246	1,506	1,769	2,036	2,580	3,138	3,711	4,298	5,513
35	1,018	1,281	1,548	1,818	2,092	2,651	3,223	3,810	4,411	5,655
36	1,046	1,316	1,590	1,868	2,149	2,721	3,308	3,909	4,524	5,796
38	1,103	1,387	1,675	1,967	2,262	2,863	3,478	4,107	4,750	6,079
40	1,159	1,458	1,760	2,066	2,375	3,004	3,647	4,305	4,976	6,362
42	1,216	1,528	1,845	2,165	2,488	3,145	3,817	4,503	5,202	6,644
44	1,272	1,599	1,930	2,264	2,601	3,287	3,987	4,701	5,429	6,927
45	1,301	1,634	1,972	2,313	2,658	3,358	4,071	4,800	5,542	7,069
46	1,329	1,670	2,015	2,363	2,714	3,428	4,156	4,898	5,655	7,210
48	1,385	1,741	2,099	2,462	2,827	3,570	4,326	5,096	5,881	7,493
50	1,442	1,811	2,184	2,561	2,940	3,711	4,496	5,294	6,107	7,775
52	1,498	1,882	2,269	2,659	3,054	3,852	4,665	5,492	6,333	8,058
54	1,555	1,953	2,354	2,758	3,167	3,994	4,835	5,690	6,560	8,341
56	1,612	2,023	2,438	2,857	3,280	4,135	5,004	5,888	6,786	8,624
58	1,668	2,094	2,523	2,956	3,393	4,276	5,174	6,086	7,012	8,906
60	1,725	2,165	2,608	3,055	3,506	4,418	5,344	6,284	7,238	9,189
65	—	2,341	2,820	3,303	3,789	4,771	5,768	6,779	7,804	9,896
70	—	2,518	3,032	3,550	4,072	5,125	6,192	7,274	8,369	10,603
75	—	2,695	3,244	3,798	4,354	5,478	6,616	7,768	8,935	11,310
80	—	2,872	3,457	4,045	4,637	5,832	7,040	8,263	9,500	12,017
85	1 cbm des Rohrmaterials				4,920	6,185	7,464	8,758	10,066	12,723
90	wiegt 9000 kg.				5,203	6,538	7,888	9,253	10,631	13,430
95	Die nicht angegebenen Rohrweiten von 3 bis 100 (ganze) mm				5,485	6,892	8,313	9,747	11,197	14,137
100	werden gleichfalls hergestellt				—	—	8,738	10,242	11,762	—

2. Messingrohre.

Gewicht f. d. lfd. m in kg.

Aeußerer Durchmesser. mm	Wandstärke in mm.									
	1	1¼	1½	1¾	2	2½	3	3½	4	5
5	0,106	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	0,134	0,159	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0,187	0,225	0,260	0,292	0,320	—	—	—	—	—
10	0,240	0,292	0,340	0,386	0,427	0,501	—	—	—	—
12	0,294	0,359	0,421	0,479	0,534	0,634	0,721	—	—	—
14	0,347	0,425	0,500	0,572	0,640	0,767	0,881	0,981	—	—
15	0,374	0,458	0,540	0,619	0,694	0,834	0,961	1,075	1,175	—
16	0,400	0,491	0,580	0,666	0,747	0,901	1,041	1,168	1,282	1,468
18	0,453	0,559	0,660	0,759	0,854	1,034	1,201	1,355	1,496	1,735
20	0,507	0,625	0,740	0,852	0,961	1,168	1,362	1,542	1,709	2,002
22	0,560	0,692	0,820	0,946	1,068	1,302	1,522	1,729	1,923	2,270
24	0,614	0,760	0,901	1,040	1,174	1,435	1,682	1,916	2,137	2,537
25	0,640	0,794	0,941	1,087	1,228	1,502	1,762	2,009	2,242	2,670
26	0,667	0,826	0,981	1,134	1,281	1,568	1,842	2,103	2,350	2,804
28	0,721	0,893	1,061	1,226	1,388	1,702	2,002	2,290	2,564	3,071
30	0,774	0,960	1,141	1,320	1,495	1,836	2,163	2,477	2,777	3,338
32	0,827	1,026	1,221	1,413	1,601	1,970	2,323	2,663	2,990	3,605
34	0,881	1,093	1,301	1,507	1,708	2,103	2,483	2,850	3,205	3,872
35	0,907	1,126	1,341	1,554	1,762	2,170	2,563	2,944	3,312	4,006
36	0,934	1,159	1,381	1,600	1,815	2,236	2,643	3,037	3,419	4,139
38	0,988	1,226	1,462	1,693	1,922	2,370	2,804	3,224	3,632	4,406
40	1,041	1,293	1,542	1,787	2,029	2,504	2,964	3,411	3,846	4,673
42	1,094	1,359	1,622	1,881	2,136	2,637	3,124	3,598	4,059	4,940
44	1,148	1,426	1,702	1,974	2,243	2,770	3,284	3,785	4,273	5,207
45	1,175	1,459	1,742	2,021	2,296	2,837	3,364	3,878	4,379	5,341
46	1,201	1,493	1,782	2,067	2,349	2,904	3,444	3,972	4,486	5,475
48	1,255	1,559	1,862	2,161	2,456	3,037	3,605	4,159	4,701	5,742
50	1,308	1,626	1,942	2,255	2,536	3,171	3,765	4,346	4,914	6,009
52	1,360	1,693	2,022	2,348	2,670	3,305	3,925	4,533	5,127	6,275
54	1,415	1,760	2,102	2,441	2,777	3,438	4,085	4,720	5,341	6,542
55	1,442	1,793	2,142	2,488	2,830	3,505	4,165	4,813	5,445	6,672
56	1,468	1,826	2,183	2,535	2,884	3,571	4,245	4,907	5,551	6,805
58	1,521	1,892	2,263	2,628	2,990	3,705	4,406	5,094	5,765	7,073
60	1,575	1,960	2,343	2,722	3,097	3,838	4,566	5,281	5,978	7,339
65	1,707	2,126	2,543	2,955	3,364	4,172	4,967	5,748	6,512	8,007
70	1,842	2,293	2,743	3,189	3,631	4,506	5,367	6,215	7,045	8,674
75	1,975	2,463	2,943	3,423	3,898	4,840	5,768	6,682	7,579	9,341
80	2,108	2,627	3,143	3,656	4,165	5,174	6,168	7,150	8,113	10,008
85	—	2,792	3,342	3,886	4,432	5,507	6,569	7,617	8,647	10,676
90	—	2,957	3,542	4,120	4,699	5,841	6,970	8,084	9,181	11,343
95	—	—	3,742	4,357	4,964	6,171	7,370	8,552	9,715	12,010
100	—	—	3,942	4,597	5,230	6,505	7,766	9,013	10,249	12,677

1 cbm des Rohrmaterials wiegt 8500 kg. Die nicht angegebenen äußeren Rohrdurchmesser zwischen 5 und 100 (ganzen) mm, sowie Wandstärken von ¾ (bis $d = 50$), 2¼, 2¾, 3½, 4½ mm werden gleichfalls hergestellt.

8. Kupferne Federrohre, Knierohre und T-Stücke von F. G. Rühmkorff & Co. in Hannover.

Lichter Durchmesser.	Kupferne Federrohre.					Kupferne Knierohre.		
	Wandstärke.	für eine Längenausdehnung von 50 mm.		für eine Längenausdehnung von 100 mm.		Annäherndes Kupfergewicht bei mm Stärke in kg		
		Kupfergewicht.	Abstand v. Flansch zu Flansch.	Kupfergewicht.	Abstand v. Flansch zu Flansch.	2,5	3,0	3,5
mm	mm	kg	mm	kg	mm			
40	2,5	6,00	500	6,50	500	1,20	1,35	1,65
50	„	8,00	500	9,00	500	1,60	1,80	2,10
60	„	9,00	500	11,00	600	1,90	2,20	2,60
70	„	12,50	600	14,00	600	2,25	2,50	3,20
80	„	15,00	600	17,00	700	2,75	3,20	3,80
90	3,0	23,00	700	25,00	700	3,20	3,60	4,20
100	„	25,00	750	30,00	800	4,00	5,00	5,50
125	„	34,00	750	42,00	800	5,90	6,60	7,25
150	3,5	54,00	1000	67,00	1000	8,00	9,00	10,00
175	„	67,00	1000	90,00	1000	10,00	11,25	12,25
200	„	78,00	1000	117,00	1250	12,50	14,00	15,25
225	4	110,00	1250	154,00	1250	14,75	16,50	18,25
250	„	122,00	1250	190,00	1500	18,00	20,00	22,00
275	„	143,00	1250	230,00	1500	20,50	23,10	25,50
300	„	166,00	1250	270,00	1600	24,00	26,50	29,50

Die Längenausdehnung einer schweifseisernen Rohrleitung ist bei einer Temperatur von 100° C 1,2 mm f. d. lfd. m.

Die Federrohre müssen bei ihrem Einsetzen in eine Leitung, um ein Drittel der berechneten Längenausdehnung auseinandergespannt, eingeschaltet werden

Lichter Durchmesser.	Kupferne T-Stücke.					Lichter Durchmesser.	Kupferne T-Stücke.				
	Wandstärke. mm						Wandstärke. mm				
	2,5	3	3,5	4	5		2,5	3	3,5	4	5
mm	Annäherndes Gewicht eines Stückes in kg.					mm	Annäherndes Gewicht eines Stückes in kg.				
40	1,25	1,50	1,75	2,00	2,5	150	7,5	9,0	10,5	12,0	15,0
50	1,7	2,0	2,3	2,6	3,3	175	9,5	11,4	13,3	15,9	19,0
60	2,0	2,4	2,8	3,2	4,0	200	11,5	13,8	16,1	18,4	23,0
70	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	225	14,0	16,8	19,6	22,4	28,0
80	3,0	3,6	4,2	4,8	6,0	250	17,5	21,0	24,5	28,0	33,0
90	3,5	4,2	4,9	5,6	7,0	275	19,5	23,4	27,3	31,2	39,0
100	4,0	4,8	5,6	6,4	8,0	300	22,5	27,0	31,5	36,0	45,0
125	5,5	6,6	7,7	8,8	11,0						

Schenkellänge der (90°) Knierohre und T-Stücke $l = d + 100$ mm, wobei d der lichte Rohrdurchmesser. Bei den T-Stücken hat der den geraden Durchgang bildende Teil die Länge $2l$. Durchmesser der schweifseisernen Flanschen wie Tafel S. 470.

f. Blei- und Zinnrohre.

(Handelsbureau der königl. sächsischen Hüttenwerke in Freiberg.)

1. Weichbleirohre.

Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck. Atm	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres. m	Zulässiger innerer Druck. Atm.	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres. m	Zulässiger innerer Druck. Atm.
2	1,0	0,10	100	25	12	4,5	2,6	25,2	18	**24**	**3,0**	3,0	23,6	6
2	1,5	0,18	55	37	12	5,0	3,0	24,6	20	**25**	2,0	1,9	37,5	4
2	2,0	0,28	35	50	**15**	2,0	1,2	53,8	6	25	2,5	2,5	28,4	5
3	1,0	0,14	77	16	15	2,5	1,6	41,6	8	25	3,0	3,0	23,6	6
3	1,5	0,23	42	25	15	3,0	1,9	38,5	10	25	3,5	3,6	19,7	7
3	2,0	0,35	28	33	15	3,5	2,3	30,5	12	25	4,0	4,1	17,3	8
4	1,5	0,29	34	18	15	4,0	2,7	27,0	13	25	4,5	4,7	15,0	9
4	2,0	0,40	62	25	15	4,5	3,1	23,5	15	25	5,0	5,4	13,1	10
4	2,5	0,57	41	31	15	5,0	3,6	20,0	16	25	5,5	6,0	11,8	11
4	3,0	0,70	33	37	**18**	2,5	1,8	36,0	7	25	6,0	6,6	10,7	12
5	1,5	0,40	65	15	18	**3,0**	2,3	31,5	8	**28**	2,5	2,7	25,9	4
5	2,0	0,50	60	20	18	3,5	2,7	27	9	28	3,0	3,3	21,2	5
5	2,5	0,70	46	25	18	4,0	3,1	23	11	28	3,5	3,9	17,9	6
5	3,0	0,90	35	30	18	4,5	3,6	20	12	28	4,0	4,5	15,5	7
6	1,5	0,40	67	12	18	5,0	4,1	17,5	14	28	4,5	5,2	13,4	8
6	**2,0**	0,60	58	16	18	5,5	4,6	15,6	15	28	5,0	5,9	11,8	9
6	2,5	0,80	46	20	18	6,0	5,1	14,1	17	28	5,5	6,6	10,6	9,5
6	3,0	1,00	36	25	**20**	2,5	2,0	36,0	6	28	6,0	7,2	9,7	10
8	1,5	0,5	70	9	20	3,0	2,4	30,0	7	**30**	2,5	2,9	24,1	4
8	2,0	0,8	56	12	20	3,5	2,9	25,0	8	30	3,0	3,6	19,4	5
8	2,5	0,9	50	15	20	4,0	3,4	21,0	10	30	**3,5**	4,2	16,6	6
8	3,0	1,2	38	19	20	4,5	3,9	18,5	11	30	4,0	4,9	14,3	6
10	1,5	0,6	70	7	20	5,0	4,5	16,0	12	30	4,5	5,5	12,6	7
10	**2,0**	0,9	75	10	20	5,5	5,0	14,4	13	30	5,0	6,3	11,1	8
10	2,5	1,1	60	12	20	6,0	5,6	12,8	15	30	5,5	7,0	10,0	9
10	3,0	1,5	44	15	**22**	2,5	2,2	32,2	5	30	6,0	7,7	11,9	10
10	3,5	1,7	40	17	22	3,0	2,7	26,2	7	**32**	2,5	3,1	22,5	4
12	1,5	0,8	63	6	22	3,5	3,2	22,1	8	32	3,0	3,8	18,6	4,5
12	2,0	1,0	65	8	22	4,0	3,7	19,1	9	32	3,5	4,5	15,6	5
12	2,5	1,3	58	10	22	4,5	4,2	16,9	10	32	4,0	5,1	13,6	6
12	3,0	1,6	47	12	22	5,0	4,8	14,8	11	32	4,5	5,8	12,0	7
12	3,5	1,9	38	15	22	5,5	5,4	13,1	12	32	5,0	6,6	11,0	8
12	**4,0**	2,3	32	16	22	6,0	6,0	11,8	13	32	5,5	7,4	9,5	8

Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck. Atm.	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck Atm.	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck. Atm.
32	6,0	8,1	11,6	9	**46**	3,5	6,2	10,4	3,5	65	7,0	17,4	6,4	5
35	3,0	4,1	16,6	4	46	4,0	7,1	9,1	4	65	9,0	23,4	4,8	6,5
35	3,5	4,8	14,1	5	46	4,5	8,1	11,1	4,5	**70**	4,5	11,9	6,2*	3
35	**4,0**	5,6	12,1	5,5	46	5,0	9,1	9,7	5	70	5,0	13,4	5,2*	3,5
35	4,5	6,3	10,7	6	46	5,5	10,1	8,7	6	70	**6,5**	17,7	4,2*	4,5
35	5,0	7,2	9,4	7	46	6,0	11,1	7,8	6,5	70	7,5	20,7	5,2*	5
35	5,5	8,0	8,5	8	46	7,0	13,2	6,4	7	70	9,0	25,3	4,2*	6
35	6,0	8,8	10,5	8	**48**	4,0	7,4	8,6	4	**75**	5,0	14,2	5,0*	3
38	3,0	4,4	15,4	4	48	5,0	9,4	9,3	5	75	6,5	18,8	5,6*	4
38	3,5	5,2	13,0	4,5	48	6,0	11,5	7,4	6	75	7,5	22,0	4,8*	5
38	4,0	6,0	11,3	5	48	7,0	13,7	6,1	7	**80**	5,0	15,1	5,2*	3
38	4,5	6,9	9,8	6	**50**	4,0	7,7	8,4	4	80	7,0	21,6	4,7*	4
38	5,0	7,7	8,7	6,5	50	**5,0**	9,8	8,8	5	80	9,5	30,3	3,4*	5,5
38	5,5	8,5	8,0	7	50	6,0	12,0	7,0	6	**90**	4,5	16,9	2,9*	2,5
38	6,0	9,2	10,0	8	50	7,0	14,2	5,8	7	90	5,5	20,2	4,9*	3
40	3,0	4,6	14,5	3,5	50	8,0	16,0	7,5	8	90	6,5	23,5	5,8*	3,5
40	3,5	5,4	12,4	4	**52**	4,0	8,0	7,9	3,5	90	9,0	32,0	4,6*	4,5
40	4,0	6,3	10,6	5	52	5,0	10,2	8,2	4,5	90	10,5	37,9	3,6*	5,5
40	**4,5**	7,1	9,5	5,5	52	6,0	12,4	6,9	5,5	**95**	4,0	14,6	3,1*	2
40	5,0	8,0	8,3	6	52	7,0	14,7	5,7	6,5	95	6,5	23,1	5,7*	3,5
40	5,5	8,9	10,2	7	52	7,5	15,9	7,3	7	95	8,0	28,8	4,6*	4
40	6,0	9,8	9,4	7,5	**54**	4,0	8,3	10	3,5	**100**	3,5	12,7	3,1*	1,7
42	3,5	5,7	11,4	4	54	5,0	10,4	8	4,5	100	5,5	18,8	6,7*	2,7
42	4,0	6,6	9,8	4,5	54	6,0	12,8	6,4	5,5	100	7,5	29,0	4,3*	3,7
42	4,5	7,5	8,6	5	54	8,5	19,0	6,0	7,5	**110**	5,0	20,6	3,6*	2,0
42	5,0	8,4	7,7	6	**56**	4,0	8,5	9,9	3,5	110	8,0	34,4	3,3*	3,6
42	5,5	9,3	9,8	6,5	56	5,0	10,9	7,7	4,5	**120**	5,0	23,2	4,4*	2,0
42	6,0	10,3	8,8	7	56	5,5	12,0	7,0	5	120	9,0	41,3	2,4*	3,7
44	3,5	5,9	11,0	4	56	7,5	17,0	6,7	6	**130**	6,0	27,6	3,4*	2,3
44	4,0	6,9	9,4	4,5	**60**	4,5	10,3	7,8	3,5	**140**	5,0	22,3	3,1*	1,5
44	4,5	7,9	8,2	5	60	**5,5**	12,8	6,3	4,5	140	7,0	39,1	3,8*	2,5
44	5,0	8,7	10,3	5,5	60	6,5	15,4	5,2	5	**160**	5,0	30,7	4,2*	1,5
44	5,5	9,8	9,0	6	60	7,5	18,0	6,2	6	**180**	5,0	33,8	2,9*	1,4
44	6,0	10,8	8,1	7	**65**	5,0	12,5	6,2	3,5	**200**	5,0	35,9	1,6*	1,2
44	7,0	12,7	6,7	8	65	6,0	15,2	5,1	4,5					

Die Sorten mit fettgedruckter Wandstärke werden stets auf Lager gehalten.

2. Hartbleirohre.

Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres. m	Zulässiger innerer Druck. Atm	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck. Atm	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg.	Größte Länge eines gepreßten Rohres m	Zulässiger innerer Druck. Atm.
13	1,5	0,8	60,0	11,5	40	3,0	4,6	14,5	7,5	54	2,0	4,0	3,1*	3,5
15	1,5	0,9	53,0	10,0	42	1,5	2,3	3,1*	3,5	54	3,0	6,0	3,1*	5,5
16	2,0	1,3	48,0	12,5	42	2,0	3,2	3,1*	4,5	54	3,5	7,2	8,4	6,0
18	1,5	1,0	47,0	8,0	42	2,5	4,0	3,1*	5,5	56	2,0	4,1	3,1*	3,5
18	2,0	1,4	46,0	11,0	42	3,0	4,8	13,5	7,0	56	3,0	6,3	3,1*	5,0
20	1,5	1,2	39,0	7,5	44	1,5	2,4	3,1*	3,0	56	3,5	7,4	8,0	6,0
20	2,0	1,6	45,0	10,0	44	2,0	3,3	3,1*	4,5	60	2,5	5,6	3,1*	3,0
22	1,5	1,3	38,0	6,5	44	2,5	4,1	3,1*	5,5	60	3,0	6,7	3,1*	5,5
22	2,0	1,7	42,0	9,0	44	3,0	5,0	13,0	6,5	65	2,0	4,8	3,1*	3,0
25	1,5	1,4	3,1*	6,0	46	1,5	2,6	3,1*	3,0	65	3,0	7,3	3,1*	4,5
25	2,0	1,9	37,0	8,0	46	2,0	3,5	3,1*	4,0	65	4,0	9,8	7,3	6,0
28	1,5	1,6	3,1*	5,0	46	2,5	4,3	3,1*	5,0	70	3,5	9,2	3,1*	3,5
28	2,0	2,1	33,0	7,0	46	3,0	5,3	12,2	6,5	75	3,5	9,8	3,1*	4,5
30	1,5	1,7	3,1*	5,0	48	1,5	2,7	3,1*	3,0	75	4,0	11,2	5,6*	5,0
30	2,0	2,3	30,0	6,5	48	2,0	3,6	3,1*	4,0	80	2,5	7,3	3,1*	3,5
32	1,5	1,8	3,1*	4,5	48	2,5	4,5	3,1*	5,0	95	3,0	10,9	4,0*	3,0
32	2,0	2,5	3,1*	6,0	48	3,0	5,5	11,6	6,0	100	3,5	12,7	3,4*	4,0
35	1,5	2,0	3,1*	4,0	48	3,5	6,4	10,0	7,0	105	3,0	10,3	3,9*	2,5
35	2,0	2,7	3,1*	5,5	50	1,5	2,8	3,1*	3,0	110	4,0	14,0	5,3*	3,5
35	2,5	3,4	20,0	7,0	50	2,0	3,7	3,1*	4,0	115	2,5	10,5	3,3*	2,0
35	3,0	4,1	16,6	8,5	50	2,5	4,7	3,1*	5,0	120	3,5	16,1	4,2*	2,5
38	1,5	2,1	3,1*	3,5	50	3,0	5,7	11,2	6,0	125	2,5	12,3	4,9*	2,0
38	2,0	2,8	3,1*	5,0	50	3,5	6,7	9,5	7,0	130	4,0	19,0	4,5*	3,0
38	2,5	3,6	3,1*	6,5	52	1,5	2,9	3,1*	2,5	135	3,5	15,7	4,2*	2,5
38	3,0	4,4	15,4	7,5	52	2,0	3,9	3,1*	3,5	140	3,0	14,3	4,2*	2,0
40	1,5	2,2	3,1*	3,5	52	2,5	4,9	3,1*	4,5	160	3,0	17,5	3,1*	1,5
40	2,0	3,0	3,1*	5,0	52	3,0	5,9	3,1*	5,5	180	3,0	19,9	4,2*	1,5
40	2,5	3,8	3,1*	6,0	52	3,5	6,9	9,1	6,5	200	3,5	24,1	2,2*	1,5

Sämtliche Bleirohrsorten werden unverzinnt, innen geschwefelt, innen oder aufsen, sowie innen und aufsen verzinnt geliefert ausschl. 2, 3, 4, 5, 6 und 7 mm lichten Durchmesser, welche nur unverzinnt oder aufsen verzinnt abgegeben werden.

8. Zinnrohre mit Bleimantel (Mantelrohre).

Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Gröfste Länge eines gepreſsten Rohres m	Zulässiger innerer Druck. Atm	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Gröfste Länge eines gepreſsten Rohres m	Zulässiger innerer Druck. Atm	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Gröfste Länge eines gepreſsten Rohres m	Zulässiger innerer Druck. Atm.
10	4,0	2,0	12,5	20	20	5,25	4,7	12,7	13	30	6,0	7,7	8,4	10,0
12	4,0	2,3	10,8	16	22	4,5	4,2	14,2	10	30	6,5	8,4	7,7	10,5
13	4,0	2,4	20,0	15	22	5,0	4,8	12,5	11	32	5,0	6,6	9,6	8,0
13	4,5	2,8	17,0	17	25	4,5	4,7	12,7	9	32	5,5	7,4	8,6	8,0
13	5,0	3,2	18,7	19	25	5,0	5,4	11,1	10	32	6,0	8,1	7,9	9,0
15	4,5	3,1	19,3	15	25	5,5	6,0	10,0	11	35	5,0	7,2	8,7	7,0
15	5,0	3,6	16,6	16	25	5,75	6,3	9,5	11,5	35	5,5	8,0	7,8	8,0
16	4,5	3,3	18,2	14	28	4,5	5,2	12,5	8,0	36	5,0	7,3	8,6	7,0
16	5,0	3,7	16,2	15	28	5,0	5,9	11,0	9,0	36	5,5	8,1	7,7	7,5
18	4,5	3,6	16,6	12	28	5,5	6,6	9,8	9,5	38	5,0	7,7	8,1	6,5
18	5,0	4,1	14,6	14	30	4,5	5,5	11,8	7,0	38	5,5	8,5	7,4	7,0
20	4,5	3,9	15,3	11	30	5,0	6,3	10,3	8,0	40	5,0	8,0	7,7	6,0
20	5,0	4,5	13,3	12	30	5,5	7,0	9,2	9,0	40	5,5	8,9	6,9	7,0

Bleirohre mit Zinnfutter zeichnen sich vor den innen verzinnten Rohren durch einen solideren Zinnüberzug aus, welcher etwa 0,15 mm stark ist; derartige Rohre werden in allen lichten Durchmessern von 10 mm bis 40 mm und in allen Wandstärken von 3 mm an aufwärts nach Maſsgabe der Tafeln für die Bleirohre geliefert.

Hartbleirohre aus Weichblei mit einem Zusatz von 10 % bezw. 15 % Antimonblei. Gröſsere Elasticität bei Temperaturwechsel gegenüber Weichbleirohren; für Dampfleitungszwecke diesen vorzuziehen.

Zinnrohre mit Bleimantel (Mantelrohre) haben 0,5 mm Zinnstärke. Das Mantelrohr wird nur in vollen Preſslängen abgegeben.

Die mit * bezeichneten Sorten werden, da sie sich beim Aufwickeln breit drücken, in Stangen geschnitten und wo angängig in Stroh, sonst aber in Lattenverschlägen bezw. Kisten versandt.

Zur Berechnung des für mittlere Temperaturen bis etwa 30° C (zulässigen) inneren Druckes p_i (in Atm.) der Blei- und Zinnrohre ist die auf S. 364 angegebene Formel benutzt:

$$s = r_i \frac{p_i}{k_z}.$$

Dabei bezeichnet r_i den lichten Halbmesser in cm, s die Wandstärke in cm; ferner ist gesetzt für:

Weichblei:

$k_z = 25$ kg f. d. qcm, entsprech. $K_z = 125$, also 5-facher Sicherheit,

Hartblei:

$k_z = 50$ kg f. d. qcm, entsprech. $K_z = 300$, also 6-facher Sicherheit,

Zinn:

$k_z = 60$ kg f. d. qcm, entsprech. $K_z = 350$, also 6-facher Sicherheit.
(Vergl. bezw. ergänze hiernach Tafel S. 307).

Gewichts-Abweichungen von den Angaben der Verzeichnisse um $\pm 5\%$ vorbehalten.

4. Zinnrohre.

Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres. m	Zulässiger innerer Druck. Atm.	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres. m	Zulässiger innerer Druck. Atm.	Lichter Durchmesser. mm	Wandstärke. mm	Gewicht f. d. lfd. m. kg	Größte Länge eines gepreßten Rohres. m	Zulässiger innerer Druck. Atm.
4	2,0	0,30	55	60	18	2,0	0,90	17,3	13	36	2	1,75	20,5	6,5
5	1,5	0,25	66	36	18	3,0	1,45	27,5	20	36	3	2,70	13,3	10,0
5	2,0	0,35	47	48	20	2,0	1,00	40,0	12	37	3	2,75	13,0	9,5
6	1,5	0,30	55	30	20	3,0	1,60	25,0	18	38	2	1,85	19,0	6,0
6	2,0	0,35	47	40	22	2,0	1,10	36,0	10	38	3	2,80	12,8	9,0
8	1,5	0,35	47	22	22	3,0	1,70	23,5	17	39	3	2,90	12,4	9,0
8	2,0	0,45	36	30	25	2,0	1,25	32,0	9	40	2	1,95	18,5	6,0
8	2,5	0,60	27	37	25	3,0	1,95	20,5	14	40	3	2,95	12,2	9,0
10	1,5	0,40	41	18	28	2,0	1,40	28,5	8,0	41	2	2,00	18,0	5,5
10	2,0	0,55	30	24	28	3,0	2,15	18,5	12,5	41	3	3,05	11,8	8,5
10	2,5	0,70	23,5	30	29	3,0	2,20	18,0	12,0	42	2	2,00	18,0	5,5
10	3,0	0,90	18	36	30	2,0	1,45	27,5	8,0	42	3	3,10	11,6	8,5
12	1,5	0,45	36,5	15	30	3,0	2,30	17,0	12,0	44	2	2,10	17,0	5,0
12	2,0	0,65	25,0	20	31	3,0	2,35	15,2	11,5	44	3	3,25	11,0	8,0
12	2,5	0,85	19,0	25	32	2,0	1,55	23,0	7,5	46	2	2,20	16,0	5,0
12	3,0	1,05	15,0	30	32	3,0	2,40	15,0	11,0	46	3	3,40	10,5	7,5
15	1,5	0,55	29,0	12	33	3,0	2,50	14,4	10,5	48	2	2,30	15,5	5,0
15	2,0	0,80	20,0	16	34	2,0	1,65	21,5	7,0	48	3	3,50	10,3	7,5
15	3,0	1,25	12,5	24	35	2,0	1,70	21,0	6,5	50	2	2,40	15,0	4,5
18	1,5	0,70	22,5	10	35	3,0	2,60	13,8	10,0	50	3	3,65	9,8	7,0

Die nicht angegebenen lichten Durchmesser von 4 bis 42 (ganzen) mm, sowie solche bis 60 mm werden gleichfalls geliefert.

C. Ventile.

a. Selbstthätige Ventile.

Selbstthätige Ventile (bei Pumpen, Gebläsen u. s. w.) erfordern zuverlässige **Ventilführung**, wobei die Gleitflächen gegen Abnutzung und seitliche Ablenkung genügend grofs sein müssen. Die Führung fällt fort bei den Klappen-Ventilen für geringere Pressungen. Kugel-Ventile sind wegen mangelhafter Führung nur für untergeordnete Zwecke verwendbar. — Richtige Führung wird unterstützt durch möglichst tiefe Lage des Ventil-Schwerpunktes und durch so tiefe Lage des Ventilkastens, dafs der Flüssigkeitsstrom innerhalb des Ventilkastens von der Achse des letzteren nicht abgelenkt wird.

Dichtungsflächen. Entweder Ventil und Sitz metallisch, oder das Ventil elastisch gegliedert (Leder, Hartgummi, Vulkanfiber u. s. w.). Die Breite der Dichtungsfläche bestimmt sich nach dem zulässigen Auflagerdruck p_0 im Sitz aus:

$$Vp = Sp_0, \text{ wobei}$$

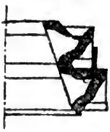
V die obere Druckfläche des Ventils,
S die Sitzfläche des Ventils,
p den Flüssigkeitsdruck auf das Ventil bezeichnet.

Gröfste Auflagerdrücke p_0 (bei stofsfreiem Gang):

für Rotgufs	bis 150 kg f. d. qcm,
für Phosphorbronze	bis 200 kg f. d. qcm,
für Gufseisen	bis 80 kg f. d. qcm,
für Hartgummi und Leder	bis 50 kg f. d. qcm.

Um auch für grofse Ventildrücke elastisches Dichtungsmaterial verwenden zu können, **entlastet** Fernis (Abbild. 337) dieses, indem die (metallische) Druckfläche von der eigentlichen Dichtungsfläche getrennt ist (Flüssigkeitsdruck p statt p_0).

Abbild. 337.



Der **Ventilhub** h ergiebt sich beim einsitzigen Ventil, wenn dieselbe Wassergeschwindigkeit wie im Sitz bestehen soll, zunächst aus der Gleichung:

$$f = uh, \text{ wobei}$$

f den freien Durchgangsquerschnitt des Ventils,
u den (kleinsten) freien Durchgangsumfang des Ventils bezeichnet.

Für den Kreisquerschnitt vom Durchmesser d wird $h = 0{,}25\,d$; wegen der hydraulischen Widerstände ist indes zu nehmen $h > 0{,}25\,d$.

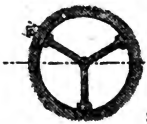
Bei **Kolbenpumpen** mufs der **Schlufs** des Ventils genau **im Hubwechsel** stattfinden, um Stöfse durch plötzliche Beschleunigung oder Verzögerung der Wassermassen zu vermeiden; daher ist unter Ab-

weichung von obiger Regel der **Ventilhub** h um so kleiner zu machen, je gröſser die Kolbengeschwindigkeit ist und je rascher der Hubwechsel erfolgt. (Sonstige Abhängigkeit der Ventilbelastung P und damit des Wertes h s. u.)

Der freie Ventilhub h ist abhängig von der **wirksamen Ventilbelastung** d. h. dem Gewicht des Ventils im Wasser + etwaigem Federdruck. Bezeichnet:

P die wirksame Ventilbelastung, welche das gehobene Ventil gegen das strömende Wasser im Gleichgewicht hält,
v die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser durch den Querschnitt f der Ventilsitzöffnung flieſst, in m i. d. Sek.,
ζ den Widerstandskoefficienten des Ventils, entsprechend den gesamten durch letzteres verursachten hydraulischen Bewegungswiderständen (vergl. S. 223 und 239),
α, β, γ, k und μ Erfahrungskoefficienten,
g die Beschleunigung durch die Schwere = 9,81 m,
i die Anzahl der Rippen im Falle der Abbild. 340,
s die Breite der Rippen (Abbild. 338), gemessen auf dem Umfange πd,
b die Breite der Dichtungsfläche,
h den Ventilhub,

Abbild. 338.



so ist nach Bach*) (als Einheiten m, qm und kg genommen) je nach der Ventilform (s. u.):

$$1)\quad P = 1000 f \frac{v^2}{2g}\left[k + \left(\frac{d}{4\mu h}\right)^2\right].$$

$$2)\quad P = 1000 f \frac{v^2}{2g}\left[k + \left(\frac{f}{\mu(\pi d - is)h}\right)^2\right].$$

$$3)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right)^2 \qquad 4)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d^2}{(\pi d - is)h}\right)^2$$

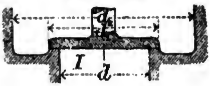
$$5)\quad \zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right) + \gamma\left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

Für die in Abbild. 339 bis 343 dargestellten fünf Ventilformen, unter der Voraussetzung, daſs $\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) = 1,8\frac{\pi}{4}d^2 = 1,8f$, hat man:

Bei I (Abbild. 339):

$b = 0,1\,d$ bis $0,25\,d$,
$h = 0,1\,d$ bis $0,25\,d$.

Abbild. 339.



Formel 1) mit

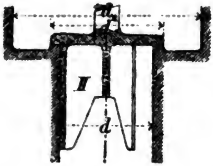
$$k = 2,5 + 19\frac{b - 0,1\,d}{d} \text{ und } \mu = 0,60 \text{ bis } 0,63.$$

Formel 3) mit

$$\alpha = 0,55 + 4\frac{b - 0,1\,d}{d} \text{ und } \beta = 0,15 \text{ bis } 0,16.$$

*) S. Bach, Versuche über Ventilbelastung und Ventilwiderstand. Berlin 1884.

Abbild. 340.



Bei II (Abbild. 340):

$h = 0{,}125\,d$ bis $0{,}25\,d$.

Formel 2) mit

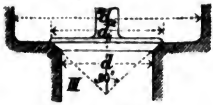
k und $\mu = 10\%$ kleiner als bei I.

Formel 4) mit

$\alpha = 8$ bis 16% gröfser als bei I und

$\beta = 1{,}7$ bis $1{,}75$.

Abbild. 341.



Bei III (Abbild. 341):

$b = 0{,}1\,d$,

$h = 0{,}1\,d$ bis $0{,}15\,d$.

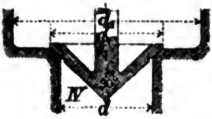
Formel 1) mit

$k = -1{,}05$ und $\mu = 0{,}89$.

Formel 5) mit

$\alpha = 2{,}6, \quad \beta = -0{,}8, \quad \gamma = 0{,}14$.

Abbild. 342.



Bei IV (Abbild. 342):

$h = 0{,}125\,d$ bis $0{,}25\,d$.

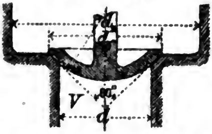
Formel 1) mit

$k = 0{,}88$ und $\mu = 0{,}68$.

Formel 3) mit

$\alpha = 0{,}6$ und $\beta = 0{,}15$.

Abbild 343.



Bei V (Abbild. 343):

$h = 0{,}1\,d$ bis $0{,}25\,d$.

Formel 1) mit

$k = 0{,}96$ und $\mu = 1{,}15$.

Formel 5) mit

$\alpha = 2{,}7, \quad \beta = -0{,}8, \quad \gamma = 0{,}14$.

Der **rechtzeitige Ventilschlufs** einer Pumpe bleibt nach Bach*) erhalten, wenn zwischen der Umdrehungszahl n, dem Kolbenhub s, bezw. der mittleren Kolbengeschwindigkeit $c_m = sn : 30$, der wirksamen Ventilbelastung P und dem Pumpenkolbenquerschnitt F die Gleichung besteht:

$$P = \frac{1}{\varepsilon}\, n\, c_m\, F = \frac{1}{30\,\varepsilon}\, n^2 s\, F.$$

Die Gröfse und Art der Abhängigkeit der Konstanten ε vergl. a. a. O. (Fufsnote).

Der **Ventilumfang** u folgt unter Zugrundelegung einer bestimmten mittleren Wassergeschwindigkeit v zwischen Ventil und Sitz ($= 1$ bis $2{,}5$ m i. d. Sek. bei Kolbenpumpen) aus h, der mittleren Kolbengeschwindigkeit c_m und der Kolbenfläche F nach: $uhv = Fc_m$.

Die Verwirklichung des aus dem kleinen Ventilhube h sich ergebenden grofsen u geschieht durch folgende **Anordnungen:**

---

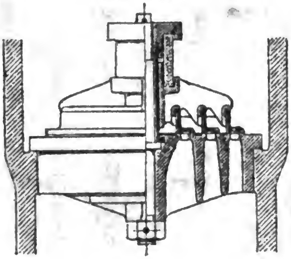
*) S. Zeitschr. d. V. d. Ing., 1886 u. 1887.

a) Vereinigung einer Anzahl kleiner **einsitziger** Ventile auf einem gemeinsamen Ventilsitze mit ebener oder treppenförmiger Anordnung, wobei

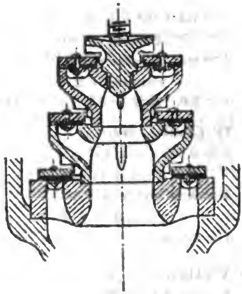
$$u = \Sigma (\pi d).$$

b) Mehrsitzige Ventile mit koncentrisch verbundenen Ringen oder zur Erleichterung der Dichtung mit für sich beweglichen Ringen, letztere in einer Ebene angeordnet (Konstruktion von Ehrhardt) (Abbild. 344) oder als „Etagen"-Ring-Ventil (Abbild. 345), zuerst angegeben von Thometzek in Bonn.

Abbild. 344.



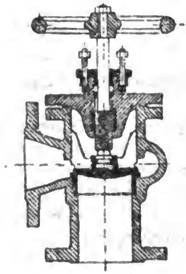
Abbild. 345.



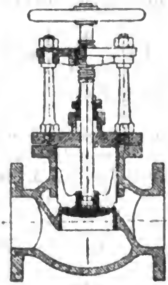
Die Beschleunigung des Ventils beim Schlufs wird vergröfsert, und der erforderliche Umfang verkleinert durch Anwendung von **Federdruck** auf das Ventil (im Wasser nur Rohr-Gummifedern anzuwenden), oder durch erzwungenen Ventilschlufs mittelst einer Steuerung (Konstruktion von Riedler).

b. Absperrventile und Absperrschieber.

Abbild. 346.



Abbild. 347.



Einfache Absperrventile Abbild. 346 und 347, Absperrschieber Abbild. 348, Absperrhahn Abbild. 349, Entlastung der Absperrventile durch Doppelsitz-(Glocken-) Ventile (Abbild. 350 und 351), zu deren Eröffnung die Kraft erforderlich ist:

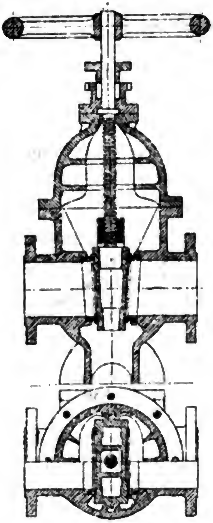
$$K = \left(\frac{\pi d_u^{\,2}}{4} - \frac{\pi d_o^{\,2}}{4}\right) p,$$

worin bezeichnet:

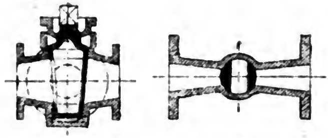
d_u den äufseren,

d_o den inneren mittleren Sitzdurchmesser.

Abbild. 348.

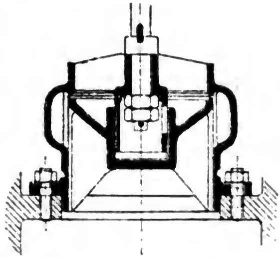


Abbild. 349.

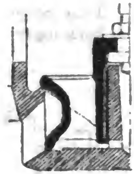


Dreiweghahn. Zweiweghahn.

Abbild. 350.



Abbild. 351.



Hub von Doppelsitzventilen $h = \frac{1}{8}\, d$ für einen Durchgangsquerschnitt $= \frac{\pi\, d_u^{\,2}}{4}$.

Der Sitz ist (wegen der Wärmeausdehnung) aus demselben Material wie das Ventil (bei den Steuerventilen der Dampfmaschinen Gufseisen) und ferner aus einem Stück herzustellen.

VI. KOLBEN, KOLBENSTANGEN UND STOPFBÜCHSEN.*)

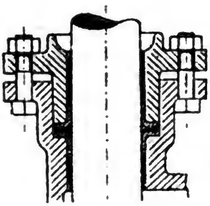
A. Kolben.

a. Taucherkolben.

Dichtung mit Lederstulp, z. B. für Prefspumpenkolben (Abbild. 352), Wasserdruckpressen (Abbild. 353), anwendbar für alle, besonders hohe Drücke, bei reinem Wasser und Kolbengeschwindigkeiten < 1 m i. d. Sek. Bei grofsen Geschwindigkeiten sind Reibung und Verschleifs bedeutend; für Kolbengeschwindigkeiten $> 1{,}5$ m i. d. Sek. Dichtung durch Metallringe.

Für stärkere Taucherkolben werden neuerdings allgemein mit Talg sorgfältig eingefettete, rechteckig geflochtene Baumwollen-Packungen benutzt.**)

Abbild. 352.



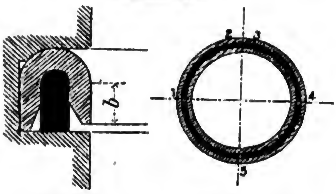
Stulp-Reibung.

1. Bezeichnet:

b die Höhe der reibenden Stulpfläche in cm,
p den Flüssigkeitsdruck in kg f. d. qcm,
μ den Koefficienten der gleitenden Reibung zwischen Kolbenfläche und Leder,
D den Durchmesser des Kolbens in cm,
W den Reibungswiderstand, welcher sich der Bewegung des Kolbens bei der Pressung p entgegensetzt,
W_0 den Wert von W für $p = 0$, also beim Leergang; dann ist nach Gollner: ***)

$$W = W_0 + \pi D b p \mu.$$

Abbild. 353.



Für b reicht 12 bis 20 mm aus; Lederstärke 4 bis 6 mm; für sehr kleine Kolben herunter bis auf 1,5 mm, wobei dann $b = 4$ bis 5 mm. Für Baumwollen-Packung Dichtungshöhe $\gtreqless D + 20$ mm.

W_0 ist zu schätzen oder unmittelbar zu bestimmen; für

*) Nach Bach und Riedler.

**) S. Ernst, Beiträge zur Entwicklung der Hebewerke u. s. w., Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891. S. 511 u. f.

***) Vergl. Bach, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1886, S. 155.

glatte Oberflächen bei guter Fettung des Leders wird (für $p = 20$ bis 140 Atm.) $\mu = 0{,}07$ bis 0,08.

2. Nach neueren Versuchen (vergl. S. 202) ist die Reibung **unabhängig von der Höhe** b der Abdichtung u. zw. ist:

$$W = \mu p D \pi.$$

Werte von μ für verschiedene Dichtungen s. S. 202.

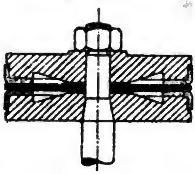
b. Scheibenkolben.

1. **Scheibenkolben mit Lederstulpdichtung** (Abbild. 354) für reines Wasser bis 5 Atm. Druck.

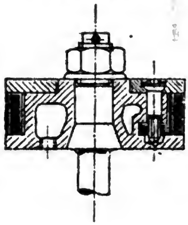
2. **Scheibenkolben mit Liderungsringen** für Dampfkolben u. s. w.

Kolbenkörper: ohne Deckel, plattenförmig geschmiedet oder aus Stahlgufs (Abbild. 355), oder hohl gegossen, ohne Deckel (Abbild. 356). Kernöffnungen bei rasch laufenden Maschinen in der Nabe (Abbild. 356) oder am inneren Umfang (Abbild. 358), mit Deckelring, hohl gegossen (Abbild. 358 und 359). Zweiteilige Kolben mit grofsen Deckelplatten bei rasch laufenden Maschinen zu vermeiden. Alle Schrauben gegen Lockerung und Herausfallen zu sichern.

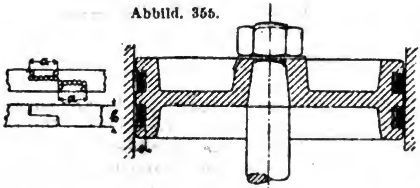
Abbild. 354.



Abbild. 356.



Abbild. 355.

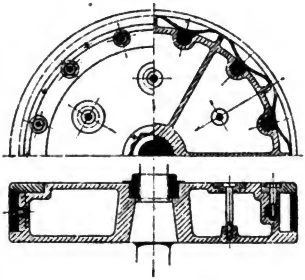


Dichtungsringe aus Gufseisen, selbstspannend mit gröfserem Durchmesser hergestellt, gespalten und $a \sim 0{,}1\,D$ (Abbild. 355) herausgeschnitten; dann auf den Cylinderdurchmesser D abgedreht. Deckung des Spaltes durch Ueberblattung oder durch ein besonderes Füllstück. Die Spalten mehrerer Ringe gegeneinander versetzt. Ringdicke: $s \sim \frac{1}{30} D$, Ringbreite: $h \sim 25$ mm.

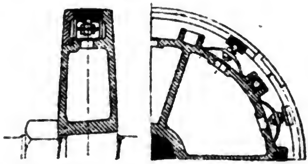
Nachstellung der Dichtungsringe nur durch Selbstspannung bei rasch laufender Maschine, oder durch stellbare Druckfedern unter Einschaltung eines Verteilungsringes hinter dem Dichtungsring. Dichtungsringe mit radialer und achsialer Nachstellung für mäfsige

Kolbengeschwindigkeiten durch selbstspannende Spiralfedern (Abbild. 361) (Mather & Platt) oder Druckkeile (Abbild. 358).

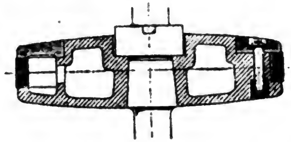
Abbild. 357.



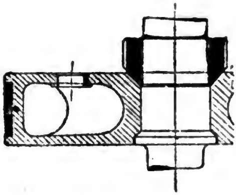
Abbild. 358.



Abbild. 359.



Abbild. 360.



Abbild. 361.



Befestigung der Kolben auf den Stangen durch Schrauben (Abbild. 354, 355 und 356). Auflagerdruck im Gewinde < 200 kg f. d. qcm. Ansatzkegel der Stange in die Nabe eingeschliffen. Kegelwinkel $> 8^0$. Auflagerdruck im Kegel < 400 kg f. d. qcm.

B. Kolbenstangen.

Die Kolbenstangen werden in der Regel auf **Knickung** beansprucht und deshalb berechnet aus:

$$P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}} \frac{\frac{1}{64}\pi d^4}{L_0^2} E \sim \frac{1}{2\mathfrak{S}} \frac{d^4}{L_0^2} E \text{ (s. S. 347),}$$

worin:

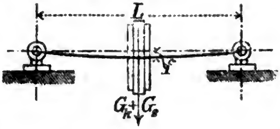
L_0 die Länge der Stange vom Kolben bis zum Kreuzkopf $\sim 1{,}3$ Kolbenhub. (Tafel für $\frac{1}{64}\pi d^4$ s. S. 325.)

Für **stehende Maschinen** setze man den Sicherheitsgrad:

$\mathfrak{S} = 8$ bis 10, wenn die Belastung zwischen P und 0 schwankt,
$\mathfrak{S} = 15$ bis 20, „ „ „ „ $+P$ „ $-P$ „ .
(Vergl. auch die Berechnung der Schubstangen.)

Für **liegende Maschinen** tritt eine Biegungsbeanspruchung durch das Eigengewicht hinzu. Für kleine und mittlere Maschinen mit leichten Kolben ist durch $\mathfrak{S} = 10$ bezw. 20 dieser Einflufs genügend berücksichtigt.

Abbild. 362.



Bei grofsen Maschinen und solchen mit schweren Kolben mufs die beiderseits durchgehende Kolbenstange (Abbild. 362) als Träger auf **Biegung** berechnet und hierbei verlangt werden, dafs die **Durchbiegung** die noch für zulässig erachtete Gröfse 1 bis 1,5 mm nicht überschreite. Der zulässigen Durchbiegung entsprechend ist die Stärke der Kolbenstange zu bestimmen.

Bezeichnet:

L die Länge der Stange zwischen den Kreuzköpfen, in cm,
G_k das in der Mitte der Stange wirkende Kolbengewicht, in kg,
G_s das Stangengewicht in kg,
f die Durchbiegung in der Mitte der Stange, in cm,
J das äquatoriale Trägheitsmoment der Stange in $\text{cm}^4 = \frac{\pi d^4}{64} \sim \frac{d^4}{20}$

(Tafel s. S. 325),

so ist die **Durchbiegung:**

$$f = \frac{L^3}{48} \frac{G_k + \frac{5}{8} G_s}{EJ}.$$

Dieser Wert wird durch den Einflufs des Knickdruckes P u. U. nicht unerheblich vergröfsert (vergl. S. 359).

Soll die **Durchbiegung verhindert** werden, so mufs bei entsprechender Cylinderschmierung das Eigengewicht durch die Führung im Cylinder aufgenommen werden, entweder durch genau in den Cylinder passenden Kolbenkörper oder dadurch, dafs der Kolben sich unten auf die Liderungsringe stützt.

$$\text{Auflagerdruck} = \frac{G_k + \frac{5}{8} G_s}{\text{Tragfläche im Cylinder}} < 3 \text{ kg f. d. qcm.}$$

C. Stopfbüchsen.

Stopfbüchsen-Reibung s. S. 202 sowie 492 u. 493.

Unzweckmäfsige Verpackungsweise, hartgewordene Verpackung oder unnötig fest angezogene Stopfbüchse bei noch elastischer Packung verursachen eine Reibung, welcher in obiger Formel ein Druck p_0 Atm. entsprechen möge. Alsdann wird für

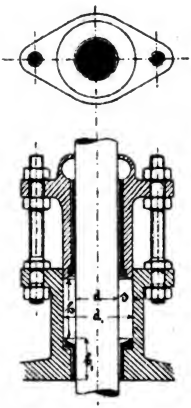
alle Pressungen $p < p_0$ (also auch beim Leergange) die Reibung konstant $= \mu p_0 D \pi$: für $p > p_0$ dagegen gilt die Gleichung $W = \mu p D \pi$ mit angegebenem μ unverändert. Vorübergehend ungünstigen Verhältnissen wird genügend Rechnung getragen, wenn p_0 gleich dem gröfsten Betriebsdrucke p gesetzt wird.

Vorzugsweise finden Hanf, aufserdem Baumwollenschnur in Talg getränkt oder mit Talk, ferner Asbest, Holz als Packungsmaterial Verwendung. Unter Bezugnahme auf Abbild. 363, wenn alle Abmessungen in **cm**, kann gewählt werden:

$$s = 0{,}79\sqrt{d}: \qquad d_1 = d + 2s; \qquad h \sim d_1.$$

Gegenüber Wasser darf h etwas kleiner, gegenüber Luft etwas gröfser gewählt werden. Je höher die Packung, um so dauerhafter im Betrieb und um so geringer die Reibungsarbeit; die Packung dichtet nur gut, solange sie noch elastisch ist.

Abbild. 363.



Bezeichnet:

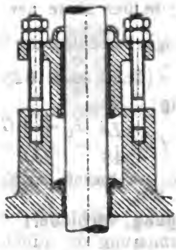
z die Anzahl der Stopfbüchsenschrauben,
δ deren Durchmesser in cm,
p den Flüssigkeits(über-)druck in kg f. d. qcm,

so folgt die **Anzahl der Schrauben** aus:

$$\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d^2) \cdot 3p = 120\,\delta^2 z.$$

(Vergl. S. 378.)

Abbild. 364.



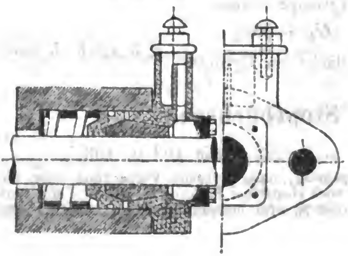
Hierin ist p mindestens $= 3$ zu setzen; indes ist nur in besonderen Fällen $\delta < 1{,}30$ cm ($\frac{1}{2}$ Zoll engl.)

Grundring-Länge:

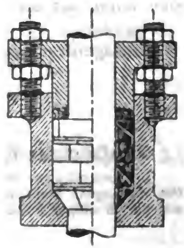
$h_1 = d$ bei liegenden,
$h_1 = 0{,}5\,d$ bei stehenden Maschinen.

Neuerdings verwendet man vielfach **Metallstopfbüchsen.**

Abbild. 365.



Abbild. 366.



Stopfbüchsen mit Metallliderung s. Abbild. 365 und 366, bedingen ununterbrochene, sorgfältige Schmierung. Erstere für die Lokomotiven der preufs. Staatsbahnen vielfach angewandt; Dichtungskegel aus Weifsmetall mit 15% Antimon, 20% Zinn, 65% Blei. Howaldtsche Stopfbüchse, Abbild. 366, häufig für Schiffsmaschinen.

VII. KURBELTRIEB.*)

A. Bewegungsverhältnisse.

Es bezeichne:

r den Kurbelhalbmesser,

l die Schubstangenlänge $\left(\lambda = \frac{r}{l}, \text{ meist } \frac{1}{5}\text{**)}\right)$,

x den Kolbenweg von der Totlage aus,

α die zugehörige Kurbeldrehung von der Totlage aus,

β den zugehörigen Ausschlag der Schubstange,

v die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens,

c die augenblickliche Kolben- (Kreuzkopf-) Geschwindigkeit,

n die Anzahl der Kurbeldrehungen i. d. Min.,

P die Kolbenkraft, T den Tangential-Kurbeldruck.

a. Kolbenweg x.

In den folgenden Formeln gilt + für den Vorwärtsgang, — für den Rückwärtsgang des Kolbens.

Für eine beliebige Kurbeldrehung α wird:

$$x = r(1 - \cos\alpha) \pm l(1 - \cos\beta)$$

$$= r(1 - \cos\alpha) \pm l\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\sin\alpha\right)^2}\right].$$

Angenähert ist: $x = r(1 - \cos\alpha) \pm \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}\sin^2\alpha$

$$= r\left(1 - \cos\alpha \pm \frac{1}{2}\lambda\sin^2\alpha\right).$$

Die Strecke aa_1 (Abbild. 367), das Fehlerglied, ergiebt sich demnach angenähert $= \frac{1}{2}\frac{(r\sin\alpha)^2}{l} = \frac{aK^2}{2l}$. Verwendung dieses Ausdruckes s: Fränzel, Neuere Schiffsmaschinensteuerungen, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1889, S. 985.

---

*) Nach Bach und Riedler.

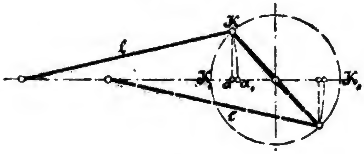
**) Bei Lokomotiven ist λ meist geringer; für die preufs. Normal-Personenzug-Lokomotive ist $\lambda = \frac{1}{6{,}5}$, für die Normal-Güterzug-Lokomotive $\lambda = \frac{1}{6{,}2}$.

Für $\alpha = 90^0$ (halbe Kurbeldrehung): $x = r \pm \frac{1}{2}\frac{r^2}{l}$.

Für $\alpha = 180^0$ (ganze Kurbeldrehung): $x = 2\,r$.

Für $l = \infty$ ($\lambda = 0$) wird $x = r\,(1 - \cos\alpha)$; Sinusversus-Bewegung (Kurbelschleife; s. S. 504).

Abbild. 367.



Zeichnerische Bestimmung des Kolbenweges (Abbild. 367):

wenn $l = \infty$: durch senkrechte Projektion Ka, $x = K_0 a$;

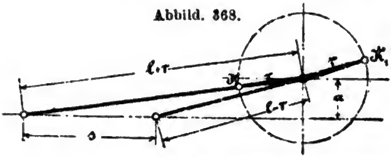
wenn $l = l$: durch Bogenprojektion Ka_1 mit dem Halbmesser l, $x = K_0 a_1$.

Geschränkte Schubkurbel: Kurbelmittelpunkt liegt nicht in der Achse der Kolbenstange, sondern um a entfernt (Abbild. 368). Dann sind:

- die Totlagen unsymmetrisch in den Strecklagen K, K_1 der Schubstange mit der Kurbel,
- der Hub $s > 2\,r$, und zwar:

$$s = \sqrt{(l + r)^2 - a^2} - \sqrt{(l - r)^2 - a^2};$$

Abbild. 368.



z. B.:

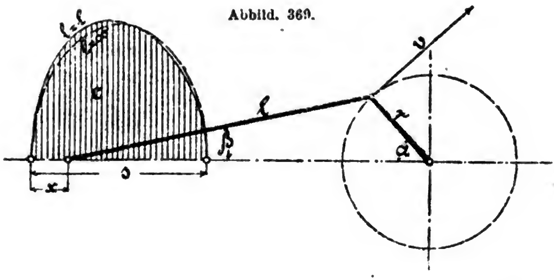
$a = 0{,}5\,r$, $\lambda = \frac{1}{5}$, $s = 2{,}01\,r$.

$a = r$, $\lambda = \frac{1}{5}$, $s = 2{,}04\,r$.

b. Kolbengeschwindigkeit c.

$$c = v\,\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\beta} = v\,\frac{CD}{r} = v\,\frac{\xi}{r} \text{ (Abbild. 369 bezw. 370).}$$

Abbild. 369.



Angenähert ist: $c = v \sin\alpha\,(1 \pm \lambda \cos\alpha)$.

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^0$ wird $\beta = 0$, $c = 0$.

Für $\alpha + \beta = 90^0$ wird $c_{max} = \frac{v}{\cos\beta}$.

Für $\alpha = 90^0$ wird $c = v$.

Für $l = \infty$ wird $c = v \sin\alpha$, $c_{max} = v$ für $\alpha = 90^0$.

Mittlere Kolbengeschwindigkeit $c_m = \frac{2\,s\,n}{60} = \frac{2\,r\,n}{30}$,

Kurbelzapfengeschwindigkeit $v = \frac{2\,\pi\,r\,n}{60} = \frac{\pi\,r\,n}{30}$, daher:

$$v = \frac{\pi}{2}\,c_m = 1{,}571\,c_m; \qquad c_m = \frac{2}{\pi}\,v = 0{,}636\,v.$$

c. Kolbenbeschleunigung p.

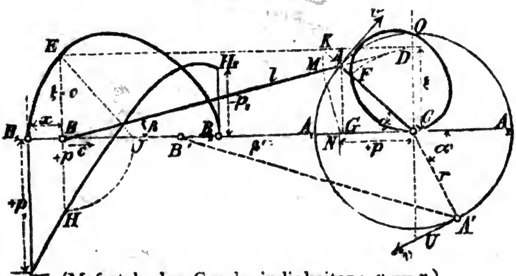
Für $p = \frac{dc}{dt}$ gilt angenähert nach **Radinger:**

$$p = \frac{v^2}{r}\,(\cos\alpha \pm \lambda \cos 2\,\alpha).$$

Genau: p = Subnormale $BJ = BH$ der Geschwindigkeitskurve B_1EB_2 (**Pröll***), oder die Konstruktion von **Mohr****) (Abbild. 370): Verlängere BA über A hinaus bis zum Schnitt D mit $CD \perp BC$, ziehe $DK \parallel CB$ bis zum Schnitt K mit der verlängerten CA, ziehe $KM \parallel DC$ und $MN \perp BA$, so ist $CN = BH = p$. Die positiven p liegen links, die negativen p (Verzögerungen) rechts von C.

H_1HH_2 = Beschleunigungs-Diagramm für den Maſsstab $\frac{v^2}{r} = r$.

Abbild. 370.



H_1 (Maſsstab der Geschwindigkeiten: $v = r$.)

*) Vergl. Pröll, Graphische Dynamik.

**) Vergl. Civil-Ingenieur 1879, S. 612. Die dort gegebene Konstruktion gilt allgemein für die geschränkte Schubkurbel (s. S. 498). — Eine andere Konstruktion hat Rittershaus, ebendas., S. 461 gegeben. Vergl. ferner Zeitschr. d. V. d. Ing. 1883, S. 283.

Kolben-Beschleunigung in den **Totlagen** B_1 und B_2 der Kurbel:

$$p_1 = (1 + \lambda)\frac{v^2}{r} \text{ und } p_2 = (1 - \lambda)\frac{v^2}{r}.$$

Für $l = \infty$ $(\lambda = 0)$ wird $H_1 H H_2$ zur geraden Linie, $p_1 = p_2 = \frac{v^2}{r} =$ gröfste Beschleunigung bezw. Verzögerung.

d. Beschleunigungsdruck *b*.

Der Beschleunigungsdruck b, der bei positivem p vom Dampfüberdruck abzuziehen, bei negativem p dazu zu zählen ist, ergiebt sich aus:

$$b = \frac{q}{g}p,$$

wobei q das auf den Kolbenhub $2r$ und auf 1 qcm der Kolbenfläche reduzierte Gewicht der hin- und hergehenden Maschinenteile bezeichnet und g die Beschleunigung durch die Schwere $= 9{,}81$ m ist.

Nach Radinger ist für liegende Dampfmaschinen
ohne Kondensation: $q = 0{,}28$ kg f. d. qcm,
mit " $q = 0{,}33$ kg f. d. qcm.

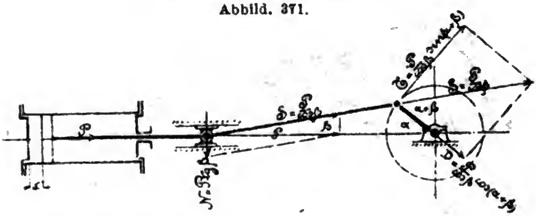
b wird durch dasselbe Diagramm (Abbild. 370) wie p dargestellt, wenn man den Mafsstab so wählt, dafs:

$$\frac{q}{g}\frac{v^2}{r}(\text{kg}) = r\,(\text{m}).$$

B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse.

a. Kraftverhältnisse.

Abbild. 371.



Normaldruck auf die Gleitbahn: $N = P \operatorname{tg}\beta = S \sin\beta$;

für $\alpha + \beta = 90^0$: . . . . . . $N = P\frac{r}{l}$;

für $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$:

$$N_{max} = P \operatorname{tg}\beta_{max} \sim P \sin\beta_{max} \sim P\frac{r}{l}.$$

Schubstangenkraft: . . . . . . $S = \frac{P}{\cos\beta}$;

für $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$: . . . $S_{max} = \frac{P}{\sqrt{1-\lambda^2}}$;

für $l = \infty$: . . . . $S = P$.

Tangentialkurbeldruck: . . . . $T = P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$;

für $\alpha = 0$, $\alpha = 180^0$: . . . . $T_0 = 0$;
für $\alpha = 90^0$ $(\beta = \beta_{max})$: . . . $T = P$;

für $\alpha + \beta = 90^0$: . . . . . . $T_{max} = S = P\sqrt{1+\lambda^2}$;
für $l = \infty$: . . . . $T = P\sin\alpha$.

(Diagramm vergl. Schwungradberechnung S. 515 u. f.)

b. Arbeitsverhältnisse.

Arbeit des Kolbendruckes: $Pcdt = Pv\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}dt$;

Arbeit des Tangentialdruckes: $Tvdt = P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}vdt$,
theoretisch beide Arbeiten gleich grofs.

Ist P_m der mittlere Kolbendruck, T_m der mittlere Tangentialdruck, so folgt aus:

$$P_m 2r = T_m r\pi,$$

$$P_m = \frac{\pi}{2}T_m, \qquad T_m = \frac{2}{\pi}P_m \text{ oder } P_m c_m = T_m v_m.$$

c. Reibungsverhältnisse.

Angenommen P konstant ($= P_m$ bezogen auf einen Kolbenhub).

Es sei:
d der Kurbelzapfendurchmesser,
d_1 der Kreuzkopfzapfendurchmesser,
D der Wellenzapfendurchmesser,
μ der Reibungskoefficient, angenommen $= 0{,}06$,
$\lambda = r : l$, angenommen $= 1 : 5$.

Gesamtarbeit während einer halben Umdrehung $A = P2r$.

	Reibungsarbeit (annähernd).	Verhältnis der Reibungsarbeit zur Gesamtarbeit.	Verhältnis der Reibungsarbeit zur Gesamtarbeit	unter Annahme von:
Gleitbahn.	$A_1 = \mu P\frac{r^2}{l}\frac{\pi}{2}$	$\frac{A_1}{A} = \frac{\pi}{4}\mu\frac{r}{l}$	$\frac{A_1}{A} = 0{,}009$	
Kreuzkopfzapfen.	$A_2 = \mu P d_1 \beta_{max}$	$\frac{A_2}{A} = \frac{\mu\beta_{max}}{2}\frac{d_1}{r}$	$\frac{A_2}{A} = 0{,}001$	$\frac{d_1}{r} = 0{,}20$
Kurbelzapfen.	$A_3 = \mu P\frac{\pi d}{2}$	$\frac{A_3}{A} = \frac{\mu\pi}{4}\frac{d}{r}$	$\frac{A_3}{A} = 0{,}012$	$\frac{d}{r} = 0{,}25$
Wellenzapfen.	$A_4 = \mu P\frac{\pi D}{2}$	$\frac{A_4}{A} = \frac{\mu\pi}{4}\frac{D}{r}$	$\frac{A_4}{A} = 0{,}021$	$\frac{D}{r} = 0{,}45$.

Bei den oben angenommenen Werten wird:

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{A} = 0{,}043,$$

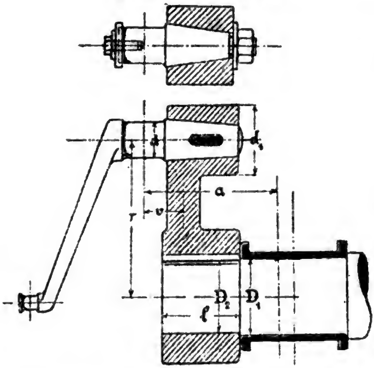
mithin 4 bis 5 % Arbeitsverlust im normalen Kurbeltrieb unter der Voraussetzung, dafs die Kraft P während des ganzen Hubes konstant wirkt.

C. Kurbeln und Excenter.

Berechnung des Kurbelzapfens vergl. unter Zapfen, S. 418 u. 419.

a. Kurbel. (Abbild. 372 und 373.)

Abbild. 372 und 373.



$d_1 = 2\,d$ (für geschmiedete Kurbeln),

D_2 einige mm $< D_1$,

l je nach Genauigkeit der Ausführung:

$$l \leq D_2,$$

wenn warm oder mittelst Presse genau aufgezogen, sonst gröfser.

(Hebelarm a von Kurbelzapfenmitte bis annähernd Lagermitte möglichst gering!)

Wandstärke der Nabe:

$= 0{,}4\,D_2 + 1$ cm.

Kurbelarm:

Für den im Abstande z von der Kurbelzapfenachse gelegenen Armquerschnitt bh, wobei b die achsiale, h die tangentiale Abmessung des Armes bedeutet, rufen folgende Kräfte Beanspruchungen hervor (vergl. Abbild. 373 und 374):

von der Normalkraft D stammend:

die Normalkraft D und das biegende Moment $M_2 = Dr$;

von der Schubkraft T herrührend:

die Schubkraft T, das biegende Moment $M_1 = Tz$ und das drehende Moment $M_d = Tv$.

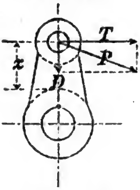
Die Normalkraft D und die Schubkraft T können vernachlässigt werden. Die Momente M_1, M_2 und M_d sind nach Mafsgabe der Formeln unter 3. a. S. 361 zusammenzusetzen und es sind die gröfsten Beanspruchungen des Querschnittes bh in der dort angegebenen Weise zu ermitteln. (Die Bemerkung auf S. 306 [unten] kann hier gleichfalls benutzt werden.)

Die Berechnung des **Wellenzapfens** mit dem Durchmesser D_1 erfolgt für das durch den gröfsten Kolbendruck P hervorgerufene Biegungsmoment $M_b = Pa$ und das durch den gröfsten Tangentialdruck T erzeugte Drehmoment $M_d = Tr$ nach der Formel **1.** a. S. 361.

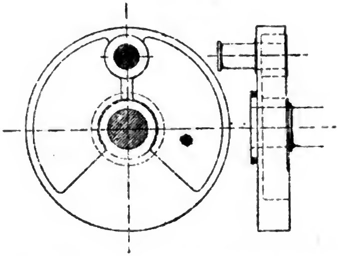
Für Ueberschlagsrechnungen kann hierbei das Drehmoment M_d ganz vernachlässigt werden, wenn in dem Biegungsmoment M_b für den Hebelarm statt a die Diagonal-Entfernung zwischen Mitte Kurbelzapfen und Mitte Wellenzapfen gesetzt wird.

Beispiele von Kurbeln: Abbild. 374 geschmiedete Stirnkurbel,

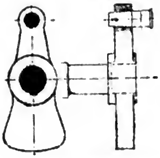
Abbild. 374.



Abbild. 376.



Abbild. 375.



Abbild. 375 geschmiedete Stirnkurbel mit Gegengewicht,

Abbild. 376 Gufskurbelscheibe mi Gegengewicht.

b. Kurbelkröpfung. (Abbild. 378 a. f. S.)*)

Der **Kurbelzapfen** d ist durch das Biegungsmoment $P_1 a_1 = P_2 a_2$ beansprucht. Dabei gilt:

$$P_1 = P \frac{a_2}{a_1 + a_2}; \quad P_2 = P \frac{a_1}{a_1 + a_2}; \text{ für } a_1 = a_2: \quad P_1 = P_2 = \frac{P}{2};$$

Zapfen d folgt aus dem Biegungsmoment:

$$P_1 a_1 = P_2 a_2 = k_b \frac{\pi}{32} d^3 \sim 0,1\, k_b\, d^3 \; (k_b \text{ s. S. } 418)$$

und dem (gröfsten) Auflagerdrucke:

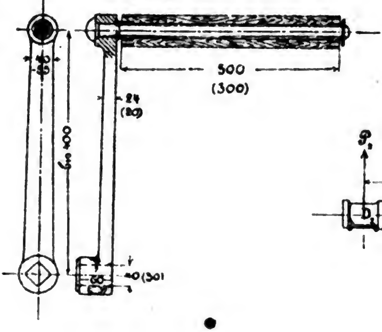
$$k \leqq 60 \text{ kg f. d. qcm.}$$

Für jeden der **Wellenzapfen** ist der Durchmesser D_1 bezw. D_2 auf Festigkeit zu berechnen für den hindurchzuleitenden Teil des

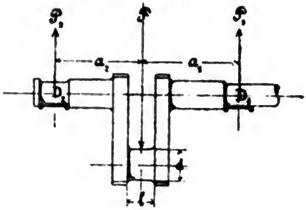
*) Zeichnerische Ermittlung der Beanspruchungen der Kurbelkröpfung für verwickeltere Fälle vergl. Reuleaux, Der Konstrukteur, 4. Aufl. S. 423 u. f.

eingeleiteten Drehmomentes und das sich für die Lagermitte ergebende Biegungsmoment. Ferner sind die Zapfen-Abmessungen zu berechnen für den Auflagerdruck $k < 20$ (am besten 12 bis 15) kg f. d. qcm, je nach der Geschwindigkeit. Der gröfsere Wert des Durchmessers wird für **beide** Wellenzapfen ausgeführt.

Abbild. 377.



Abbild. 378.



c. Handkurbel.

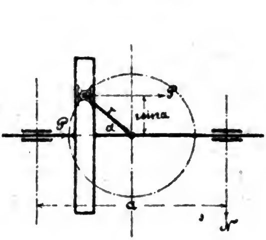
Kurbelhalbmesser = 35 bis 40 cm. Kurbelwelle über dem Stande des Arbeiters $\sim$ 1 m. Die gröfseren Zahlen (Abbild. 377) gelten für zweimännische, die kleineren (eingeklammerten) für einmännische Kurbeln. Kurbeldruck eines Arbeiters im Mittel 10 bis 15 kg, vorübergehend bis 20 kg. Umfangsgeschwindigkeit 0,5 bis 1 m i. d. Sek.

d. Kurbelschleife. (Abbild. 379.)

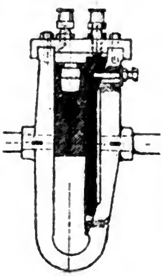
Kolbenweg: $x = r(1 - \cos\alpha)$,

Führungsdruck: $N = \dfrac{Pr \sin\alpha}{a}$ (sehr grofs),

Abbild. 379.



Abbild. 380.



Arbeitsverlust bei einer Umdrehung:

$$A_r = 2 P\mu \frac{r^2}{a} \pi + 4 P\mu r,$$

Verhältnis $\frac{\text{Arbeitsverlust}}{\text{Gesamtarbeit}} : \frac{A_r}{A}$ bis 0,2 und 0,3 (sehr grofs).

Ausführung bei kleinen Maschinen wegen geringer Baulänge. Kurbelschleife mit Stellvorrichtung s. Abbild. 380.

e. Excenter.

Die Breite b (in cm) mufs der Beziehung

$$b \geqq \frac{Pn}{10\,000}$$

genügen, wenn darin bedeutet:

P den Excenterdruck in kg,
n die Umdrehungszahl des Excenters i. d. Min. Ist weiter:
d der Durchmesser des Excenters in cm,
ϱ die Excentricität in cm, so gilt:

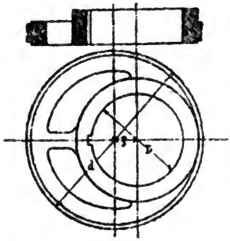
Arbeit des Excenterdruckes P (in cmkg) für 1 Umdrehung: $A = P\,4\,\varrho$,
Arbeitsverlust durch Excenterreibung „ „ $A_1 = P\mu_1 \pi d$,
„ „ Wellenreibung „ „ $A_2 = P\mu'_1 \pi D$,

Wirkungsgrad $\eta = \frac{A}{A + A_1 + A_2} = \frac{1}{1 + \mu_1 \frac{\pi}{4} \frac{d}{\varrho} + \mu'_1 \frac{\pi}{4} \frac{D}{\varrho}}$;

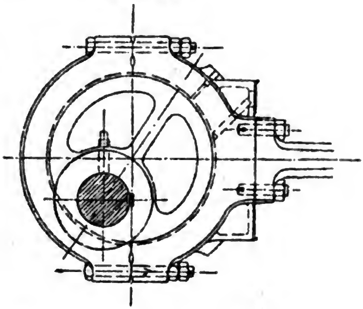
z. B. $\varrho = 60$ mm, $D = 200$ mm, $d = 400$ mm, $\mu'_1 = \mu_1 = 0{,}06$ ergiebt $\eta = 0{,}68$.

Beispiele von Excentern Abbild. 381 und 382. Excenterscheiben auf Kurbelwellen (bei Zweicylindermaschinen oder wenn die Welle an der Stelle, wo das Excenter sitzt, schwächer ist) zweiteilig, um vorheriges Aufpressen der Kurbeln zu ermöglichen.

Abbild. 381.



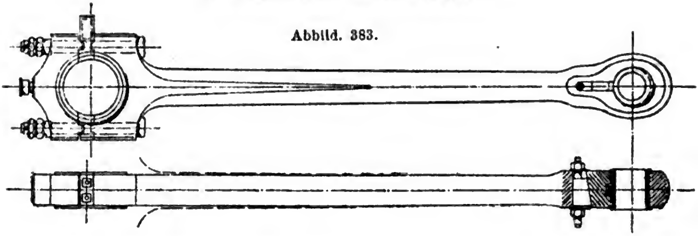
Abbild. 382.



D. Schubstangen.

a. Schaft der Schubstangen.

Abbild. 383.



Es bezeichnet in folgendem:

P den gröfsten Wert der Stangenkraft in kg,
L die Länge der Stange in cm,
J das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment des Stangenquerschnitts in der Mitte, in cm^4,
E den Elasticitätsmodul des Stangenmaterials in kg f. d. qcm,
$\mathfrak{S}$ den Sicherheitskoefficienten,
r den Kurbelhalbmesser in cm,
n die Umdrehungszahl i. d. Min.

1. Stangen für geringe und mittlere Geschwindigkeiten.

α. **Stange mit Kreisquerschnitt** (vom Durchmesser d_m in der Mitte).

$$P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}} E \frac{J}{L^2} \backsim 40\,000 \frac{d_m{}^4}{L^2},$$

wenn $\mathfrak{S} = 25$, $E = 2\,000\,000$ kg f. d. qcm gesetzt wird.

Nach dem Kurbelzapfen hin verjüngt sich die Stange im Verhältnis von 1 : 0,8, nach dem Kreuzkopfzapfen hin im Verhältnis 1 : 0,7.

β. **Stange mit rechteckigem Querschnitt** (von der Breite b cm und der Höhe $h = 1{,}75\,b$ bis $2\,b$ cm in der Mitte).

$$P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}} E \frac{1}{12} \frac{b^3 h}{L^2},$$

woraus mit

$$\mathfrak{S} = 15, \quad h = 1{,}8\,b, \quad E = 2\,000\,000 \text{ kg f. d. qcm:}$$

$$P = 200\,000 \frac{b^4}{L^2} \text{ für } \textbf{Schweifseisen,}$$

und mit $\mathfrak{S} = 15$, $h = 1{,}5\,b$, $E = 100\,000$ kg f. d. qcm:

$$P = \frac{25\,000}{3}\,\frac{b^4}{L^2} \text{ für **Holz.**}$$

2. Stangen für gröfsere Geschwindigkeiten.

Als Beispiele solcher Stangen sind die Lokomotivschubstangen anzusehen. Unter Voraussetzung rechteckigen Querschnitts von der Breite b und der Höhe h cm ergiebt sich bei

$$\mathfrak{S} = \frac{20}{3} \text{ bis } \frac{10}{3}, \quad h = 2\,b, \quad E = 2\,000\,000 \text{ kg f. d. qcm:}$$

$$P = 500\,000\,\frac{b^4}{L^2} \text{ bis } 1\,000\,000\,\frac{b^4}{L^2}.$$

Zur Erzielung geringen Gewichtes erhalten die Stangen auch I-förmigen Querschnitt.

Bei den **Kuppelstangen** der Lokomotiven ist die Annahme gleicher Verteilung der Triebstangenkraft auf die gekuppelten drei Achsen zu machen; in dem Werte von $\mathfrak{S}$ liegt genügende Sicherheit gegen die Gefahr des Gleitens eines der gekuppelten Räder.

Festzuhalten ist für sämtliche Stangen, dafs:

für **Schweifseisen:** $$\frac{P}{b\,h} + \frac{1}{30}\left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{L^2 r}{h} \leqq 400,$$

für **Flufsstahl:** $$\frac{P}{b\,h} + \frac{1}{30}\left(\frac{n}{1000}\right)^2 \frac{L^2 r}{h} \leqq 500.$$

b. Köpfe der Schubstangen.

Offenen Kopf mit Bügelverschlufs zeigt Abbild. 384, offenen Lagerkopf Abbild. 383 (a. S. 506), geschlossene Köpfe Abbild. 383, 385 bis 390, Gabelkopf Abbild. 384 und Gabelköpfe für Excenterstangen Abbild. 391.

Beispiel der Berechnung einer Schubstange Abbild. 384.

$P = 7800$ kg; $n = 40$; $L = 2500$ mm.

Kurbelzapfen (Flufsstahl): nach S. 418 und 419;
mit $k_b = 500$, $k = 60$ wird: $d = 100$ mm, $l = 130$ mm (danach $b = 116$ mm).

Kreuzkopfzapfen (Flufsstahl): für [illegible] $= 80$, $l_1 = 1{,}5\,d_1$ wird:

$d_1 \sim 80$ mm; $l_1 = 120$ mm.

Keilstärke: $s_3 = \frac{b}{4} = 30$ mm.

Aus $s_3 s_4 k = 0{,}5\,P$ folgt für $k = 450$ kg f. d. qcm Auflagerdruck zwischen Keil und Bügel: $s_4 = 30$ mm.

Bügelstärke s_5 (Schweifseisen) läfst sich für Biegung ermitteln aus

$$\frac{P}{2}\,x = k_b\,\frac{b\,s_5^2}{6}$$

mit $k_b = 600$ kg f. d. qcm und $x = 44$ mm:

$$s_5 = 38 \text{ mm.}$$

Mittlere Keilhöhe s_3 (für alle drei Keile gleich) folgt aus:

$$\frac{1}{3}\,\frac{P}{2}\,x = k_b\,\frac{s_2\,s^2_3}{6},$$

mit $k_b = 1000$ (Flufsstahl): $s_3 = 34$ mm.

Die Tangente des halben Winkels an der Spitze des Keils wird bei Sicherung durch eine Schraube zu 1 : 20 gewählt, so dafs die Nachstellbarkeit von 8 mm eine Verschiebung des Keils um 80 mm fordert.

Der **linke Kopf** wird, nachdem die Schaftstärke d_m aus

$$P = 40\,000\,\frac{d_m{}^4}{L^2} \text{ zu } d_m = 10{,}5 \text{ cm}$$

ermittelt worden ist, entworfen, also Breiten und Stärken angenommen und alsdann auf die Zulässigkeit der angenommenen Abmessungen geprüft,

z. B. $a_1 = 40$, $a = 46$, $a_2 = 100$ gewählt, $a_3 = 26{,}7$ mm ermittelt.

Die Beanspruchung im Querschnitte AB erfolgt durch die abwechselnd als Zug und als Druck auftretende K r a f t $\frac{P}{2}$ und durch das B i e g u n g s m o m e n t $\frac{P}{2}\left(\frac{a}{2} - z\right)$, worin z den Schwerpunktsabstand des Querschnitts bedeutet.

Z. B. für die mittlere Höhe des Querschnitts = 33 mm und

$$\frac{a}{2} - z = \frac{4{,}6}{2} - \frac{3{,}3}{2} = 0{,}65,$$

ergiebt die erstere Beanspruchung die Normalspannung:

$$\sigma_1 = \frac{3900}{10\,.\,3{,}3} = 118 \text{ kg f. d. qcm},$$

die letztere die Biegungsspannung:

$$\sigma_2 = \frac{3900\,.\,0{,}65}{\frac{1}{6}\,.\,10\,.\,3{,}3^2} = 140 \text{ kg f. d. qcm}.$$

Gesamtspannung 118 + 140 = 258 kg f. d. qcm, während für Schweifseisen 300 kg f. d. qcm (Belastungsweise c, Tafel S. 309) noch zugelassen werden kann.

Wählt man deshalb: $a_1 = 36$, $a = 42$, $a_2 = 100$ mm, so erhält man:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 135 + 180 = 315 \text{ kg f. d. qcm},$$

was noch zulässig ist.

Der Querschnitt CD ist beansprucht durch die zu vernachlässigende Schubkraft P_s, die Normalkraft P_n und das biegende Moment $\frac{P}{2}\,y$.

Für vorliegenden Fall ist:

$$P_n = 2250 \text{ kg}, \qquad y = 3{,}6 \text{ cm}$$

und demnach

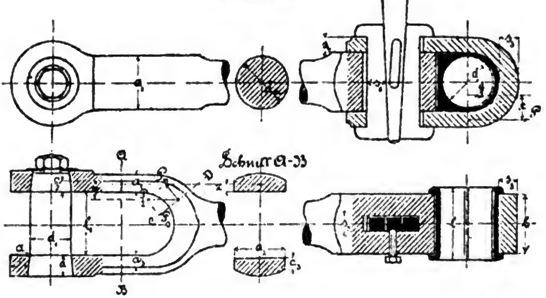
$$\sigma_1 + \sigma_2 = 331 \text{ kg f. d. qcm},$$

was statthaft ist.

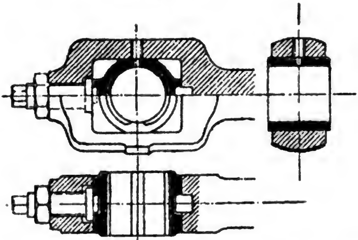
a_4 folgt aus: $$\frac{P}{2}\,\frac{d_1 + a_4}{8} = k_b\,\frac{a\,a^2_4}{6};$$

für $k_b = 600$ kg f. d. qcm: $a_4 = 3{,}7$ cm.

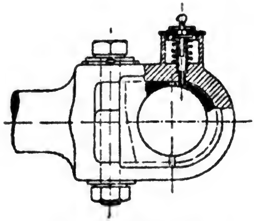
Abbild. 384.



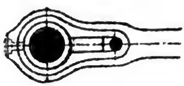
Abbild. 385.



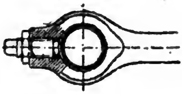
Abbild. 386.



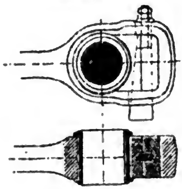
Abbild. 387.



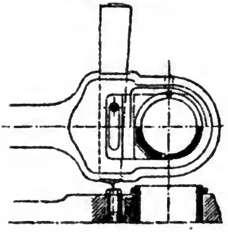
Abbild. 388.



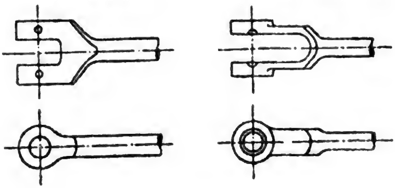
Abbild. 389.



Abbild. 390.



Abbild. 391.

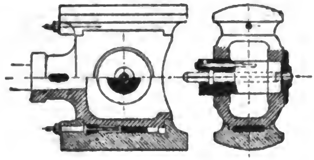


E. Kreuzköpfe.

Die Pressung in den Gleitflächen feststehender Maschinen soll selbst bei mittleren Geschwindigkeiten 2 bis 3 kg f. d. qcm nicht überschreiten. Die Gleitbahn ist so stark auszuführen und so zu unterstützen, dafs schädliche Durchbiegungen nicht eintreten können. (Konstruktion der Gleitbahn s. Siebenter Abschnitt, Kraftmaschinen; III. Dampfmaschinen.)

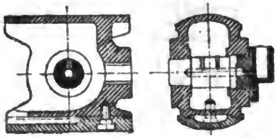
Abbild. 392 zeigt einen Kreuzkopf mit Nachstellvorrichtung durch Längskeil.

Abbild. 392.

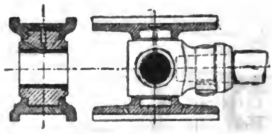


Abbild. 393 und 394 stellen Kreuzköpfe **ohne** Nachstellvorrichtung für die Gleitflächen dar.

Abbild. 393.



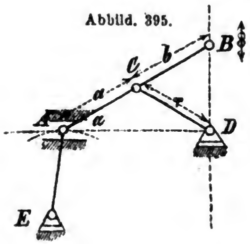
Abbild. 394.



F. Gelenkgeradführungen.*)

a. Ellipsenlenker.

Abbild. 395.



Hierbei bezeichne (Abbild. 395 bis 399):

AB den Hauptlenker,
α dessen halben Ausschlagwinkel,
CD den Gegenlenker,
C dessen Angriffs- und
D dessen Festpunkt,
B den gerade zu führenden Punkt.

1. Der Evanssche Lenker.

(Abbild. 395.) Winkel $ADB = 90^0$, $a = b = r$. Wird nun *A* auf *AD* ge-

*) Ausführlicheres s. Kinematisches Skizzenbuch. Nach Vorträgen v. Reuleaux bearbeitet, herausgegeben vom Verein „Hütte". 1. Hälfte. Berlin 1880. — Vergl. ferner Rittershaus, Gelenkgeradführungen; Zeitschr. d. V. d. Ing. 1877, S. 217 (fünfpunktige Geradführungen).

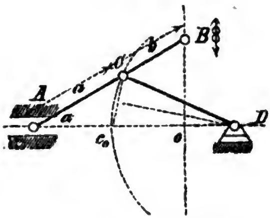
führt, so erhält man den genauen Ellipsenlenker; führt man aber A auf einem Kreise, dessen Halbmesser EA ist, so hat man den angenäherten Evansschen Lenker. Je gröfser man EA und je kleiner man den Winkel α wählt, desto genauer wird der Lenker. Es sei:

$$\alpha < 20^0;$$
$$EA \gtreqless BD.$$

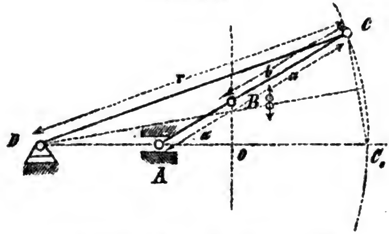
2. Der angenäherte Ellipsenlenker.

Nach der Lage von C in bezug auf A und B unterscheidet man drei Arten:

Abbild. 396.



Abbild. 397.



Erste Art: Der Punkt C liegt zwischen A und B (Abbild. 396).
Zweite Art: Der Punkt C liegt über B hinaus (Abbild. 397).
Dritte Art: Der Punkt C liegt über A hinaus (Abbild. 398).

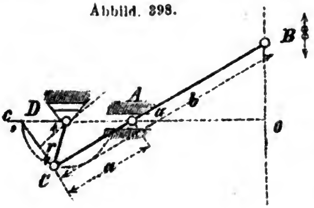
Bei allen drei Lenkern kann die gerade Bahn des Punktes A durch eine kreisförmige ersetzt werden.

Die Lenker der dritten Art geben die gröfste Abweichung des Punktes B von der geradlinigen Bahn.

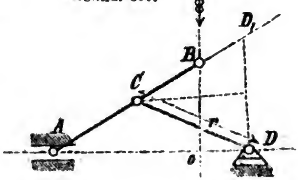
Ermittlung des Gegenlenkers.

1. **Es sei C gegeben und D werde gesucht** (Abbild. 396 bis 398). Zeichne den Hauptlenker in seiner äufsersten Lage, mache $OC_0 = BC = b$, ziehe C_0C und errichte in der Mitte dieser Linie eine Senkrechte. Diese schneidet die Wagerechte durch A in D.

Abbild. 398.



Abbild. 399.

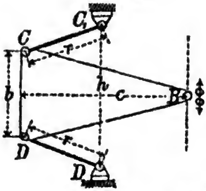


Wählt man α sehr klein, so wird annähernd:

$$r : a = a : b.$$

2. **Es sei D gegeben und C werde gesucht** (Abbild. 399). Verlängere in der äufsersten Stellung des Hauptlenkers die Linie AB um $BD_1 = OD$, ziehe $D_1 D$. Die Senkrechte in der Mitte dieser Linie giebt auf dem Hauptlenker den Punkt C. Bei der zweiten und dritten Lenkerart (Abbild. 397 und 398) trage man $BD_1 = OD$ über A hinaus von B ab.

Abbild. 400.



b. Robertscher Dreiecklenker.

Man nehme (Abbild. 400):

$$CC_1 = DD_1 = r; \quad \frac{r}{h} = 0{,}584;$$

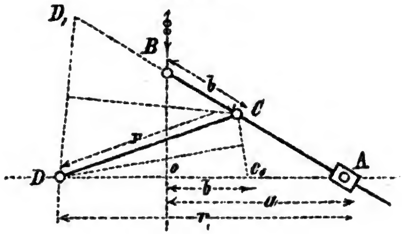
$$\frac{b}{h} = 0{,}593; \quad \frac{c}{h} = 1{,}112.$$

c. Konchoidenlenker.

Konchoide s. S. 114 und 115.

Es sei (Abbild. 401): AB der Hauptlenker, CD der Gegenlenker, C dessen Angriffspunkt und D dessen Festpunkt.

Abbild. 401.



Je nachdem der Punkt C zwischen A und B, über B hinaus oder über A hinaus liegt, hat man den Konchoidenlenker erster, zweiter oder dritter Art. (Wie unter **a. 2.**)

Die **Ermittlung des Gegenlenkers** erfolgt wie bei dem angenäherten Ellipsenlenker (vergl. S. 511).

Der Lenker zweiter Art liefert, wenn man $r = r_1$ macht, eine zwar kurze, aber sehr gute Geradführung.

d. Lemniskoidenlenker.

In folgendem (Abbild. 402 und 403) bezeichnen:

a und a_1 die Längen der Gegenlenker,

d und d_1 die entsprechenden Abschnitte der Koppel,

φ und φ_1 die halben Schwingungswinkel der Gegenlenker,

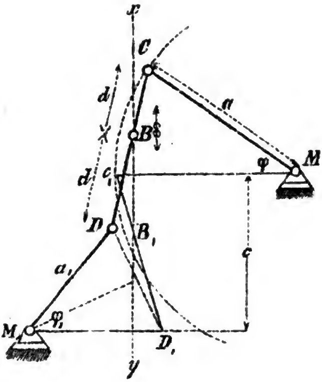
s die Hubhöhe $= 2\,a \sin\varphi = 2\,a_1 \sin\varphi_1$,

c die Projektion der Verbindungslinie der Festpunkte MM_1 der Lenker auf die Hubrichtung xy,

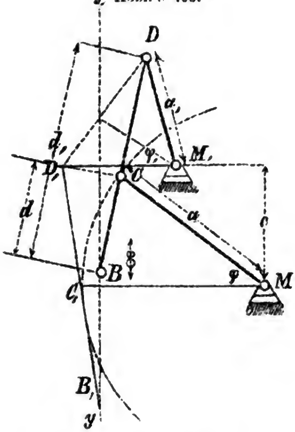
e und e_1 die Pfeilhöhen der von den Endpunkten der Gegenlenker beschriebenen Bögen $= a\,(1 - \cos\varphi)$ bezw. $a_1\,(1 - \cos\varphi_1)$.

1. Gegeben der Lenker a, sein Festpunkt M, die Koppelabschnitte d und d_1 und der gerade zu führende Punkt B; es soll die Länge a_1 des Gegenlenkers und dessen Festpunkt M_1 gesucht werden. Man zeichne den Lenker a in seiner äufsersten Stellung MC und in dieser Stellung die Koppel so, dafs der Punkt B auf xy, der Halbierungslinie der Pfeilhöhe des von C beschriebenen Bogens, zu liegen kommt, und stelle den Endpunkt der Koppel D fest; suche dann die Lage D_1 (den Endpunkt der Koppel bei der mittleren Lage des Lenkers a_1), und verbinde D mit D_1. Die Senkrechte in der Mitte dieser Linie giebt auf einer durch D_1 mit C_1M gezogenen Parallelen den gewünschten Festpunkt M_1 und somit auch die Länge a_1 des gefundenen Lenkers M_1D an.

Abbild. 402.



Abbild. 403.



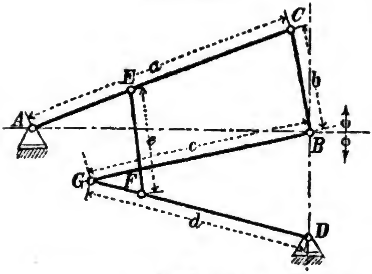
2. Gegeben die beiden Lenker a und a_1, deren Abstand c in paralleler Lage und die Hubhöhe; gesucht die Lage des gerade zu führenden Punktes B und die Festpunkte M und M_1. Lege a und a_1 normal zur Hubrichtung xy so, dafs e und e_1 halbiert werden; dann sind M und M_1 die Festpunkte. In der äufsersten Lage schneidet CD die Hubrichtung xy in B; dieser Punkt ist der gerade geführte.

Eine gute Führung erhält man immer, wenn man bei dem Lenker Abbild. 402 macht:

$$a = a_1 \geqq \frac{3}{2} s; \quad \varphi \lesseqgtr 20^0; \quad d = d_1 \gtreqless \frac{2}{7} s. \text{*)}$$

e. Tschebyscheffscher Lenker.

Abbild. 404.



Die gerade Bahn soll den Bogen, den Punkt C beschreibt, berühren.

Es sei (Abbild. 404):

$b = e =$ dem halben Hube von B,

$CE = DF = 0{,}618\,a$,

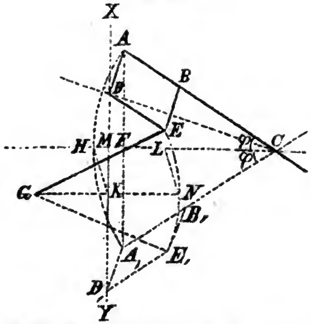
$d = c = 0{,}809\,a$.

Punkt D soll in die gerade Bahn fallen.

f. Wattsches Parallelogramm.

Konstruktion: Es ist (Abbild. 405) ACA_1 Schwingungswinkel 2φ; AA_1 dessen Sehne, gleich dem gegebenen Hube s; $HM = MF$; $XY \| AA_1$ durch M; $AD = HK = A_1D_1 =$ der beliebig anzunehmenden Länge der Hängeschiene und $AB = HL = A_1B_1 =$ der gegebenen Seite des Parallelogramms. Man vervollständige nun die Parallelogramme

Abbild. 405.



$$ABED,\ HLNK \text{ und } A_1B_1E_1D_1,$$

dann ist der Mittelpunkt G des durch E, N und E_1 gehenden Kreises der Drehpunkt des zweiten Gegenlenkers, $GE = GN = GE_1$ dessen Länge, und jeder Punkt in DC ein gerade geführter.

Macht man, wie gewöhnlich geschieht, $AB = CB$, so ergiebt sich K als Drehpunkt des zweiten Gegenlenkers, dessen Länge dann $KE = AB = CB$ ist.

---

*) Ueber die gröfste Abweichung des geführten Punktes B von der Geraden xy vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing., Bd. 4, S. 83 u. 142.

VIII. REGELNDE MASCHINENTEILE.

A. Schwungräder.

a. Bestimmung des Arbeitsüberschusses.*)

1. Bei der Ermittlung des bei jeder halben Kurbelumdrehung vom Schwungrade aufzunehmenden **Arbeitsüberschusses** (unter Annahme unendlich langer Schubstange) sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Der Widerstand wirkt tangential an der Kurbelwelle.

Beispiel: Abnahme der Kraft durch Riemen, Seil oder Zahnrad (Tangentialwiderstand konstant). Das Dampfdiagramm wird als **Ueberdruckdiagramm** verzeichnet (Unterschiede der beiderseits auf den Kolben wirkenden Kräfte als Ordinaten P von der Geraden mm aus, Abbild. 406 a).

Abbild. 406.



Für $l = \infty$ sind die **Tangentialkurbeldrücke** (s. S. 501)

$$T = P \sin \alpha.$$

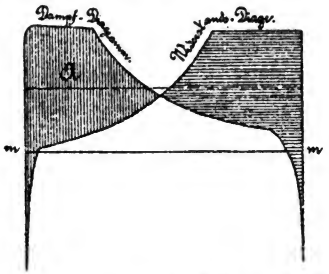
Als Hülfsverfahren (bei zeichnerischer Ermittlung) werden die P in Polar-Koordinaten aufgetragen (Abbild. 406 b) und nach Ausstreckung des Halbkreises rst mit seiner Teilung durch Projizieren die T (in Abbild. 406c) ermittelt.

*) Vergl. u. a. Karl Mayer, Zeichnerische Ermittlung d. Schwungräder d. Dampfmaschinen, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1889, S. 113.

Auf derselben Grundlinie wie das Tangentialdruck-Diagramm der Kraft ist das Diagramm des **Tangentialwiderstandes** zu verzeichnen (Abbild. 406 c). Dieses ist für obige Beispiele ein Rechteck, dessen Höhe am einfachsten aus der Flächengleichheit beider Diagramme bestimmt wird. Die lotrecht gestrichelte Fläche (gleich grofs mit der Summe der wagerecht gestrichelten Flächen) giebt den Arbeitsüberschufs A. Der Arbeitsmafsstab ergiebt sich aus dem Längenmafsstab (Länge des Dampfdiagramms = Kolbenhub) und dem Kräftemafsstab (Ordinaten des Dampfdiagramms = Kolbenkräfte). — Für vorläufige Rechnungen kann bei kleinen Dampffüllungen die Bestimmung von A unmittelbar im Kolben- statt im Tangentialdruckdiagramm ausgeführt werden, indem hier als Widerstandsdiagramm ein Rechteck angenommen wird.

2. Der Widerstand wirkt an der Kolbenstange.

Abbild. 407.



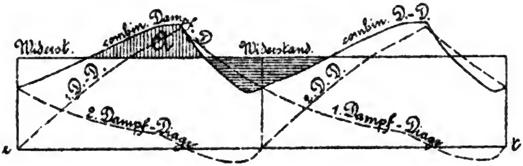
Beispiel: Gebläse- und Pumpmaschinen mit unmittelbarem Antrieb. Im Gebläse- bezw. Pumpen-Ueberdruck-Diagramm sind die Ordinaten durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Kolbenflächen auf den Dampfcylinder zurückzuführen; dann ist durch Vergröfserung der Ordinaten im Verhältnis $N_i : N_e$ Flächengleichheit mit dem Dampfdiagramm zu erzielen. Dampf- und Widerstandsdiagramm sind hierauf über derselben Grundlinie mm zu verzeichnen. Die überschiefsende Fläche ergiebt die Gröfse A. Beispiel für Gebläsemaschine s. Abbild. 407 (für eine Pumpe würde die punktierte Linie gelten).

3. In anderen Fällen (z. B. Pumpe von einer Kurbel aus angetrieben) ist nach dem Verfahren unter 1. das Dampfdiagramm und das (mit den oben erwähnten Gröfsen multiplizierte) Widerstandsdiagramm in das entsprechende Tangentialdruckdiagramm zu verwandeln und die bei diesen überschiefsende Fläche = A zu setzen.

2. Bei **Mehrcylindermaschinen** sind die Tangentialdruckdiagramme (oder auch die Kolbendruckdiagramme, wenn der Widerstand an der Kolbenstange wirkt und die Kurbeln 0 oder 180° einschliefsen) für die verschiedenen Cylinder unter Berücksichtigung des zwischen den Kurbeln liegenden Winkels gegen einander versetzt zu vereinigen, indem die zu gleicher Zeit wirkenden Kräfte bezw. Widerstände addiert werden. Das sich hieraus ergebende Diagramm der Kräfte und dasjenige der Widerstände werden auf derselben Grundlinie

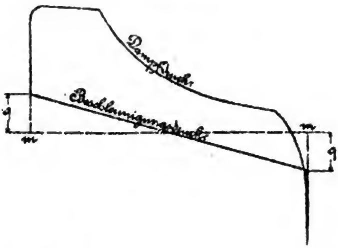
verzeichnet. Die gröfste überschiefsende Fläche A ist der weiteren Rechnung zu grunde zu legen. Beispiel für eine Zwillings-Transmissionsmaschine mit unter 90° versetzten Kurbeln s. Abbild. 408. Bei verschiedener Gröfse der Dampfcylinder ist vorher eine Zurückführung der Diagramme auf einen und denselben Cylinder vorzunehmen.

Abbild. 408.



8. In den Dampfdiagrammen für **rasch laufende Maschinen** oder solche **mit grofsen Massen** mufs noch, bei Ermittlung der thatsächlichen Kurbelzapfendrücke, eine Berücksichtigung des von der Kolbenkraft abzuziehenden bezw. zu dieser hinzuzufügenden **Beschleunigungs- und Verzögerungsdruckes** vorgenommen werden. Dies kann in der Weise geschehen, dafs die untere Begrenzung statt durch die wagerechte Gerade durch die in Abbild. 409 angegebene schräge Gerade gebildet wird (Voraussetzung: unendlich lange Schubstange). Die Anzahl q der abzutragenden Atmosphären wird hierbei erhalten, indem man die Beschleunigungs- bezw. Verzögerungskraft

Abbild. 409.



$$D = \frac{m v^2}{r}$$

(vergl. S. 500) durch die Kolbenfläche in qcm dividiert (m Masse der hin- und hergehenden Teile, v Kurbelgeschwindigkeit in m i. d. Sek., r Kurbelhalbmesser in m).

Bedingungen des ruhigen Ganges einer Maschine: Druckwechsel im Triebwerk kurz vor dem Hubwechsel; der Kompressions-Enddruck mufs den Verzögerungs-Enddruck der Triebwerksmassen überwiegen; die Rückwirkung der Triebwerksmassen auf den Maschinenrahmen ist durch Gegengewicht möglichst aufzuheben. Theoretische Gröfse der Ausgleichsmassen an der Kurbel so grofs, dafs deren

Centrifugalkraft gleich dem gröfsten Beschleunigungsdruck der Triebwerksmassen. Ausgeführte Gegengewichte in der Regel kleiner als theoretisch erforderlich wegen deren schwieriger Unterbringung, oder bei stehenden Maschinen wegen der störenden Massenwirkung in wagerechtem Sinne. — Beste Massenausgleichung im Triebwerk selbst ist zu erreichen bei liegenden und stehenden Zweicylindermaschinen durch Anordnung der Kurbeln unter 180° und möglichste Annäherung der Cylindermitten zur Verminderung des Drehmomentes der Massenkräfte.

b. Abmessungen des Schwungrades.

1. Aus A (s. S. 516) ergiebt sich die **Masse des Schwungringes** folgendermafsen. Die an Stelle der Ringmasse im Kurbelkreis vereinigt zu denkende Masse M wird aus der Formel berechnet:

$$A = M v^2 \delta_s$$

(δ_s = Ungleichförmigkeitsgrad, d. h. das Verhältnis des Unterschiedes der gröfsten und kleinsten zur mittleren Umfangsgeschwindigkeit v während einer Umdrehung) und durch Multiplikation mit $r^2 : R^2$ auf den Halbmesser R zurückgeführt, wenn R den Schwerpunktsabstand des Ringquerschnittes von der Drehachse (Annäherung für dessen Trägheitshalbmesser) bedeutet. Von dieser Masse braucht jedoch wegen Vermehrung des Trägheitsmomentes des Schwungrades durch dessen Arme nur etwa 0,9 verwirklicht zu werden, so dafs sich als auszuführendes Gewicht des Schwungringes ergiebt:

$$G = 0{,}9\, M g \frac{r^2}{R^2} = 8{,}8\, M \frac{r^2}{R^2}.$$

Aus G (in kg) folgt der Querschnitt F (in qcm) des Schwungringes, wenn R in m gemessen wird:

$$F = 0{,}22 \frac{G}{R}.$$

(Für die Berechnung des Gesamtgewichtes ist dasjenige der Arme etwa gleich einem Drittel des Ringgewichtes zu setzen.)

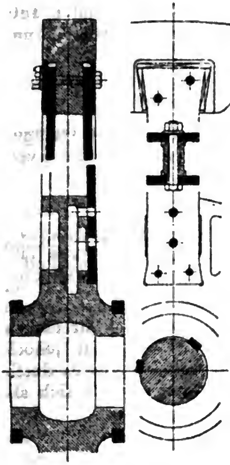
2. **Werte des Ungleichförmigkeitsgrades δ_s**

		im Mittel etwa:
Antrieb von	Pumpen und Schneidewerken	$\delta_s = 1:20$ bis $1:30$
„ „	Werkstätten-Triebwerken	$\delta_s = 1:35$
„ „	Webstühlen und Papiermaschinen	$\delta_s = 1:40$
„ „	Mahlmühlen	$\delta_s = 1:50$
„ „	Spinnmaschinen f. niedrig. Garn-Nrn.	$\delta_s = 1:50$ bis $1:60$
„ „	„ für hohe „	$\delta_s = 1:100$
„ „	Dynamomaschinen	$\delta_s = 1:150$.

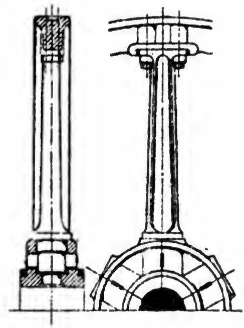
3. Die durch die Centrifugalkraft hervorgerufene **Beanspruchung** in dem (nicht durch die Arme festgehaltenen) **Schwungringe** ist in kg f. d. qcm:

$$k_z = \frac{\gamma V^2}{g},$$

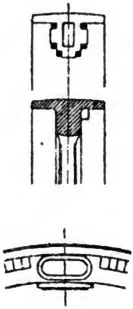
Abbild. 410.



Abbild. 411.



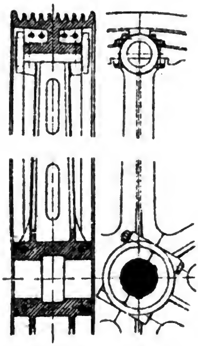
Abbild. 412.



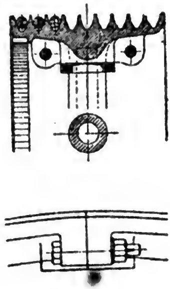
Abbild. 413.



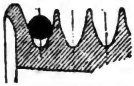
Abbild. 414.



Abbild. 416.



Abbild. 415.



wenn V die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes,
γ das Gewicht der Raumeinheit,
g die Beschleunigung durch die Schwere, alles bezogen auf **cm**, bedeutet,

oder:

$$k_z = 0{,}076\ V^2,$$

wenn V in m i. d. Sek. gemessen wird. Die Beanspruchung hängt also nur von V ab, beträgt z. B. für $V = 30$ m i. d. Sek., $k_z =$ 68 kg f. d. qcm. Jedoch kommen durch die festhaltenden Arme Biegungsspannungen hinzu; hierdurch steigt die Beanspruchung auf

$$k_z = 0{,}109\ V^2,$$

was z. B. für $V = 30$ m i. d. Sek., $k_z = 98$ kg f. d. qcm ergiebt. Ferner wird k_z durch Stöfse und durch Gufsspannungen häufig sehr bedeutend vermehrt.

4. Die **Berechnung der Arme** ist auf Abreifsen durch die Centrifugalkraft des Ringes und auf Abbrechen durch das gröfste auf das Schwungrad zu übertragende Moment vorzunehmen, wobei für Gufseisen $k_b = 100$, für Schweifseisen $k_b = 400$ kg f. d. qcm zuzulassen ist. Anzahl der Arme gewöhnlich 6 oder 8.

5. Der **Schwungradhalbmesser** ist im Mittel etwa $= 5\,r$, stets aber (bei Gufseisen, vergl. oben) derart zu wählen, dafs $V < 30$ m i. d. Sek. wird (nur bei Walzenzugmaschinen geht man auf etwas höhere Werte). — In der Verteilung der Massen sind zu starke Materialanhäufungen zu umgehen (profilierter Ringquerschnitt). Zur Vermeidung von Gufsspannungen wird vielfach eine Teilung vorgenommen, bei kleineren Schwungrädern in zwei Teile (Sprengung), bei gröfseren in der Art, dafs Arme, Nabe und die einzelnen Ringstücke getrennt hergestellt werden. Bei grofsen Maschinen Verschalung der Schwungräder mit Holzbrettern zur Verminderung des Luftwiderstandes zu empfehlen.

Beispiele für gewöhnliche Schwungräder s. Abbild. 410 bis 413 (in Abbild. 410 Arme aus Schweifseisen), für Seilscheiben Abbild. 414 bis 416.

B. Centrifugalpendel-Regulatoren.

a. Allgemeines.

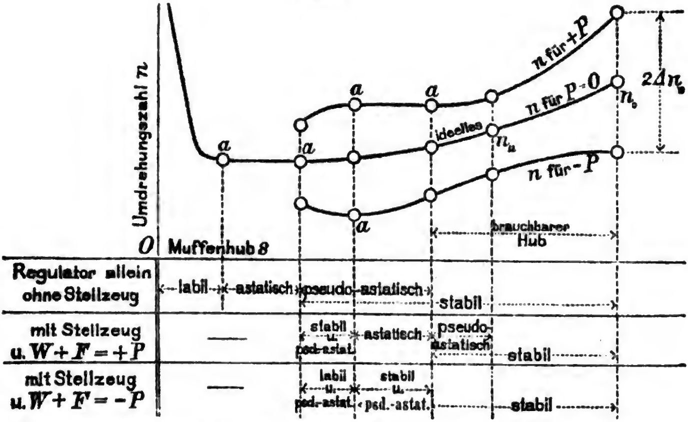
1. Erklärungen.

(Vergl. Abbild. 417 a. f. S.)

Jeder brauchbare Regulator mufs auf allen Teilen seines Hubes **stabil** sein, d. h. fortschreitender Entfernung der Schwungmassen von der Achse mufs ständiges Wachsen der Umdrehungszahl entsprechen. Der umgekehrte Fall (**labil**) oder der indifferente Zustand (**astatisch**) kann durch den Regulator allein oder durch die Anordnung der vom Regulator beeinflufsten Teile bedingt sein.

Statisch sind Regulatoren, wenn jeder Muffenstellung eine andere minutliche Umdrehungszahl entspricht. (Vergl. Abbild. 417.) Dabei sind labile Gleichgewichtslagen nicht ausgeschlossen.

Abbild. 417.



Astatisch sind Regulatoren, bei welchen zu allen Muffenstellungen dieselbe Umdrehungszahl gehört, die also nur bei einer einzigen Umdrehungsgeschwindigkeit eine Muffenbewegung zeigen. Bei allen übrigen Geschwindigkeiten verharren diese Regulatoren an einer der beiden Hubbegrenzungen der Muffe.

Pseudoastatisch sind solche Regulatoren, die sich dem astatischen Zustande stark nähern. Die Bedingung der Pseudoastasie (einen sogen. astatischen Punkt) findet man aus der Gleichgewichtsbedingung des Regulatorsystems, indem man den Differentialquotienten der Umdrehungszahl n i. d. Min. nach dem Ausschlagwinkel gleich Null setzt. Diese Gleichung liefert denjenigen Ausschlagwinkel, welcher einem astatischen Punkte (a, Abbild. 417) entspricht.

Die gebräuchlichsten Systeme benutzen Pendellagen in der Nähe astatischer Stellungen, jenseits deren labiles Gleichgewicht herrscht; man darf daher den Hub s eines in theoretischer Beziehung nicht genau bekannten Regulators nach keiner Richtung hin willkürlich erweitern (der Bufs-Regulator benutzt z. B. den Hub zwischen zwei astatischen Lagen).

Ungleichförmigkeitsgrad δ *) heifst das Verhältnis des Unterschiedes der gröfsten und kleinsten zu der mittleren Umdrehungszahl,

*) In den bisherigen Auflagen dieses Buches war der Ungleichförmigkeitsgrad mit $\frac{1}{\delta}$ $\left(\text{bezw. mit } \frac{1}{i}\right)$, der Unempfindlichkeitsgrad (s. f. S.) mit $\frac{1}{\varepsilon}$ bezeichnet.

wobei der Regulator **frei vom Stellzeuge** schwingend gedacht wird. Man verlangt, dafs $\delta \gtrless 0{,}04$; ist $\delta < 0{,}02$, so liegt die Gefahr nahe, nach Einschaltung des Stellzeuges für einen Teil des Hubes eine labile Gesamtanordnung zu erhalten, weshalb man selbst bei denjenigen Regulatoren, für welche $\delta = 0$ gemacht werden **könnte**, dennoch etwa den Wert 0,02 beibehält.

Unbeweglichkeits- oder Unempfindlichkeitsgrad ε.*) Der Widerstand P, den jeder mit Reguliervorrichtung verbundene Regulator zu überwinden die Aufgabe hat, gemessen an der Muffe im Sinne der Verschiebung dieser, setzt sich zusammen aus dem nützlichen Teile W, der durch das Stellzeug auf die Muffe übertragen wird, und dem von der Eigenreibung des Regulators herrührenden Teile F. P wirkt also ähnlich der Reibung in einem Mechanismus stets dem Antrieb zur Bewegung entgegengerichtet. Für jede Stellung des durch die Kraft P belasteten Regulators tritt erst dann ein Heben bezw. Sinken der Muffe ein, wenn die Umdrehungszahl (n) eine bestimmte Aenderung in positivem bezw. negativem Sinne ($+ \Delta n$ bezw. $- \Delta n$) erfahren hat. Die Muffe bleibt also bei einer Aenderung der Umdrehungszahl zwischen $n - \Delta n$ bis $n + \Delta n$ unbeweglich oder unempfindlich; man bezeichnet das Verhältnis

$$\frac{(n + \Delta n) - (n - \Delta n)}{n} = \frac{2 \Delta n}{n} = \varepsilon$$

als den **Unbeweglichkeits- oder Unempfindlichkeitsgrad.**

Weil Δn im allgemeinen gegen n sehr klein ist, so setzt man zugleich

$$\varepsilon = \frac{(n + \Delta n)^2}{n^2} - 1.$$

Energie. Unter vorstehender Voraussetzung gilt die Beziehung

$$\frac{P}{\varepsilon} = S = \frac{W + F}{\varepsilon},$$

wenn S den Widerstand bezeichnet, den der **ruhend** und vom Stellzeuge **nicht belastet gedachte** Regulator einer Verschiebung seiner Muffe entgegensetzt. Die Gröfse S ist als die **Energie** des Regulators zu betrachten und für jede Regulator-Anordnung ein bestimmter, von der Anordnung abhängiger Wert.

Die Gröfse P ändert sich mit dem Reibungskoefficienten der bewegten Teile, der Stopfbüchspackungen u. s. w. Dem jeweiligen P entsprechend stellt sich gemäfs der Beziehung $P : \varepsilon = S$ je ein anderer Unempfindlichkeitsgrad ein.

Gesamter Ungleichförmigkeitsgrad i.*) Der gesamte und thatsächliche Ungleichförmigkeitsgrad, welchen der Regulator für die Maschine zuläfst, beträgt angenähert

$$i = \delta + \varepsilon$$

und entspricht dem **mit dem Stellzeuge** verkuppelten Regulator.

---

*) Vergl. die Fufsnote auf S. 521.

Die Unempfindlichkeit ε eines Regulators sollte bei Maschinen mit hin- und hergehender Bewegung nie geringer sein, als der Ungleichförmigkeitsgrad δ_s des zugehörigen Schwungrades (vergl. S. 518), um ein unnötiges Zucken des Regulators innerhalb eines jeden Maschinenhubes zu vermeiden.

Grenz-Werte von i: Bei guten Regulatoren ist δ nur innerhalb der Werte 0,02 bis 0,03 veränderlich und bei nur wenigen ausnahmsweise bis auf 0,01 herabzuziehen. Ferner schwankt der dem F entsprechende Anteil von ε (d. i. $\varepsilon_f = F:S$) zwischen 0,005 und 0,02; nimmt man endlich bei Verwendung der schwersten käuflichen Regulatoren ($S = 200$ kg) den nützlichen Widerstand W nur zu 1 kg an, so ist $\varepsilon = 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01$ bezw. $0{,}02 + 0{,}005 = 0{,}025$. Bereits ein sehr kleiner, nur ausnahmsweise mit den käuflichen Regulatoren zu erreichender Wert von i wäre hiernach etwa:

$$i = 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}02 \text{ bezw. } 0{,}01 + 0{,}025 = 0{,}035.$$

Dagegen beträgt gewöhnlich, und selbst bei empfindlichen Betrieben i etwa 0,05 bis 0,10.

Arbeitsvermögen des Regulators nennt man das Produkt aus mittlerer Energie und Hub s, also

$$\frac{Ps}{\varepsilon} = Ss.$$

Wirkungsgrad ist bei gleich gedachtem Ungleichförmigkeitsgrade das Verhältnis des Arbeitsvermögens zu den aufgewandten Gewichten, insbesondere für den Vergleich käuflicher Regulatoren das für die Preiseinheit erzielte Arbeitsvermögen.

Bei demselben Regulatorsystem wächst der Wirkungsgrad mit zunehmendem $Ps:\varepsilon$; bei den käuflichen Regulatoren beträgt er bei der schwersten Nummer etwa das achtfache der leichtesten, so dafs man nicht zu ängstlich das kleinste nötige $Ps:\varepsilon$ dem Kauf des Regulators zu grunde legen sollte.

Für den Vergleich verschiedener Systeme ist neben dem Wirkungsgrad noch zu berücksichtigen der Raumbedarf bei gleichem Arbeitsvermögen, der Reibungsverlust, welcher sich mit der Zusammendrängung der Anordnung steigert, die Uebersichtlichkeit und leichte Zugänglichkeit der Zapfen zu deren leichter Kontrole und Schmierung; für besondere Fälle ist noch die Möglichkeit leichter Abänderung der Umdrehungszahl und Energie von Wichtigkeit.

Unmittelbar wirkende Regulatoren sind beständig mit dem Regulierwerke verbunden und verstellen dieses mit der Kraft W, entsprechend der Beziehung $W + F = S\varepsilon$.

Bei käuflichen, unmittelbar wirkenden Regulatoren ist meist die obere Grenze des Arbeitsvermögens $\sim$ 10 bis 13 mkg; die Lauchhammerhütte liefert zwar noch drei Nummern 4-kugeliger Regulatoren von 21, 42 und 84 mkg, jedoch sind diese teuerer, als mittelbar wirkende Regulatoren, welche den ersteren durchaus nicht nachstehen und dabei fast unabhängig von $Ps:\varepsilon$ arbeiten. (Vergl. S. 532.)

Mittelbar wirkende Regulatoren kuppeln nur an den Hubgrenzen mittelst der Kraft W eine Hülfskraft mit der Reguliervorrichtung; sie gestatten die Verwendung kleinsten Muffenhubes, welcher einen geringen Ungleichförmigkeitsgrad δ zur Folge hat; da auch W sehr klein gehalten werden kann, so ist es möglich, trotz grofsen Kraftbedarfes für Wasserschützen, Rider- und Meyer-Steuerung u. s. w. noch mit dem üblichen Aufwande von Regulatormassen den gesamten Ungleichförmigkeitsgrad i in niedrigen Grenzen zu halten.

Der Preis mittelbar wirkender Regulatoren beträgt mindestens 450 *M.* und ihre Beschaffung lohnt sich erst bei einem Bedarf von

$$\frac{Ps}{\varepsilon} > 14 \text{ mkg.}$$

Leistungs-Regulatoren*) erstreben nicht, wie die gewöhnlichen Regulatoren, eine möglichst konstante Umdrehungszahl der Maschine, sondern gestatten bei gleicher Hubarbeit stark wechselnde Maschinen-Geschwindigkeit; δ bis zu 1,5; dem genügen Regulatoren mit besonders stark statischer n-Kurve. Das Gestänge des Stellzeuges dieser Regulatoren mufs leicht Längenänderungen gestatten.

2. Einteilung der Pendel-Regulatoren.

Sämtliche Pendel-Regulatoren zerfallen in zwei Gruppen:

1. Der Pendeldrehpunkt ist **fest** an der Spindel (aufrechte Aufhängung): Systeme Watt, Porter, Kley, Tangye, Bufs, Excenter-Regulator von Pröll.
2. Der Pendeldrehpunkt ist **verschiebbar** auf der Spindel (umgekehrte Aufhängung): Systeme Pröll, Steinle, Cosinus-Regulator, Vierpendel-Regulator von Schäffer & Budenberg.

Innerhalb beider Gruppen unterscheidet man Bewegungsübertragung auf die Muffe

a) mittelst Schubkurbel (Systeme Watt, Porter, Pröll, Kley, Steinle),

b) mittelst Kurbelschleife (Systeme Tangye, Bufs, Cosinus-, Vierpendel-, Excenter-Regulator).

Die Achse der Pendelregulatoren ist lotrecht oder wagerecht; letzterenfalls befindet sich die Pendelebene entweder gleichgerichtet mit der Achse oder senkrecht dazu (Schiffs- bezw. Excenter-Regulatoren).

3. Bezeichnungen.

In folgendem bedeutet:

G das Gewicht der an einem Pendel hängenden Schwungmasse in kg,

Q die Belastung der Muffe in kg, soweit erstere vom Gewicht der Schwungmassen unabhängig ist.

Meist ist Q das Eigengewicht der Muffe nebst einem Gewichtsteil der Arme, bisweilen die Belastung durch Federn, Dampf u. s. w., z. B. bei dem Tangye-Regulator mit Dampfbelastung eines Ventils neben leichter Federentlastung zum Berichtigen der Umdrehungszahl.

Z die Centrifugalkraft von G, in kg,**)

---

*) Vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891. S. 1063 bis 1088.

**) Die Centrifugalkraft Z greift im Schwerpunkte der Schwungmasse an, wenn diese einen Umdrehungskörper bildet, dessen Achse senkrecht auf der Schwingungsebene steht.

p die Anzahl der um die Spindel eines Regulators gruppierten Pendel,

Q_s die Gesamtbelastung der Kurbelzapfen eines Regulators, parallel zur Muffenbewegung, in kg;
es ist in besonderem:

$Q_s = -(Q + pG)$ für verschiebbaren Pendeldrehpunkt bei lotrechter Spindel,

$Q_s = +Q$ in allen übrigen Fällen;

S den Druck der Muffe in kg bei ruhendem Regulator, also der Kraft zum Abstützen der Muffe nach Gröfse gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt. (Im allgemeinen ändert sich der Wert von S mit der Muffenstellung.) S ist ohne Rücksicht auf die Eigenreibung des Regulators gedacht;

$\pm W$ den nützlichen, an der Muffe angreifenden Reibungs-Widerstand in kg, herrührend von der Bewegung der regelnden Vorrichtung einschl. Stellzeug,

$\pm F$ den der Eigenreibung des belasteten, umlaufenden Regulators entsprechenden Widerstand an der Muffe in kg

$\pm P = \pm(W + F)$ den Gesamt-Reibungswiderstand an der Muffe in kg,

n die (veränderliche) Umdrehungszahl der Spindel i. d. Min. im Zustande $P = 0$, also ohne augenblickliche Wirkung auf das Stellzeug,

n_o und n_u die gröfste bezw. kleinste Umdrehungszahl bei $P = 0$,

$\delta = 2\dfrac{n_o - n_u}{n_o + n_u}$ den Ungleichförmigkeitsgrad,

ε den Unempfindlichkeitsgrad (s. S. 522),

i den Gesamt-Ungleichförmigkeitsgrad (s. S. 522),

l, l_1, l_2 bezw. die Längen des Pendels, des Kurbelarmes und der Schubstange in m (s. Abbild. 419 bis 421),

α, β, γ die Ausschlagwinkel von l, l_1, l_2 gegen die Lotrechte, beginnend in den Quadranten, welche durch die Abbild. 419 bis 421 näher bezeichnet sind,

o und u die Zeiger für α, β, γ und n, entsprechend det obersten bezw. untersten Muffenlage bei dem Zustande $P = 0$; bei wagerechter Spindel dem gröfstmöglichen Pendel-Ausschlag bezw. dem Ausschlage $= 0$ zugehörig,

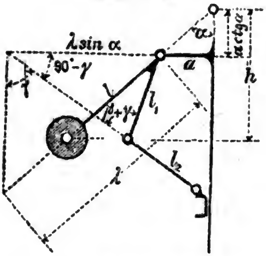
a den Abstand des Pendeldrehpunktes von der Spindelachse, in m,

d den gröfsten Durchmesser der Schwungmassen im Schnitt der Pendelebene, in m,

λ ein von den Winkeln α, β, γ abhängiger Anteil von l_1 (Abbild. 418 und Formel S. 527),

h die sogen. Pendelhöhe in m (Abbild. 418 und Formel S. 527),
s den Muffenhub in m,

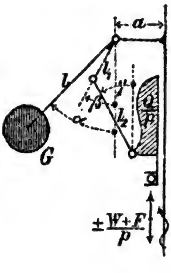
Abbild. 418.



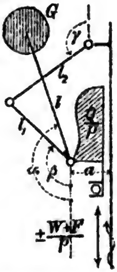
r den Halbmesser der Gelenkbolzen in m (für sämtliche Gelenke der Arme gleich grofs angenommen),
r_2 den Halbmesser der Laufrolle in m (Abbild. 421),
r_3 den Halbmesser des Rollenzapfens in m (Abbild. 421),
μ_1 (= 0,1) den Reibungskoefficienten für die Gelenkbolzen,
R den Zapfendruck eines Pendels am Aufhängepunkte bei belastetem, umlaufendem Regulator in kg,
ω die Winkelgeschwindigkeit des umlaufenden Systems,
g die Beschleunigung durch die Schwere, = 9,81 m.

Anm. In den Formeln ist $\frac{\pi^2}{g} \sim 1$ und damit $\frac{\omega^2}{g} = \left(\frac{n}{30}\right)^2$ gesetzt worden.

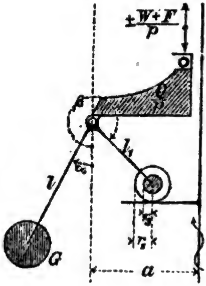
Abbild. 419.



Abbild. 420.



Abbild. 421.



4. Allgemeine Formeln.

Abbild. 419 entspricht der Schubkurbel mit festem Pendeldrehpunkt und mit α, β, γ im ersten Quadranten. Abbild. 420 zeigt beweglichen Pendeldrehpunkt (umgekehrte Aufhängung) mit α, β, γ im zweiten Quadranten; somit ist hierfür in der Formel $Q_s = -(Q + p\,G)$ und vor die Winkelfunktionen das entsprechende Vorzeichen des zweiten Quadranten zu setzen. Abbild. 421 stellt den Fall der Kurbelschleife mit umgekehrter Aufhängung dar, für welchen α im ersten, β im vierten Quadranten liegt und $\gamma = 0$, $l_2 = \infty$ zu setzen ist.

α. Lotrechte Spindel.

Gleichgewichtsbedingung:

$$pZl\cos\alpha - pGl\sin\alpha - Q_s l_1 \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma} = 0$$

oder

$$\frac{\omega^2}{g} = \left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{1 + \dfrac{Q_s}{pG}\dfrac{l_1}{l}\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cos\gamma}}{l\cos\alpha + a\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{S}{(l\cos\alpha + a\operatorname{ctg}\alpha)(S - Q_s)}.$$

$l\cos\alpha + a\operatorname{ctg}\alpha =$ sogen. **Pendelhöhe** h, und

$$l_1\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cos\gamma} = \text{Länge } \lambda.$$

Beide Werte sind leicht zeichnerisch darzustellen (s. Abbild. 418).

Damit wird

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{Q_s}{pG}\frac{\lambda}{l}\right) = \frac{S}{h(S - Q_s)};$$

$$S = pG\frac{l}{\lambda} + Q_s = pG\frac{l}{\lambda} + Q \text{ bei festem Pendeldrehpunkt,}$$

$$S = -pG\frac{l}{\lambda} - Q_s = -pG\frac{l}{\lambda} + Q + pG \left\{ \begin{array}{l}\text{bei beweglichem}\\ \text{Pendeldrehpunkt.}\end{array}\right.$$

Ferner ist:

$$\varepsilon = \frac{P}{S} = \frac{W+F}{pG\dfrac{l}{\lambda} + Q_s};$$

$$\left(\text{auch } \varepsilon = \frac{2\Delta n}{n} = \frac{W}{S} + \frac{F}{S} = \varepsilon_w + \varepsilon_f;\right)$$

$$s = l_1(\cos\beta_u - \cos\beta_o) + l_2(\cos\gamma_u - \cos\gamma_o);$$

$$\delta = 2\frac{n_o - n_u}{n_o + n_u}; \qquad i = \delta + \varepsilon;$$

$$F = \frac{\mu_1}{\sin(\beta+\gamma)}\frac{r}{l_1}\left[pR\cos\gamma + Q_s\left(1 + 2\frac{l_1}{l_2}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\right],$$

$$R = G\sqrt{\left[\frac{Q_s}{S}\operatorname{tg}\alpha - \frac{Q_s}{pG}\operatorname{tg}\gamma\right]^2 + \left[\frac{Q_s}{pG} + 1\right]^2}.$$

Im besonderen gelten:

1) für die Schubkurbel mit rhombischer Aufhängung:
dieselben Gleichungen unter Einführung von $\beta = \gamma$, also

$$\lambda = 2\, l_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha};$$

für die Anordnungen von Watt, Porter, Kley ist noch $\beta = \alpha$ und $Q_s = +Q$, also

$$\lambda = 2\, l_1, \qquad S = G \frac{l}{l_1} + Q, \qquad \left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{1 + \frac{Q}{G}\frac{l_1}{l}}{h};$$

2) für die Kurbelschleife:
die Gleichungen S. 527 unter Einführung von $\gamma = 0$, also

$$\lambda = l_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha};$$

für die Anordnung wie in Abbild. 421 wird ausnahmsweise:

$$F = \frac{\mu_1}{\sin \beta} \frac{r}{l_1} \left[pR + Q_s \frac{r_2}{r_3} l_1 \cos \beta \right].$$

β. Wagerechte Spindel parallel zur Pendelebene (Schiffsregulatoren).

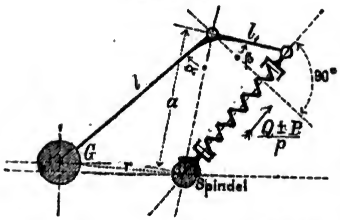
Gleichgewichtsbedingung:

$$p Z l \cos \alpha - Q l_1 \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\cos \gamma} = 0, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{1}{h} \frac{Q}{pG} \frac{\lambda}{l}; \qquad S = Q; \qquad \varepsilon = \frac{P}{Q};$$

h, λ, s, δ, i, F und R wie bei α.

Abbild. 422.



γ. Wagerechte Spindel senkrecht zur Pendelebene (Excenter-Regulator, Abbild. 422).

P sei auf den Hebelarm von Q reduziert gedacht.

Gleichgewichtsbedingung:

$$p Z \frac{a l \sin \alpha}{r} - Q l_1 \cos \beta = 0$$

oder

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{1}{a} \frac{Q}{pG} \frac{l_1}{l} \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{a} \frac{Q \lambda}{pGl}.$$

$$\varepsilon = \frac{P}{Q}; \qquad Q = S; \qquad \lambda = l_1 \frac{\cos \beta}{\sin \alpha};$$

$$s = l_1 (\sin \beta_u - \sin \beta_o); \qquad \delta \text{ und } i \text{ wie unter } \alpha.$$

b. Besondere Anordnungen.

1. Watt-, Porter- und Kley-Regulator.

Gemeinsame Bedingungen:

Fester Pendeldrehpunkt; $\alpha = \beta$; rhombische oder angenähert rhombische Aufhängung, also $l_1 =$ oder $\sim l_2$, $\beta = \gamma$ oder $\beta_u =$ oder $\sim \gamma_u$; λ, ε und $S =$ oder $\sim$ konstant.

Diese Regulatoren stehen den käuflichen nicht wesentlich nach; sie verdienen den Vorzug, wenn auf Uebersichtlichkeit, auf konstantes ε und S und auf erleichterte Anpassung an abzuänderndes n, P und ε Wert gelegt wird. Diese Anpassung wird ohne Beeinflussung der n-Kurve durch Aenderung von G oder Q ermöglicht. (Man setze zu diesem Zweck G aus Scheiben zu einem walzenförmigen Schwungkörper zusammen; Q berichtige man mittelst Bleischrot im Hülsengewicht oder durch Gegengewicht am Muffenhebel).

Für $l_2 > l_1$ nimmt mit wachsendem α die Länge λ zugleich mit h ab und die n-Kurve nähert sich mehr der astatischen Lage, gleichzeitig vermehrt sich der Hub s; für $l_2 < l_1$ tritt der umgekehrte Fall ein.

Unterscheidende Bedingungen:

Watt-Regulator. $Q \cong 0$, $a \cong 0$, α im I. Quadranten,

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 \cong \frac{1}{l \cos \alpha}; \qquad \varepsilon \cong \frac{P l_1}{G l},$$

astatischer Punkt bei $\alpha = 0^\circ$, kein Wendepunkt in der n-Kurve.

Zu empfehlen ist $l_1 \sim 0{,}6\, l$ neben $\alpha_u = 15^\circ$; dann wird

$$n \sim \frac{31}{\sqrt{l}},$$

und $1 : \delta =$	88,	31,	18,	12
für $\alpha_o =$	20°,	25°,	30°,	35°.

Kleine Umdrehungszahl, geringe Eigenreibung F, langgestreckte Form, schwere Schwungmassen; besonders zum Geschwindigkeitsmesser geeignet, wenn G auf l verschiebbar eingerichtet wird.

Porter-Regulator. Q wesentlich gröfser als pG; $a \sim 0{,}1\, l$; α im I. Quadranten; Gleichungen für n, ε und S wie für die rhombische Aufhängung (s. S. 528): häufig $l = l_1$, obgleich $l > l_1$ günstiger ist; im S-förmigen Verlauf der n-Kurve befindet sich, nahezu unabhängig von $a : l$ ein Wendepunkt bei einem Winkel $\alpha = 40^\circ$; ein astatischer Punkt ist nicht vorhanden. Zu empfehlen ist $a = 0{,}1\, l$, $l_1 = 0{,}66\, l$ neben $\alpha_u = 40^\circ$; dann wird

$1 : \delta =$	53,	37,	27,	22,	18,	15
für $\alpha_o =$	42°,	43°,	44°,	45°,	46°,	47°.

Umdrehungszahlen bei gleichem l wesentlich gröfser als beim Watt-Regulator; s bei üblichem δ besonders klein, weil n-Kurve ungünstig; h nimmt rasch ab mit wachsendem α, Verlauf der n-Kurve ungünstiger mit wachsendem a. Günstige Ausnutzung des Grundrisses möglich, weil mehr als zwei Pendel um die Spindel gruppiert werden können; alsdann besonders zur Ueberwindung grofser Widerstände geeignet, — zumal bei zulässigem grofsen δ.

Kley-Regulator. α im IV. Quadranten, gekreuzte Arme l; $a \gtreqless l \sin^3 \alpha_u$, sonst labile Lagen vorhanden. Falls auch die Arme l_2 gekreuzt, liegt Q unterhalb des Armgesperres oder wirkt in besonderer Weise am Stellzeug. Entsprechend $l \sin^3 \alpha_u = a$ befindet sich ein astatischer Punkt bei α_u, welcher zugleich unterer Grenzpunkt des stabilen Teiles der n-Kurve ist. Also ist

$$\frac{a}{l} \gtreqless 0{,}017, \quad 0{,}040, \quad 0{,}075, \quad 0{,}125, \quad 0{,}189, \quad 0{,}265$$

bei $360^0 - \alpha_u =$ 15°, 20°, 25°, 30°, 35° 40°.

Zu empfehlen bei gekreuzten unteren Armen $l_1 = 0{,}66\, l$ neben $360^0 - \alpha_u = 40^0$, also $a = 0{,}26\, l$, wofür

$$1 : \delta = 93 \quad 50 \quad 29 \quad 18 \quad 13$$
$$\text{bei } 360^0 - \alpha_u = 45^0 \quad 47\tfrac{1}{2}^0 \quad 50^0 \quad 52\tfrac{1}{2}^0 \quad 55^0;$$

oder bei nicht gekreuzten unteren Armen $l_1 = 0{,}66\, l$ neben $360^0 - \alpha_u = 26^0$, $a = 0{,}08\, l$, $\gamma_u = 18^0$ und $l_2 = 0{,}8\, l_1$.

Für die übrigen Werte vergl. S. 528.

Umdrehungszahlen beliebig je nach dem Werte $Q : G$; sehr günstige pseudoastatische n-Kurve und grofses Arbeitsvermögen, geringer Einflufs der Armmassen auf die Aenderung der theoretischen Bedingungen. Die Wirkungsweise dieses Regulators wird von den käuflichen Regulatoren im allgemeinen nicht übertroffen.

2. Käufliche Regulatoren ohne Reguliervorrichtung.

Die käuflichen Regulatoren bekannterer Fabriken sind sich in Wirkung und Preis so ähnlich, dafs die Auswahl eines bestimmten Systems mit geringen Ausnahmen gleichgültig erscheint.*) Will man einen dieser Regulatoren nur zur Dampfdrosselung benutzen, so bedient man sich am besten der käuflichen, mit Drosselventil vereinigten Anordnungen, um teilweis labile Lagen oder ein zu stark schwankendes ε mit Sicherheit zu vermeiden. (Vergl. u. **3.**)

Für die Auswahl sind besonders i, W neben s bezw. Ws, der verfügbare Raum und der Preis mafsgebend. (Liegt das Stellzeug bereits fest, so wird meist W oder s für sich allein gegeben sein.) Jeder angelieferte Regulator kann vor seiner Aufstellung mittelst Auswägen des Muffendruckes leicht auf das angeforderte S geprüft werden.

---

*) Der Tangye-Regulator kommt hier nicht in betracht, weil dieser nur in Verbindung mit einem bestimmten Regulierventil geliefert wird; Q wird hier durch Dampfdruck hervorgebracht.

Unterschiede der bekannteren Systeme:

Bei gleichem Arbeitsvermögen besitzt der Cosinus-Regulator den gröfsten, der Bufs-Regulator den kleinsten Hub; die Preise bleiben bis zu $S_s = 8$ mkg für alle Konstruktionen ziemlich dieselben. Die höchste Umdrehungszahl verlangt der Cosinus-Regulator, die kleinste der Proell- und Steinle-Regulator. Bei jedem System besitzen die schwereren Nummern die kleineren Umdrehungszahlen. Der Ungleichförmigkeitsgrad δ ist für den Cosinus- und Bufs-Regulator zu 0,02, für die übrigen zu 0,03 anzunehmen. Der Teil ε_f des Unempfindlichkeitsgrades ist überschläglich anzusetzen: für den Cosinus-Regulator zu 0,015, Proell- und Steinle-Regulator 0,01, Bufs-Regulator 0,005. Eine Berichtigung von δ hat wenig praktischen Wert; umgekehrt ist es zwar für die Gröfse ε, jedoch nehmen die käuflichen Regulatoren keine Rücksicht hierauf. Die Umdrehungszahlen der verschiedenen Gröfsen schwanken bei dem Cosinus-Regulator zwischen etwa 250 und 450, bei dem Bufs-Regulator zwischen 120 und 220, bei dem Proell- und Steinle-Regulator zwischen 90 und 120 i. d. Min. Die neueren Proell-Regulatoren mit federnder Belastung spielen bei 120 bis 190 Umdrehungen i. d. Min. Die Umdrehungszahl ist in leichter Weise nur bei einer Konstruktion von Steinle & Hartung (bis zu 50 $\frac{0}{0}$) zu verändern.

3. Käufliche Regulatoren mit Dampf-Drosselventil.

Die Preise der unter 4. zu nennenden Apparate, welche die vollkommenere Regelung durch die Expansionsänderung ermöglichen, lassen Regulatoren mit Drosselventil bei höherem Preise als 450 *M.* nur ausnahmsweise zweckmäfsig erscheinen. Dampfdrosselung ist nur bei gröfseren Füllungen des Cylinders gut anwendbar. Als Drosselvorrichtung wirkt am günstigsten auf den Empfindlichkeitsgrad der drehende Cylinderschieber, vervollkommnet durch Metallliderung der Ventilwelle; weniger vorteilhaft sind im allgemeinen achsial bewegte Schieberstangen und unvollständig entlastete Ventile (Glockenventile, Drosselklappen).

4. Käufliche Regulatoren mit Dampf-Expansionsapparat.

Der Regulator beeinflufst den Hub von Klinken eines Dampfeinlafsventiles. Daneben ist ein Verteilungsschieber erforderlich. Die Anordnungen sind meist auf nachträgliches Anbringen an Dampfmaschinen eingerichtet und werden geliefert als „Regulierapparat“ von Schäffer & Budenberg (260 bis 450 *M.*), „Corlifsapparat“ von Lauchhammerhütte (von 545 *M.* an), „Expansionsapparat“ von Maack in Köln-Ehrenfeld u. A. (von etwa 235 *M.* an).

5. Käufliche Leistungs-Regulatoren für Wasser- und Luftpumpen.

(Von Weifs in Basel.)

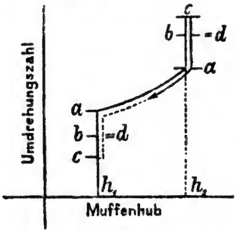
Begriff s. S. 524. Daselbst Litteratur-Angabe.

Für die vier Nummern beträgt die zulässige Verschiedenheit der Umdrehungszahlen das 4- bis 6-fache der kleinsten Umdrehungszahl; S wechselt zwischen 25 und 180 kg bei Preisen von 76 bis 240 *M.*; der Hub s, von 22 bis 40,5 mm zunehmend, ist hier wie bei allen Leistungs-Regulatoren für das Arbeitsvermögen ohne Bedeutung.

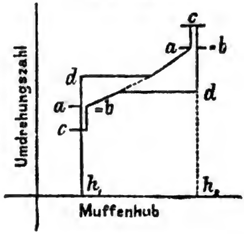
6. Mittelbar wirkende Regulatoren. (Vergl. S. 523.)

Wirkungsweise zur Einschaltung der Hülfskraft nach Abbild. 423 bei der Anordnung von Reibrädern, und nach Abbild. 424 bei Anwendung der Zahnkupplung.

Abbild. 423.



Abbild. 424.



In beiden Abbildungen bezeichnen: die Abscissen h_1 und h_2 die untere bezw. obere Muffenlage, Linie $a\,a$ die theoretische n-Kurve, Punkte b den Beginn und d das Ende der Einwirkung der Hülftskraft, Punkte c die Umdrehungszahl bei Umkehr der beschleunigten oder verzögerten Bewegung.

Bei einfacher Anordnung bleibt die Einkupplung der Hülfskraft von c aus bis zum Zustande bei d bestehen; die käuflichen Regulatoren von Schäffer & Budenberg, Ganz & Co. und Riedinger dagegen sorgen durch besondere Einrichtung für Auskupplung bereits bei c.

Anordnung mit Zahnkupplung bei nicht angemessenem Verhältnis von $\delta : \varepsilon$ wird leicht labil; die Wirkungsweise beider Arten ist schwer aus den Muffenbewegungen allein zu erkennen. Im allgemeinen sei ε recht klein, dagegen $\delta > 0{,}02$, wonach die Hubgröfse einzurichten. (Gewöhnlich wird δ zu klein und ε zu grofs belassen, wodurch ein starkes Pendeln der Maschine um die Gleichgewichtslage, somit ein grofser Abstand der Punkte b und c hervorgerufen wird.)

c. Allgemeine Regeln für Anlage von Regulatoren.

Bestimmung des Widerstandes W durch Auswiegen an der vorhandenen Reguliervorrichtung (unter Dampf), zweckmäfsig mittelst Federwage. Dabei ist zu berücksichtigen, dafs W bei den verschiedenen Stellungen veränderlich ist.

Eigenreibung F **des Regulators** ist bei guter Ausführung und Oelung $= 0{,}02\,S$ anzunehmen.

Bei Berechnung von G und Q ist der Einflufs der Armgewichte möglichst mit zu berücksichtigen, andernfalls eine spätere Berichtigung unter Zuhülfenahme der Gleichgewichts-Gleichung vorzusehen.

Soll Q nicht durch das Stellzeug beeinflufst werden, so balanciere man dieses sorgfältig aus und achte auf etwa vorhandenen, einseitigen Dampfdruck bei den Regelungsvorrichtungen (z. B. bei nicht durchgehender Ventilstange, bei Doppelsitzventilen mit etwas verschiedener Tellergröfse).

Ist der Gang der Maschine infolge zu leichten Schwungrades sehr veränderlich, wird also ein **Springen des Regulaters** beobachtet bezw. befürchtet, so verbinde man das Stellzeug mit einem **Flüssigkeitskatarakt.** (Einschalten eines Hahnes in das Verbindungsrohr beider Kolbenseiten zum Berichtigen; der Kolben sollte sich reibungsfrei im Cylinder bewegen können, daher letzterer lotrecht.)

Bei Dampfdrosselung soll die **gröfste Durchflufsöffnung für den Dampf** zu nur 0,8 von dem bei den Dampf-Steuerungen (s. Siebenter Abschnitt, Kraftmaschinen) als kleinsten Querschnitt angegebenen Querschnitt der Steuerungskanäle vorgesehen werden. Hiernach ist bei gegebenem Hub der Regulatormuffe und des Ventils dessen Sitzweite zu bemessen.

Drosselnde Regelungsvorrichtungen brauchen nur so weit abschliefsen zu können, dafs auch bei Leergang der Maschine durch höchste Muffenstellung mit Sicherheit noch eine Verzögerung der Geschwindigkeit erreicht wird. Diese Vorrichtungen sind namentlich in der Schlufslage möglichst zu entlasten; also lege man bei Drosselklappen das Wellenmittel in die äufsere Ebene des Tellers, der Einströmung zugekehrt, bei Doppelsitzventilen erfolge die Einstömung radial zwischen beiden Tellern. Den kleinsten und gleichmäfsigsten Widerstand verursachen drehende, mit Schlitzen versehene Cylinderschieber mit lotrechter Achse, neben Anwendung einer Metallliderung für die entlastete Steuerspindel.

Gelenke sind zur Verhütung von Reibung durch Klemmen und Ecken breit zu gabeln und erhalten gehärtete Stahlbolzen von angängig kleinstem Durchmesser.

Antrieb des Regulators mittelst Riemen, gegenüber dem durch Zahnräder, hat den Vorteil leichterer Konstruktion und der Vermeidung des Zahnrad-Geräusches, jedoch den Nachteil, bei Bruch oder Ablaufen des Riemens ein Durchgehen der Maschine infolge andauernd tiefster Muffenlage zu verursachen.

SECHSTER ABSCHNITT.

ARBEITSMASCHINEN.

I. WERKZEUGMASCHINEN.

Bei folgenden Angaben sind die Längen-Abmessungen ausnahmsweise in mm, die Festigkeitskoefficienten in kg f. d. qmm gegeben.

A. Maschinen zur Bearbeitung der Metalle.*)

a. Lochmaschinen und Scheren.

Bezeichnungen:

δ = Dicke des zu lochenden, bezw. zu schneidenden Bleches,
b = dessen Breite in mm,
d = Durchmesser des Loches, d_1 = Durchmesser des Stempels, d_2 = Durchmesser der Matrize } bei Lochmaschinen (in mm),
D = Durchmesser der Scheiben einer Kreisschere in mm,
h = Hubhöhe des Scherblattes bei Parallelscheren in mm,
Q = Gröfster Widerstand an der Schneide in kg,
T_s = Schubfestigkeit des zu scherenden Materials in kg f. d. qmm,
K = Bruchbelastung für Druck in kg f. d. qmm,
F = Gröfste Schnittfläche in qm i. d. Std.,
N = Gesamtarbeitsaufwand, N_1 = Leergangsarbeit, N_2 = Nutzarbeit } in PS.

Ein Abscheren ohne Zertrümmern findet statt, wenn:

$$\delta \leqq b\frac{K}{T_s} \quad \text{oder} \quad b \geqq \delta\frac{T_s}{K}.$$

*) Mit teilweiser Benutzung von Hartigs Versuchen, sowie Hoyer, Mechanische Technologie.

Bei **Lochmaschinen** ist vorteilhaft:

$$d_1 = d - \frac{1}{8}\delta \text{ und } d_2 = d + \frac{1}{8}\delta.$$

Man erweitert die Matrize nach unten entsprechend dem Zuschärfungswinkel bei Scherblättern.

Es ist:

$$Q = 1{,}1\,\pi d \delta T_s,$$

also für Schweifseisen ($T_s = 35$ kg f. d. qmm, vergl. S. 307):

$$Q = 121\,d\delta.$$

Bei **Scheren** erhalten die Scherblätter in der Regel gleiche Zuschärfungswinkel von 75° bis 85°, selten erhält das obere Blatt 50° bis 55° und das untere 80°. Zweckmäfsig bilden die Blätter einen Winkel $\alpha = 8^0$ bis 10^0 ($\alpha \leq$ Reibungswinkel).

Bei Scheren mit parallelen Schneiden ist:

$$Q = 1{,}1\,\delta b T_s,$$

also für Schweifseisen: $Q = 38{,}5\,\delta b.$

Bei geneigten Blättern ist:

$$Q = 0{,}55\,T\delta^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Die **Anzahl n der Schnitte** i. d. Min. für schweifseiserne Bleche betrage bei einer Dicke

$$\delta = 4 \text{ bis } 10 \text{ mm: } n = 10$$
$$\delta = 11 \text{ bis } 20 \text{ mm: } n = 9$$
$$\delta = 21 \text{ bis } 30 \text{ mm: } n = 8$$
$$\delta = 31 \text{ bis } 40 \text{ mm: } n = 7.$$

Schnittgeschwindigkeit 15 bis 20 mm i. d. Sek.

Bei Specialmaschinen für Kupfer oder Messing erhöhe man die Anzahl der Schnitte um 30 %.

Kraftverbrauch für Scheren und Lochmaschinen:

$$N = N_1 + N_2,$$

worin nach Hartig, wenn n_1 die Anzahl der Schnitte i. d. Std.:

$$N_1 = 0{,}1 + \frac{n_1 \delta^2}{1\,000\,000};$$

$$N_2 = 3{,}71\,a F,$$

wenn a der Arbeitsaufwand f. d. qmm Schnittfläche in mkg,

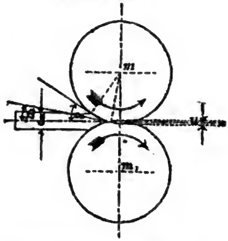
$$a = 0{,}25 + 0{,}0145\,\delta \text{ ist.}$$

Hartig entwickelt durch Versuche folgende Werte:

Blechdicke . . . . $\delta =$	10	20	30	40 mm.
Schnitte i. d. Min. . . . . $n =$	10	9,2	8,8	7,5
Leergangsarbeit . . . . . $N_1 =$	0,16	0,32	0,55	0,82 PS.
Arbeitsaufwand f. d. qmm Schnittfläche . . . $=$	0,395	0,540	0,685	0,830 mkg.

Kreisscheren (Abbild. 425) werden angewandt zum Schneiden von Blechen bis 4 mm Dicke. Man nehme $D = 50\,\delta$ (nicht über 200 mm). Uebergriff der Scheiben höchstens $u = \frac{1}{8}\,\delta$. Umfangsgeschwindigkeit der Scheiben = 0,5 bis 0,75 m i. d. Sek.

Abbild. 425.



b. Drehbänke.

Die **Umfangsgeschwindigkeit** v des Arbeitsstückes in mm i. d. Sek. betrage:

	für Schruppen: mm i. d. Sek.	für Schlichten: mm i. d. Sek.
bei Gufseisen	50—100	150
„ Hartgufs	50	50
„ Schweifseisen . . .	90—115	180
„ Stahl	60	180
„ Bronze und Kupfer	200	240

Vorschub des Stichels für eine Umdrehung des Arbeitsstückes 0,2 bis 1,5 mm (für Schruppen im Mittel 0,5 mm).

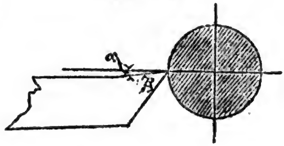
Gröfste Dicke des Spanes für Gufseisen 10 mm, Schweifseisen 7 mm, Stahl 4 mm, Bronze 3 mm.

Gröfster Druck auf den Stahl bei kleinen Drehbänken = 500 kg, bei mittleren Drehbänken = 1000 kg, bei grofsen Drehbänken = 1500 kg.

Anzahl der **Stufenscheiben** steigt mit der Gröfse der Maschine von 3 bis 6, abhängig von der Gröfse der zu bearbeitenden Gegenstände.

Im allgemeinen wird man die Drehbänke zur Bearbeitung aller Metalle einrichten und eine möglichst gleichmäfsige Abstufung der Umdrehungszahlen mit und ohne Vorgelege in Anwendung bringen. Bei leichten und mittelschweren Bänken ist kegelförmige Lagerung der Hauptspindel empfehlenswert, bei schweren Bänken sind cylindrische Lager zweckmäfsiger.

Abbild. 426.



Grenzen der **Umdrehungszahlen,** wenn d_{max} der gröfste und d_{min} der kleinste Drehdurchmesser in mm:

$$n_{min} = \frac{60\,v_{min}}{\pi\,d_{max}} = \frac{955}{d_{max}}, \qquad n_{max} = \frac{60\,v_{max}}{\pi\,d_{min}} = \frac{4586}{d_{min}}.$$

Anstellungswinkel α für einen möglichst geringen Kraftverbrauch (Abbild. 426):

für Schweifseisen 3° bei einem Zuschärfungswinkel β von 51°,
„ Gufseisen 4° „ „ „ β „ 51°,
„ Bronze 4° „ „ „ β „ 66°.

Gesamtarbeitsaufwand $N = N_1 + N_2$.

Leergangsarbeiten N_1 nach Hartig.

Anzahl der Räder-übersetzungen zwischen Antriebwelle und Spindel.	bei leichter	bei mittlerer	bei schwerer
	Ausführung:		
0	$N_1 = 0{,}05 + 0{,}0005\, n$	$0{,}10 + 0{,}0023\, n$	$0{,}25 + 0{,}0041\, n$.
2	$N_1 = 0{,}05 + 0{,}0012\, n$	$0{,}10 + 0{,}0150\, n$	$0{,}25 + 0{,}053\, n$.
3 oder 4	$N_1 = 0{,}05 + 0{,}05\, n$	$0{,}13 + 0{,}1100\, n$	$0{,}25 + 0{,}18\, n$.

Ferner ist

$$N_2 = \varepsilon G,$$

worin ε die Arbeits-Leistung in PS f. 1 kg stündlich abgedrehten Materials und G das Gewicht der stündlich abgedrehten Späne in kg bedeutet.

Es ist bei einem mittleren Spanquerschnitt $f = 2{,}8$ qmm,

für Gufseisen . . . . . . $\varepsilon = 0{,}069$ PS,
„ Schweifseisen . . . . $\varepsilon = 0{,}072$ „ ,
„ Stahl . . . . $\varepsilon = 0{,}104$ „ .

Der Berechnung von G lege man die Zahlen zu grunde, welche für Gufseisen angegeben wurden: Umfangsgeschwindigkeit = 100 mm i. d. Sek., Vorschub für einen Schruppspan = 0,5 mm, Höhe eines Spanes = 10 mm. Dann ist das höchste Gewicht der i. d. Std. gelieferten Späne

$$G = 13{,}5 \text{ kg i. d. Std.}$$

Wirkungsgrad der Drehbänke durchschnittlich

$$\eta = 0{,}675.$$

Leitspindeldrehbänke, welche zum Gewindeschneiden gebraucht werden, richte man mit Vor- und Rückgang im Geschwindigkeitsverhältnis 2 : 3 ein.

Bei Zugspindelbänken ist zu berücksichtigen, dafs das Gleiten des Riemens zwischen Spindelkasten und Zugspindel die Geschwindigkeit des Supports um etwa 20 bis 25% vermindert.

Ueberschläglich ist zu setzen für kleine Drehbänke $N = 0{,}4$ bis 0,6, für mittlere 0,6 bis 1,0, für grofse 1,0 bis 3,0 PS.

c. Bohrmaschinen.

Umfangsgeschwindigkeit der Bohrer i. d. Sek.:

	1. bei Lochbohrmaschinen:	2. bei Ausbohrmaschinen und für Reibahlen:
für Hartgufs	7 bis 14 mm	6 bis 12 mm
„ Stahl	30 bis 40 mm	25 bis 35 mm
„ Gufseisen	60 bis 70 mm	50 bis 60 mm
„ Schweifseisen	80 bis 160 mm	60 bis 70 mm
„ Bronze	100 bis 180 mm	90 bis 150 mm.
Der Vorschub beträgt bei jeder Umdrehung des Bohrers	0,1 bis 0,5 mm;	0,1 bis 1 mm.

Zuschärfungswinkel = 50 bis 80°, Anstellungswinkel = 4 bis 5°, also Schneidewinkel = 54 bis 85°.

Ist n_1 die Umdrehungszahl der Vorgelegewelle, n_2 die der Bohrspindel, so ist die **Leergangsarbeit**

für einfache Bohrmaschinen:

ohne Zahnräderantrieb $N_1 = 0{,}0006\, n_1 + 0{,}0005\, n_2$,
mit „ $N_1 = 0{,}0006\, n_1 + 0{,}001\, n_2$,

für Radialbohrmaschinen:

ohne Zahnräderantrieb $N_1 = 0{,}0006\, n_1 + 0{,}004\, n_2$,
mit „ $N_1 = 0{,}04 + 0{,}0006\, n_1 + 0{,}004\, n_2$.

Ist V die Menge des stündlich ausgebohrten Materials in ccm und ε der Arbeitsaufwand f. d. ccm und Std. in PS, so ist die **Nutzarbeit** der Bohrmaschine:

$$N_2 = \varepsilon V,$$

dabei für Gufseisen: $\varepsilon = 0{,}001 + \frac{0{,}001}{d}$,

für Schweifseisen: $\varepsilon = 0{,}001 + \frac{0{,}04}{d}$.

Bezeichnet:

K_z die Zugfestigkeit des Materials in kg f. d. qmm,
d den Lochdurchmesser in mm,
δ den Vorschub f. 1 Umdrehung in mm,
v die Umfangsgeschwindigkeit in m i. d. Sek.,

so ist für einfache Bohrmaschinen:

$$N_2 = 0{,}044\, d\,\delta K_z v,$$

für Radialbohrmaschinen:

$$N_2 = 0{,}062\, d\,\delta K_z v.$$

Wirkungsgrad der einfachen Bohrmaschinen $\eta = 0{,}832$, der Radialbohrmaschinen $\eta = 0{,}593$.

Ueberschläglich ist zu setzen für kleine Bohrmaschinen $N = 0{,}1$ bis 0,3, für mittlere 0,3 bis 0.5, für grofse 0,5 bis 1,0 PS.

d. Hobelmaschinen.

Schnittgeschwindigkeit:

für grofse	Hobelmaschinen	90 mm,
„ mittlere	„	100 mm,
„ kleine	„	110 mm.

Rücklauf findet statt im Geschwindigkeitsverhältnis 3 : 2 bis 2 : 1.

Bei **Shapingmaschinen** (Feilmaschinen) in der Regel drei Stufenscheiben. Geschwindigkeit für Shapingmaschinen:

für Schweifseisen . . .	150 bis 170 mm	i. d. Sek.,
„ Gufseisen	130 bis 150 mm	„ „ „ ,
„ Stahl	80 bis 100 mm	„ „ „ ,
„ Bronze	180 bis 220 mm	„ „ „ .

Vorschub bei Hobelmaschinen 0,2 bis 3 mm, bei Shapingmaschinen 0,2 bis 1,5 mm. Der Vorschub findet während des Rückganges statt.

Spanhöhe bei

Gufseisen. . . .	nicht über	20 mm,
Schweifseisen . .	„ „	12 mm,
Stahl	„ „	8 mm,
Bronze	„ „	4 mm.

Gröfster Druck gegen den Stichel 1000 bis 1500 kg.

Arbeitsbedarf der Hobelmaschinen:

$$N = N_1 + N_2,$$

wobei $N_1 = 0{,}81\, N_2$

und $N_2 = \varepsilon G$

ist, wenn ε die Nutzarbeit für 1 kg stündlich abgehobelten Metalles in PS und G das Gewicht des i. d. Std. abgehobelten Metalles in kg bedeutet. Es ist bei einem mittleren Spanquerschnitt f (in qmm):

$$\varepsilon = 0{,}034 + \frac{0{,}13}{f} \text{ PS.}$$

Annäherud ist für:

Stahl	$\varepsilon = 0{,}246$ PS,
Schweifseisen	$\varepsilon = 0{,}114$ „ ,
Gufseisen	$\varepsilon = 0{,}113$ „ ,
Bronze	$\varepsilon = 0{,}028$ „ .

Wirkungsgrad der Hobelmaschinen $\eta = 0{,}553$.

Ueberschläglich ist zu setzen für kleine Hobelmaschinen $N = 0{,}2$ bis 0,4, für mittlere 0,6 bis 1,0, für grofse 1,0 bis 2,5 PS; für Stofsmaschinen entsprechend 0,3 — 0,8 — 3,0 — 8,0 PS.

e. Metallsägen.

1. Kreissägen zum Schneiden von Metallen im kalten Zustande bis zu 100 mm Durchmesser erhalten eine Dicke von 1 mm und eine Teilung bis zu 3 mm.

Die gröfseren Sägen bis zu 500 mm Durchmesser erhalten eine Dicke bis zu 4,5 mm. Zähne nach beiden Seiten um je 1,5 mm breiter. Teilung = 5 bis 12 mm. Umfangsgeschwindigkeit = 220 mm i. d. Sek. Vorschub 0,125 bis 0,25 mm i. d. Sek.

2. **Kreissägen zum Schneiden von Metallen im rotwarmen Zustande** erhalten 0,8 bis 1,2 m Durchmesser. Umfangsgeschwindigkeit 60 bis 80 m i. d. Sek.

f. Cylinderbohrmaschinen.

Die **Umfangsgeschwindigkeit** betrage $\frac{3}{8}$ von der bei Drehbänken angegebenen, die **Seitenbewegung** des Stichels:

0,2 bis 1 mm.

Gröfster Druck 1300 kg.

Nutzarbeit in PS nach Hartig:

$$N_z = \varepsilon G,$$

wenn G das stündlich zerspante Gewicht in kg,

$$\varepsilon = 0{,}034 + \frac{0{,}13}{f} \text{ PS ist.}$$

Für $f =$	$\frac{1}{2}$	1	5	10	20 qmm
ist: $\varepsilon =$	0,294	0,164	0,050	0,047	0,041 PS,

wobei f die Gröfse des Spanquerschnittes in qmm bezeichnet.

g. Fräsmaschinen.

Schnittgeschwindigkeit für Gufseisen 65 bis 200 mm i. d. Sek.

Kraftbedarf in PS nach Hartig:

$$N = N_1 + \varepsilon G,$$

worin N_1 zwischen 0,1 und 0,5 PS schwankt.

In PS ausgedrückt, ist:

für Gufsrinde (Sandgufs): $\varepsilon = 0{,}239$ PS f. 1 kg Spangewicht i. d. Std.,
für weiches Gufseisen: $\varepsilon = 0{,}113$ bei $f = 0{,}37$ qmm mittlerem Spanquerschnitt,
für Ausfräsen von Zahnlücken: $\varepsilon = 0{,}26$ bei $f = 0{,}025$ qmm.

Vorschub 0,125 bis 0,3 mm i. d. Sek.

Für genaue Arbeit stets Gegenspitze für den Fräserdorn anzuordnen.

Bei gröfseren Fräsen empfehlen sich Messerköpfe mit besonders eingesetzten und befestigten Messern, für welche die Angaben für Anstellungs- und Zuschärfungswinkel, wie unter „Drehbänke" (S. 537) angegeben, gültig sind.

Ueberschläglich ist zu setzen für kleinere Fräsmaschinen $N = 0{,}1$ bis 0,3, für gröfsere 0,3 bis 0,7 PS.

h. Hämmer.

1. Stielhämmer.

Aufwerfhämmer. Hubhöhe 52 bis 65 cm, Anzahl der Schläge 80 bis 120 i. d. Min. Gewicht des Hammerkopfes 200 bis 300 kg. Wirkungsgrad durchschnittlich 0,8.

Stirnhämmer. Hubhöhe 60 bis 100 cm, Anzahl der Schläge 40 bis 60 i. d. Min. Gewicht 700 bis 1200 kg.

Schwanzhämmer. Die Hebelarme des Helmes verhalten sich wie 4 : 9 bis 4 : 12; Hubhöhe 50 cm, Zahl der Schläge 120 i. d. Min.; Gewicht des Hammerkopfes 200 bis 320 kg, manchmal bis 750 kg.

Die Stielhämmer bedürfen zum Zängen einer Herdfrischluppe einer Betriebskraft von 14 bis 18 PS und 30 bis 35 Min. Zeit.

Berechnung des Schwungrades s. S. 515 u. f.

Reibungshämmer. Hubhöhe 1,2 bis 2,4 m; Anzahl der Schläge 50 bis 150 i. d. Min. Gewicht des Bärs bis 200 kg.*)

2. Dampfhämmer.

Fallgewicht, Hubhöhe und Anzahl der Hübe richten sich nach der Verwendung des Hammers. Nach Ledebur beträgt:

	Fallgewicht. kg	Hubhöhe. mm	Hübe i. d. Min.
In Schmiedewerkstätten:			
für kleine Gegenstände . . .	50—500	150—600	200—400
für gröſsere Gegenstände . .	500—1000	600—1000	100—200
In Puddelwerken:			
zum Verdichten der Luppen .	1500—2500	1000—1500	80—100
In Eisenwalzwerken:			
zum Schweiſsen und Verdichten für Gegenstände mittlerer Gröſse	2500—5000	1250—1800	80—100
für gröbere Gegenstände (Brammenhämmer)	5000—10000	1500—2400	60—80
In Werken zum Schmieden von Fluſsstahl:			
für Gegenstände mittlerer Gröſse	10000—20000	2000—3000	60—80
für gröſsere Blöcke	20000—50000	3000—3200	60

Nach Versuchen von Kick sind zur Erzielung ähnlicher Formänderungen an ähnlichen Körpern desselben Materials Schlagarbeiten erforderlich, welche dem Rauminhalte dieser Körper proportional sind.

*) Vergl. Glasers Ann. V. Bd., S. 104; Zeitschr. d. V. d. Ing. 1870, S. 751.

Berechnung der Dampfhämmer nach von Hauer.

Bezeichnungen:

G = Fallgewicht des Hammers mit Kolben und Kolbenstange in kg,
H = Hubhöhe des Hammers in m,
H_1 = Hubhöhe, bei welcher die Umsteuerung erfolgt, in m,
R = Reibungswiderstand in kg,
O = Ganze Kolbenfläche in qm,
rO = Kolbenfläche nach Abzug des Kolbenstangenquerschnitts, in qm,
A = 10000 kg f. d. qm, der Druck von 1 Atm.,
p = absolute Spannung des einströmenden Dampfes in Atm.,
p' = absolute Spannung des abströmenden Dampfes in Atm.,
e = Expansionsgrad des Unterdampfes = Hubhöhe : Volldruckhöhe,
$\beta = \frac{1 + \ln e}{e}$,
e' = Kompressionsgrad $= \frac{H - H_1 + z}{z}$, wo z die Entfernung der höchsten Kolbenstellung vom oberen Cylinderdeckel,
$\beta' = \frac{e' \ln e'}{e' - 1}$.

Für	$e =$	$\frac{5}{4}$;	$\frac{3}{2}$;	$\frac{7}{4}$;	2
ist	$\beta =$	0,979;	0,937;	0,891;	0,847.
Für	$e' =$	3;	4;	5;	6
ist	$\beta' =$	1,648;	1,848;	2,012;	2,150.

Die **Hubhöhe** nehme man etwa $H = 0{,}025\sqrt{G}$.

Der **Durchmesser der Kolbenstange** betrage für Dampfhämmer mit dicker Kolbenstange $\frac{1}{3}$ bis $\frac{5}{8}$ des Cylinderdurchmessers, für Dampfhämmer mit dünner Kolbenstange:

bei einem Hube von	zum Schmieden von Eisen	zum Schmieden von Stahl
weniger als 1 m	$\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$
1 bis 2 m	$\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{6}$
mehr als 2 m	$\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{5}$

vom Durchmesser des Cylinders; bei Anwendung von frischem Oberdampf 25 % stärker.

α. Hämmer ohne Oberdampf und Prellung.

1. Mit Expansion.

$$O > \frac{G + R}{A\,[r\,(\beta p - 1) + 1 - p']};$$

$$H_1 = H\,\frac{G + R + A\,O\,(p' - 1)\,(1 - r)}{A\,O\,r\,(\beta p - p')}.$$

Für $r = 0{,}97$; $p' = 1{,}1$; $R = 0{,}08\,G$ ist:

$$O > \frac{G}{8981\,[\beta p - 1{,}103]};$$

$$H_1 = H\,\frac{G + 27{,}8\,O}{8981\,O\,(\beta p - 1{,}1)}.$$

2. Ohne Expansion.

Weil $e = 1$, ist $\beta = 1$. Also:

$$O > \frac{G}{8981\,(p - 1{,}103)};$$

$$H_1 = H\,\frac{G + 27{,}8\,O}{8981\,O\,(p - 1{,}1)}.$$

β. Hämmer ohne Oberdampf und mit Prellung.

1. Mit Expansion.

$$O > \frac{G + R}{A\,[r\,(\beta p - 1) + 1 - p']};$$

$$H_1 = H\,\frac{G + R - A\,O\,(rp' + 1 - r - \beta' p')}{A\,O\,[r\,(\beta p - p') + p'\,(\beta' - 1)]}.$$

Für $r = 0{,}96$; $p' = 1{,}1$; $R = 0{,}08\,G$ ist:

$$O > \frac{G}{8888\,(\beta p - 1{,}104)};$$

$$H_1 = H\,\frac{G + 10\,185\,O\,(\beta' - 0{,}996)}{10\,185\,O\,(0{,}873\,\beta p + \beta' - 1{,}96)}.$$

2. Ohne Expansion.

Weil $e = 1$, ist $\beta = 1$. Also:

$$O > \frac{G}{8888\,(p - 1{,}104)};$$

$$H_1 = H\,\frac{G + 10\,185\,O\,(\beta' - 0{,}996)}{10\,185\,O\,(0{,}873\,p + \beta' - 1{,}96)}.$$

γ. Hämmer mit Oberdampf.

1. Mit Expansion des Unterdampfes.

$$O > \frac{G + R}{A\,[r\,(\beta p - 1) + 1 - p']};$$

$$H_1 = H\,\frac{G + R + AO\,(p - rp' + r - 1)}{AO\,[r\,(\beta p - p') + p - p']}.$$

Für $p' = 1{,}1$, $R = 0{,}08\,G$ ist:

$$O > \frac{G}{9259\,[r(\beta p - 1) - 0{,}1]};$$

$$H_1 = H\frac{G + 9259\,O\,(p - 0{,}1\,r - 1)}{9259\,O\,[r(\beta p - 1{,}1) + p - 1{,}1]}.$$

2. Ohne Expansion des Unterdampfes.

Für $e = 1$ ist $\beta = 1$. Also:

$$O > \frac{G}{9259\,[r(p - 1) - 0{,}1]};$$

$$H_1 = H\frac{G + 9259\,O\,(p - 0{,}1\,r - 1)}{9259\,O\,(1 + r)(p - 1{,}1)}.$$

δ. Hämmer mit expandierendem Oberdampf (Daelen).

$$O = \frac{1}{A}\cdot\frac{(G + R)\,H}{H_1(rp - 1) + H(2 - p' - r) - M\ln c},$$

worin

$$c = \frac{H - H_1(1 - r)}{r\,H} \text{ und}$$

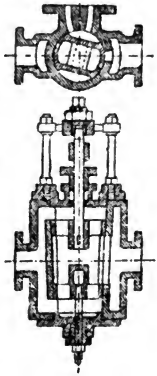
$$M = H_1(rp - p') + Hp' \text{ ist.}$$

H_1 ist zu wählen, u. zw. um so kleiner gegen H, je gröfser die Anzahl und Stärke der Schläge werden soll.

Für $p' = 1{,}1$, $R = 0{,}08\,G$ ist

$$O = \frac{GH}{9259\,H_1(rp - 1) + H(0{,}9 - r) - M\ln c}.$$

Abbild. 427.



Abbild. 427 giebt die Anordnung des zur Steuerung des Daelen-Hammers benutzten **Wilson-schen Hahnes.**

Dampfeinströmung $= \frac{1}{18}$ bis $\frac{1}{20} \times$ Kolbenquerschnitt. Cylinderhöhe (wenn keine Prellung) etwas gröfser, als dem Hub entsprechend. Kolbendichtung selbstspannende Ringe. Cylinder-Wandstärke gröfser als sonst, häufig oben um $\frac{1}{6}$ schwächer als unten. Der Bär mufs in seinem tiefsten Punkte noch auf 0,6 seiner Länge geführt sein. Hammergerüst bis 700 kg-Bär einseitig.

Das **Gewicht der Chabotte** betrage:

für Hämmer zum Schmieden von Eisen das 6 H-fache, mindestens das 8-fache Gewicht des Fallbärs;

für Hämmer zum Schmieden von Stahl das 10 H-fache, mindestens das 12-fache Gewicht des Fallbärs.

Bei Hämmern mit frischem Oberdampf nehme man das Gewicht der Chabotte um 30 % gröfser an.

Den **Druck P auf die Unterlage der Chabotte** (in kg) infolge der Schläge kann man, wenn H die Hubhöhe (bei Hämmern mit Oberdampf die Geschwindigkeitshöhe) des Hammers in m, durchschnittlich annehmen:

für Luppenhämmer:

$$P = 30\,GH \text{ bis } 60\,GH,$$

für Hämmer zum Schmieden von Packeten:

$$P = 60\,GH \text{ bis } 95\,GH,$$

für Hämmer zum Schmieden von Stahl:

$$P = 95\,GH \text{ bis } 125\,GH.$$

Zu diesem Druck kommt hinzu das Gewicht der Chabotte.

B. Maschinen zur Bearbeitung des Holzes.

a. Sägemaschinen.

1. Gattersägen.

Es bezeichne:

H den Hub des Gatters,
h die gröfste Schnitthöhe oder den gröfsten Stammdurchmesser,
n die Anzahl der Doppelhübe i. d. Min.,
v die Geschwindigkeit der Säge in m i. d. Sek.

Vertikalgatter mit Walzenvorschub.

(Bund-, Voll- oder Walzengatter genannt.)

Anzahl der Sägen bis 24. Der Gatterrahmen mufs möglichst leicht gebaut sein, ebenso die Lenkerstangen. Die oberen und unteren Platten des Rahmens sind am besten aus Martinstahl, die Verbindungen der Platten aus Röhren herzustellen. Die Sägen werden mittelst Keile gespannt. Es ist zweckmäfsig, den Antrieb von unten anzuordnen und die Kurbelwellenlager samt den Ständern auf einer gemeinsamen Grundplatte zu befestigen. Diese Gatter benötigen eine Unterkellerung von 1,8 m Tiefe; ist diese wegen des Wasserstandes nicht zulässig, so kann man die Tiefe dadurch verkleinern, dafs man die Antriebsscheiben seitlich vom Gatter legt und eine gekröpfte dreifach gelagerte Kurbelwelle anwendet. Der Vorschub geschieht entweder ununterbrochen durch Reibräder, oder absätzig durch ein Klemmgesperre; ersteres bedingt einen grofsen Ueberhang der Sägen, damit sie sich beim Aufgang frei schneiden, während beim Klemmgesperre der Stamm nur bei Niedergang der Sägen, also beim Schneiden, vorgezogen wird. Des besseren Freischnittes wegen beginnt der Vorschub schon bei Aufgang der Sägen u. zw. bei $\frac{3}{4}$ der Hubhöhe und endigt, wenn die Sägen noch $\frac{1}{4}$ Weg bei Niedergang zurückzulegen haben.

$H = 0,65\ h$,
n = 190 bis 250 i. d. Min.,
v = 2,7 m i. d. Sek. für leichte Gatter,
v = 3,3 m i. d. Sek. für schwere Gatter.

Länge der Lenkerstangen = 6,3 H. Vorschub 0 bis 7 mm f. d. Schnitt, während des Ganges verstellbar.

Leistung bis zu 6 Block je 8 m lang i. d. Std. bei weichem Holz zu Brettern und Bohlen.

Kraftverbrauch bis 12 PS.

Horizontalgatter.

Horizontalgatter mit Wagenvorschub oder Blocksäge und horizontales Walzengatter oder Trennsäge haben nur ein Sägeblatt, welches beim Hin- und Rückgang schneidet; die Säge wird mittelst Schrauben in einem Holzrahmen befestigt, an letzterem befinden sich Holzläufer, die in gufseisernen Führungen genau wagerecht gleiten. Gatterrahmen und Lenkerstange aus Holz, Länge der letzteren = 3,5 H.

$H = 0,8\ h$,
v = 7 m i. d. Sek. für grofse Gatter,
v = 6,5 m i. d. Sek. für mittlere Gatter,
v = 6,0 m i. d. Sek. für kleine Gatter,
n = 210 bis 350 i. d. Min.

Vorschub 0 bis 4 mm f. d. Doppelschnitt ununterbrochen und während des Ganges verstellbar.

Geschwindigkeit des Wagens beim Rückgange etwa 0,4 m i. d. Sek.

Kraftverbrauch 2 bis 5 PS.

Vorschub der Trennsäge durch Walzen ununterbrochen 0 bis 4 mm f. d. Doppelschnitt. Fourniergatter machen i. d. Min. 300 bis 350 Schnitte. Vorschub ununterbrochen und beträgt f. d. Doppelschnitt 0,5 bis 1,3 mm. Der Wagen bewegt sich lotrecht u. zw. beim Schneiden von unten nach oben.

Kraftverbrauch 1,5 bis 2,5 PS.

2. Kreissägen.

Durchmesser des Blattes 0,15 bis 1,2 m. **Umfangsgeschwindigkeit** bei Längskreissägen 40 bis 50 m i. d. Sek. und bei Querkreissägen etwa 30 m i. d. Sek. **Vorschub** entweder von Hand oder selbstthätig durch Taue, Ketten, Walzen oder Wagen und steigt bis 20 m i. d. Min. je nach Art und Stärke des zu schneidenden Holzes. **Kraftverbrauch** bis zu 20 PS.

3. Bandsägen.

Das Sägeblatt geht über zwei lotrecht übereinander gelagerte Rollen von 0,65 bis 1,250 m Durchmesser mit etwa 20 m Ge-

schwindigkeit i. d. Sek. und mufs oberhalb und unterhalb des Schnittes durch verstellbare Holzklötze seitlich sowie im Rücken geführt werden. Die Rollen mit Leder oder Gummi überzogen. Die obere möglichst leicht angeordnet und nachgiebig gelagert, so dafs das Blatt mittelst Federn, Gummibuffer oder Gegengewichte stets gleich stark gespannt erhalten werden kann; ihre Achse in lotrechter Ebene etwas drehbar.

Vorschub von Hand oder selbstthätig.

Kraftverbrauch bis 12 PS.

4. Schweifsägen oder Decoupiersägen.

Hub veränderlich und beträgt 90 bis 180 mm. Hubzahl 600 i. d. Min. Kraftverbrauch etwa 0,5 PS.

5. Sägenschärfmaschinen für Gatter- und Kreissägen.

Durchmesser der Schmirgelscheibe 0,30 m, Dicke der Scheibe 9 mm. Umfangsgeschwindigkeit etwa 12,5 m i. d. Sek. bei Trockenschleifen. Kraftverbrauch etwa 0,5 PS.

b. Holzhobelmaschinen.

1. Flügel- oder Sternhobelmaschinen.

200 bis 250 Umdrehungen i. d. Min. Vorschub veränderlich von 2 bis 5 m i. d. Min. Kraftverbrauch 3 bis 6 PS.

2. Walzenhobelmaschinen.

Anzahl der Messer zwei. Umfangsgeschwindigkeit des Messerkopfes etwa 32 m i. d. Sek. Vorschub bis 7,0 m i. d. Min.

c. Spundmaschinen für Balken und Bretter.

Umfangsgeschwindigkeit der Messer etwa 32 m i. d. Sek. Durchmesser des Kopfes etwa 250 bis 300 mm. Vorschub von Hand oder selbstthätig. Kraftverbrauch bis 6 PS.

d. Fräsmaschinen, Zapfenschneid- und Schlitzmaschinen.

Umdrehungen der Spindel 3500 i. d. Min. Vorschub immer von Hand. Für gewisse Arbeiten, wie sie namentlich in der Möbelfabrikation häufig vorkommen, ist es vorteilhaft, an der Fräsmaschine eine Vorrichtung anzubringen, mittelst welcher man die Umdrehungsrichtung der Messerspindel wechseln kann. Kraftbedarf etwa 2 PS.

e. Kopiermaschinen.

Auf 120 bis 150 Umdrehungen der Fräserwelle kommt eine Umdrehung des Arbeitsstückes. Vorschub (selbstthätig) beim Schruppen

etwa 0,4 m, beim Schlichten etwa 0,09 m i. d. Min. Für eine Umdrehung des Arbeitsstückes: beim Schruppen 10 bis 12 mm, beim Schlichten 2,5 mm. Kraftbedarf etwa 1 bis 1,5 PS.

f. Bohrmaschinen.

Aehnlich den Bohrmaschinen für Metalle; nur Vorschub immer von Hand. Umdrehungen der Bohrspindel 3000 i. d. Min.; Kraftbedarf etwa 1 PS.

g. Stemmmaschinen.

Hubzahl 150 bis 300. Schnittgeschwindigkeit 1,50 bis 2,72 m i. d. Sek. Vorschub des Holzes von Hand; er beträgt 0,5 bis 2,5 mm f. d. Hub; Kraftbedarf 0,75 bis 1,5 PS.

II. LASTHEBEMASCHINEN.*)

Bezeichnet:

P die wirkliche, P_0 die theoretische Triebkraft,
Q_1 den gesamten Widerstand, Q die reine Nutzlast,
$\eta_1, \eta_2, \eta_3 \cdots\cdots \eta_n$ die Wirkungsgrade der einzelnen Getriebe, die mit einander in fortlaufendem Eingriff stehen,
η den Wirkungsgrad der zusammengesetzten Maschine, so ist:

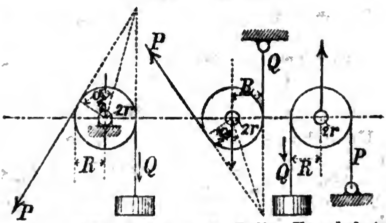
$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_1} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots\cdots \eta_n.$$

A. Rollen.

Es bezeichne (Abbild. 428):

P die Spannung des ablaufenden,
Q des auflaufenden Seiles, in kg,
R den Rollenhalbmesser,
r den Zapfenhalbmesser,
d die Seil- bezw. Ketteneisenstärke (bezw. Gelenkbolzendurchmesser), in cm,
μ_1 den Koefficienten der Zapfenreibung (s. S. 209 u. f.),
α den Centriwinkel des umspannten Bogens.

Abbild. 428.



Feste Rolle. Lose Rolle. Umgekehrte lose Rolle.

*) Nach Ad. Ernst, Die Hebezeuge.

a. Hanfseilrollen.

Allgemein ist: $\frac{P}{Q} = \frac{1}{\eta} = x$, je nach Beschaffenheit der Seile:

$$= 1 + \frac{0{,}06\, d^2}{R} + \frac{2\,\mu_1 r \sin \frac{1}{2}\alpha}{R} \text{ bis } 1 + \frac{0{,}18\, d^2}{R} + \frac{2\,\mu_1 r \sin \frac{1}{2}\alpha}{R}.$$

Für $\alpha = 180^0$ wird:

$$\frac{1}{\eta} = x = 1 + \frac{0{,}06\, d^2}{R} + \frac{2\,\mu_1 r}{R} \text{ bis } 1 + \frac{0{,}18\, d^2}{R} + \frac{2\,\mu_1 r}{R}.$$

Für $R = 4\,d$, $r = 0{,}4\,d$, $\mu_1 = 0{,}08$ wird:

wenn $d =$	16	26	36	46	52 mm:
$\frac{1}{\eta} = x =$	1,04 bis 1,09	1,05 bis 1,13	1,08 bis 1,18	1,09 bis 1,22	1,10 bis 1,25.

Für den Wirkungsgrad von **Drahtseilrollen** liegen ausreichend umfassende Versuche zur Zeit noch nicht vor. Für Seile von 14 bis 18 mm Durchmesser und etwa 1 mm Drahtstärke fand sich für Rollen mit 500 bis 600 mm Durchmesser bei 114 bis 144 Drähten im Seil im Mittel:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{\eta} = x = 1{,}04.$$

Die auf S. 215 angegebene Formel von Weisbach für die Steifigkeit von Drahtseilen ist nach Ad. Ernst unrichtig.

b. Kettenrollen.

Allgemein ist:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{\eta} = x$$

$$= 1 + \frac{0{,}2\, d}{R} + \frac{2\,\mu_1 r \sin \frac{1}{2}\alpha}{R} \text{ bis } 1 + \frac{0{,}3\, d}{R} + \frac{2\,\mu_1 r \sin \frac{1}{2}\alpha}{R}.$$

Für $\alpha = 180^0$ wird:

$$\frac{1}{\eta} = x = 1 + \frac{0{,}2\, d}{R} + \frac{2\,\mu_1 r}{R} \text{ bis } 1 + \frac{0{,}3\, d}{R} + \frac{2\,\mu_1 r}{R}.$$

Vergl. hierzu S. 215 u. 459.

Für $R = 10\,d$, $r = 1{,}5\,d$, $\mu_1 = 0{,}08$ ergiebt sich unabhängig von d, je nach Gröfse der Kettenreibung:

$$\frac{1}{\eta} = x = 1{,}044 \text{ bis } 1{,}06.$$

Für **Daumenrollen** ist der obere Grenzwert

$$x = 1{,}06$$

zu nehmen.

B. Flaschenzüge.

a. Gewöhnlicher Flaschenzug.

Bezeichnet (Abbild. 429):

n die Anzahl der Rollen (gerade oder ungerade, je nach der Befestigung des einen Trums),

$x = 1 + \xi$ die unter **A.** für Rollen ermittelten Werte,

η den Wirkungsgrad des Flaschenzuges, so ist:

$$\eta = \frac{1}{n x^n} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{1 + \frac{n-1}{2}\xi}{1 + nR\left(1 + \frac{n-1}{2}\xi\right)}.$$

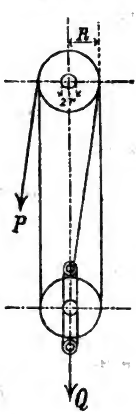
Hieraus für:		$n =$ 4	5	6	7	8
Mittelwert für Ketten:	$\xi = 0{,}05$;	$\eta = 0{,}88$	0,86	0,85	0,82	0,80
Mittelwert für Hanfseile:	$\xi = 0{,}10$;	$\eta = 0{,}80$	0,75	0,71	0,68	0,65
	$\xi = 0{,}15$;	$\eta = 0{,}71$	0,66	0,62	0,58	0,54.

10-rollige Drahtseilflaschenzüge für Wasserdruck-Hebewerke ergaben bei 1 mm Drahtstärke und 114 bis 144 Drähten mit 500 bis 600 mm Rollendurchmesser noch einen Wirkungsgrad $\eta = 0{,}80$.

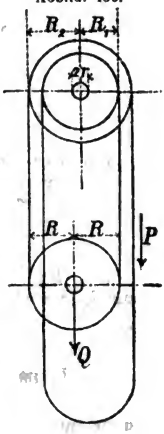
Umfassendere Versuchswerte für andere Verhältnisse fehlen zur Zeit.

b. Differential-Flaschenzug.

Abbild. 429.



Abbild. 430.



Ist wieder (wie unter **a.**):

$$x = 1 + \xi,$$

und für die in Abbild. 430 eingetragenen Bezeichnungen:

$$R = \frac{R_2 + R_1}{2},$$

so wird allgemein:

$$Q = \frac{2P\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)}{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^2 - \frac{R_1}{R_2}\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^2}.$$

Für **Kettenflaschenzüge** ist der Wirkungsgrad annähernd:

$$\eta = \frac{1 - \frac{\xi}{2}}{1 + \xi \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}}.$$

Hiernach ergiebt sich für $\xi = 0{,}06$ (Ketten) folgende Angabe:

Für: $\frac{R_1}{R_2} =$	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{14}{15}$
ist: $\eta =$	0,51	0,41	0,35.

Bei genauerer Rechnung ergiebt sich (übereinstimmend mit den Ausführungen) der Wirkungsgrad noch etwa um 6% geringer.

Bedingung für die **Selbsthemmung** des Flaschenzuges:

$$\frac{R_1}{R_2} \geq \frac{\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^2} \quad \text{oder annähernd:} \quad \frac{R_1}{R_2} \geq \frac{1 - \xi}{1 + \xi}.$$

Als unterster Grenzwert für die leichtesten Züge findet sich $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{8}$. Die kalibrierten Ketten sind möglichst schwach zu belasten, da sonst störende Dehnungen in den Gliedern auftreten. Voll belastete Differential-Flaschenzüge werden durch starken Verschleifs bei häufiger Benutzung schnell unbrauchbar.

C. Unmittelbar wirkende Winden.

a. Zahnstangenwinde.

Verwendung als Wagenwinden, Schützenaufzüge, Zugwinden über schweren Arbeitsmaschinen. Windegestelle in neuerer Zeit aus schmiedbarem Gufs oder Stahlgufs. Lasten 2000 bis 20000 kg. Einfaches bezw. doppeltes Rädervorgelege (über 3000 kg Last). Uebersetzungsverhältnisse $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{7}$. Zähnezahl der Trieblinge vier, selten drei. Höhe der Wagenwinde 0,8 m, Hubhöhe 0,25 bis 0,5 m. Wirkungsgrad $\eta = 0{,}4$ bis 0,6 (je nach Zahl der Vorgelege und Zähnezahl der Trieblinge). Starker Verschleifs bei weitgehendster Steigerung der Materialspannung bis $k = 1500$ kg f. d. qcm mit Rücksicht auf die geforderten kleinen Abmessungen.

b. Schraubenwinde mit Schraubenspindel.

(Vergl. S. 210.)

$r =$ mittlerer Halbmesser des Gewindes,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 \pi r}$ mittleres Steigungsverhältnis,

$\mu = \operatorname{tg} \varrho$ Reibungskoefficient des Materials,

$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)}$ Wirkungsgrad der Schraube,

$\frac{h}{2\pi r} = 0{,}04$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,10	0,125
Die Spindel wird gedreht: · · $\eta = 0{,}22$	0,26	0,30	0,33	0,36	0,41	0,46
Die Mutter wird gedreht: · · $\eta = 0{,}15$	0,18	0,21	0,24	0,26	0,30	0,35.

Selbsthemmung gesichert, wenn $\alpha < \varrho$;
α gewöhnlich zwischen 5° und 6°; ($\mu = 0{,}1$ gesetzt).

Spindeldruck im Kern für Stahl oder Feinkorneisen 300 bis 500 kg f. d. qcm. Der Durchmesser ist auf zusammengesetzte (Drehungs- und Druck- bezw. Zug-) Festigkeit zu berechnen. Die Mutterhöhe bestimmt sich aus der zulässigen Spannung der auf Biegung beanspruchten tragenden Gewindegänge, bezw. aus dem zulässigen Flächendruck, wobei der gröfste Wert beizubehalten ist. Zulässige Pressung zwischen Stahl oder Feinkorneisen und Bronze $\leqq 100$ kg f. d. qcm, zwischen Stahl oder Feinkorneisen und Gufseisen $\leqq 60$ kg f. d. qcm.

Windeböcke für Lokomotiven.

Gröfste Last insgesamt 50 t, mithin erhält jede der vier Schraubenwinden 12,5 t. Freie Hubhöhe 1,75 m. Trägerlänge zwischen den Böcken 3,45 m. Antrieb der Schraubenspindel durch Rädervorgelege

c. Schraubenwinde mit Schnecke und Schneckenrad.

In Anwendung für Flaschenzüge und Aufzugswinden mit möglichst ruhigem und geräuschlosem Gang.

Antriebmoment der Schneckenwelle unter Berücksichtigung der Lagerreibung s. S. 404.

Selbsthemmung für $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r} \leqq \frac{1}{10}$, worin h die Ganghöhe der Schnecke, $=$ der Teilung t des Schneckenrades bei eingängiger Schnecke, $= 2t$ bei doppelgängiger Schnecke, r der mittlere Schneckenhalbmesser bis zum Teilkreis des Schneckenrades ist.

Bei Erschütterungen (Fahrstühlen) ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{12}$, hierbei $\eta \leqq 0{,}4$.

Verhältnismäfsiger Arbeitsverlust s. S. 214.

Doppelgängige Schnecken liefern durch Steigerung des Wertes α bis etwa 22° Wirkungsgrade bis 0,60, verlieren aber die Selbsthemmung und bedürfen der Einschaltung von Bremswerken (Beckers Patent-Drucklagerbremse). Zahnteilung t des Schneckenrades mit Rücksicht auf Beschränkung des Flächendruckes und des Verschleifses bestimmt durch die Beziehung

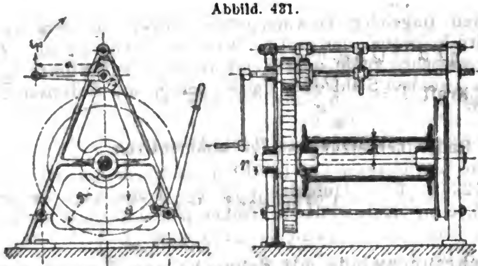
$$P = k b t,$$

wobei die Zahnbreite $b = 1{,}5\,t$. k bei selten gebrauchten Schraubenflaschenzügen mit doppelgängiger Stahlschnecke und gufseisernem Schneckenrade bis 40 kg f. d. qcm, bei eingängigen schweifseisernen Schnecken mit Selbsthemmung und bei seltenem Gebrauch bis 30 kg f. d. qcm, bei anhaltender Benutzung und grofser Umdrehungszahl, sowie bei Aufzügen mit Riemenbetrieb $k \leq 12$ kg f. d. qcm; nicht selten, wenn auch unter nachteiligem Verschleifs, $k = 20$ kg f. d. qcm und mehr.

(Hiernach die Angaben auf S. 404 zu ergänzen.)

D. Räder-Winden.*)

Abbild. 481.



a. Seil-Trommeln.

Es bezeichne:

R den Trommelhalbmesser, | r den Zapfenhalbmesser, alles in cm,
d die Seilstärke, | μ_1 den Zapfenreibungs-Koefficienten.

Wirkungsgrad (ohne das Vorgelege) $\eta = \dfrac{1}{1 + 0{,}09\,\dfrac{d^2}{R} + \dfrac{\mu_1 r}{R}}$.

Ist z. B. für Hanfseile $R = 6\,d$, $r = d$, $\mu_1 = 0{,}08$, so wird:

$$\eta = \frac{1}{1{,}013 + 0{,}015\,d}.$$

$d =$ 1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0 cm
$\eta =$ 0,97	0,965	0,96	0,95	0,945	0,94	0,93	0,925	0,92

Berechnung der Seile und Ketten, Verhältnis des Trommelhalbmessers zur Seil- und Kettenstärke s. S. 442 u. f., 459 u. f.

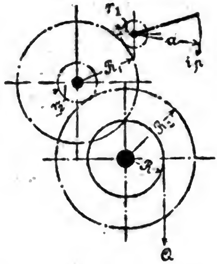
---

*) Nach Riedler.

b. Räder-Vorgelege.

Es bezeichne (Abbild. 432):

Abbild. 432.



i die Zahl der Arbeiter,
p die Kraft eines Arbeiters,
P die Kurbelkraft $= ip$,
a den Kurbelarm,
c die Kurbelgeschwindigkeit,
Q die Last,
v die Lastgeschwindigkeit,
$u = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdots$ die Räderübersetzung,
η den Gesamtwirkungsgrad.

Aus:

$\eta P a = Q R u$ folgt:

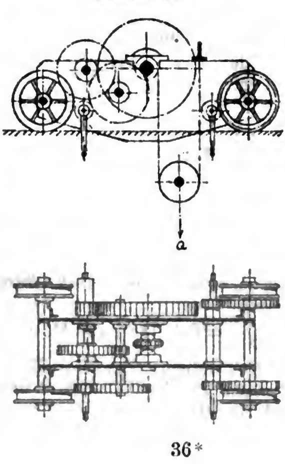
$$\textbf{Kraft}\ P = \frac{1}{\eta}\frac{QR}{a}u \text{ oder } \textbf{Last}\ Q = \eta\frac{Pa}{Ru} \text{ oder}$$

$$\textbf{Räderübersetzung}\ u = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdots = \eta\frac{Pa}{QR}.$$

1. Für Handantrieb

ist $i = 1$, 2 oder 4; $p = 15$ kg für 8-stündige Arbeitszeit, $c = 0{,}8$ bis 1 m i. d. Sek.; $a = 35$ bis 40 cm, Kurbelwelle 1 m über Fufsboden.

Abbild. 433.



Vorgelege: 2 höchstens 3, sonst Einschaltung von Rollen und Flaschenzügen zwischen Last und Trommel. Gröfste Einzel-Uebersetzung = 1 : 8. Uebersetzung von der Kurbel zur Trommel abnehmend, um die Radgröfsen möglichst zu vermindern; bei mehreren Vorgelegen das erste ausrückbar, um kleinere Lasten rascher heben zu können.

Kleinste Zähnezahl $z = 10$; Zahnteilung t aus Zahndruck $D = kbt$ (vergl. S. 400 u. f.), Zahnbreite $b = 2t$. Wirkungsgrad $\eta \sim 0{,}92$ für jedes Vorgelege unter Berücksichtigung der Zahn- und Zapfenreibung.

Ausführung: Standwinden Abbild. 431, Laufwinden Abbild. 433.

2. Für Maschinenantrieb
(durch Riemen, Seile, Wellen oder Motoren):

Gröfste Einzel-Uebersetzung $= 1 : 10$, Antriebskraft so grofs, dafs nur zwei Vorgelege notwendig, kleinste Zähnezahl $z = 20$, Zahnbreite $b = 2{,}5\,t$. Berechnung der Laufvorrichtung s. Laufkrane. Lasthebung mit $v = 0{,}1$ m i. d. Sek. für grofse, bis $v = 0{,}5$ m i. d. Sek. für kleine Lasten.

c. Sicherheitsvorrichtungen.

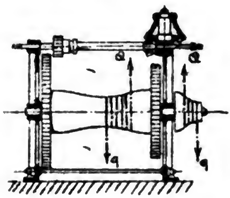
Sperrräder s. S. 464, Bremsen s. S. 465 u. f.; Bremskraft am Hebel < 40 kg. Hebellänge < 1 m.

Im Mittel ist:

$$\frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \begin{cases} = 0{,}75 & \text{für Stahlband auf eiserner Scheibe,} \\ = 0{,}5 & \text{für Holzfutter.} \end{cases}$$

d. Kegelförmige Reibungs-Trommeln.

Abbild. 434.



Es bezeichnet:

Q die Last,
q die Spannung des ablaufenden Seiles,
μ_0 den Reibungskoefficienten der Ruhe, zwischen Seil und Trommel,
e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= 2{,}71828$; $\log e = 0{,}434$,
α den vom Seil umspannten Bogen.

Seil oder Kette wird nicht aufgewickelt, sondern umgeschlungen, gleitet nach dem kleinen Halbmesser der Trommel ab und mufs ablaufen mit der

$$\textbf{Endspannung}\ q = \frac{Q}{e^{\mu_0 \alpha}} = \frac{Q}{e^{\mu_0 n 2\pi}} \text{ (vergl. S. 214).}$$

$$\text{Anzahl der Wicklungen } n = \frac{\log \frac{Q}{q}}{2\,\mu_0 \pi \log e}.$$

Für $\mu_0 = 0{,}25$ (Seil auf Eisentrommeln) wird: $n = 1{,}46 \log \frac{Q}{q}$,

$\mu_0 = 0{,}4$ (Seil auf Holztrommeln): . . $n = 0{,}91 \log \frac{Q}{q}$.

Anwendung: Schiffswinden. Abgleiten des Seiles nach dem kleinsten Trommelhalbmesser unter Belastung erzeugt grofse Reibung und Abnutzung; diese sind verhütet durch

e. Cylindrische Reibungs-Trommeln (Abbild. 435),

von denen eine oder beide durch eine Gesamt-Uebersetzung u angetrieben werden.

Wird nur eine Trommel angetrieben, so ist: $\alpha = n\pi$;
werden beide Trommeln angetrieben, so ist: $\alpha = 2\,n_1\pi$.

Für $\mu_0 = 0{,}25$ und $\frac{Q}{q} = 200 \quad 100 \quad 50 \quad 25$ wird:

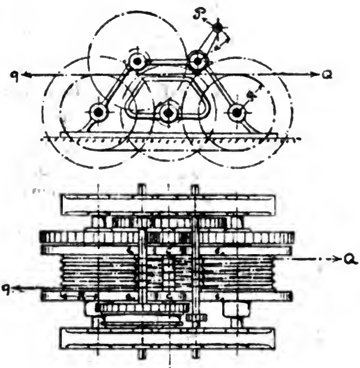
$n = 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4$ und $n_1 = \frac{n}{2}$.

Kraftberechnung: $P = \frac{1}{\eta} \frac{(Q-q)R}{a} u.$

Belastung der Trommelzapfen durch die Summe aller Seilspannungen sehr grofs. Zu deren Auffangung und zur Verhütung der grofsen Zapfenreibung werden Entlastungsrollen c zwischen die Trommelränder $e_1\,e_1$ gelegt, welche nur rollende Reibung hervorrufen. Dann ist der Wirkungsgrad der Trommeln ebenso zu berechnen wie bei den Seiltrommeln (S. 554).

Aufserdem ist jedes der Rädervorgelege mit 8% Arbeitsverlust zu berücksichtigen.

Abbild. 435.



Anwendung: Schachtwinden, Schiffswinden, Kettenschiffe.

E. Krane.*)

a. Drehkrane.

1. Drehkrane mit beweglicher Säule.

(Abbild. 436 und 437.)

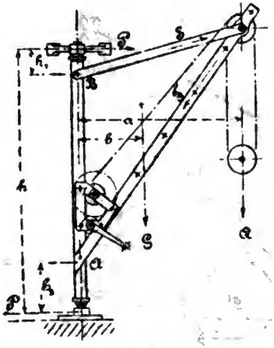
Es bezeichnet:

Q die Last, Q_1 den Zug in der Lastkette,
G das Eigengewicht des Kranes (mit Kette und Rollen),

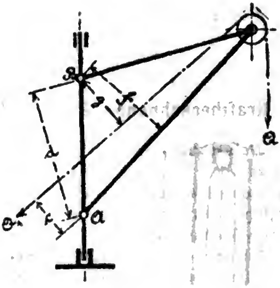
*) Nach Riedler.

a, b, h, h_1 und h_2 die Hebelarme (Abbild. 436),
d und c die Hebelarme der Schliefse bezw. der Lastkette in bezug auf den Drehpunkt A (Abbild. 437),
f und g die Hebelarme der Strebe bezw. der Lastkette in bezug auf den Drehpunkt B (Abbild. 437).

Abbild. 436.



Abbild. 437.



Wagerechter Zapfendruck:

$$P = Q\frac{a}{h} + G\frac{b}{h}$$

(meistens ist annähernd $h = a$, $b = 0{,}25\,a$, $G = Q$, dann $P = 1{,}25\,Q$).

Lotrechter Zapfendruck:

$V = Q + G$ (meist annähernd $= 2\,Q$).

Schliefse. Zugkraft darin:

$$S = Q\frac{a}{d} + G\frac{b}{d} - Q_1\frac{c}{d},$$

(Rund- oder Flacheisen) $k_z = 600$ kg f. d. qcm.

Strebe. Druckkraft darin:

$$T = Q\frac{a}{f} + G\frac{b}{f} + Q_1\frac{g}{f},$$

(Holz oder Walzeisen) 5- bis 8-fache Sicherheit gegen Bruch.

Säule. Biegungsmomente in der Säule: Ph_1 bezw. Ph_2. Aufserdem Druckbeanspruchung durch $Q + G$ im unteren Teile. Genaue Berechnung auf zusammengesetzte Beanspruchung (Holz oder Walzeisen), 5-fache Sicherheit gegen Bruch.

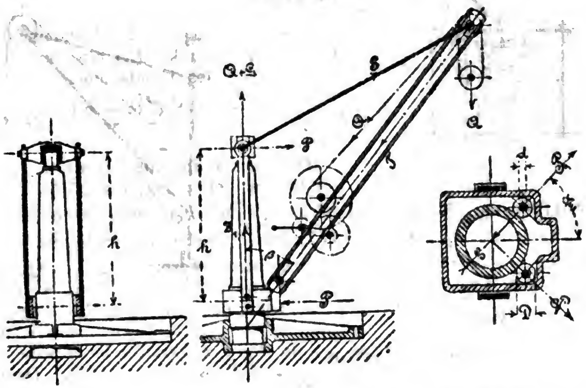
2. Drehkrane mit feststehender Säule.

Berechnung der Zapfen, Schliefse und Strebe wie oben.

Säule. Auf Biegungsfestigkeit zu berechnen, im untersten Teile für das Angriffsmoment $Ph = Wk_b$ (Widerstandsmoment W vergl. S. 323, auch S. 421 u. 422).

Aufserdem Druckbeanspruchung durch $Q + G$. Genaue Berechnung auf zusammengesetzte Beanspruchung.

Abbild. 438.



Querhaupt zu berechnen auf Biegung für die Mittelkraft von $-P$ (nach links gerichtet) und $Q + G$, die als Gegendruck des Zapfens in der Mitte angreift. Für Gufseisen $k_b = 300$, Schweifseisen oder Stahlgufs $k_b = 600$ kg f. d. qcm.

Rollenlager (für zwei Druckrollen unter dem Winkel $\frac{1}{2}\alpha$) Abbild. 438.

Druck auf die Rolle: $P_1 = \dfrac{P}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}$.

Ist: ϱ der Halbmesser des Säulenzapfens, D der Durchmesser der Druckrollen, d der der Zapfen, μ_1 der Koefficient der Zapfenreibung, f der Hebelarm der rollenden Reibung, so gilt:

Widerstand einer Rolle in deren Mittelpunkt: $R = \dfrac{P}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}\left(\mu_1 \dfrac{d}{D} + \dfrac{2f}{D}\right)$.

Beitrag von den Druckrollen zu dem der Drehung des Kranes widerstehenden Moment $= 2R(\varrho + \frac{1}{2}D)$.

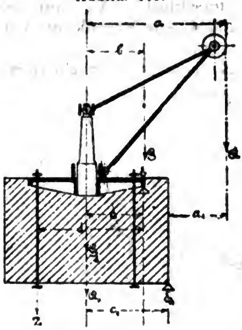
Meistens ist $\mu_1 = 0{,}1$, $f = 0{,}05$ cm, $\dfrac{d}{D} = \dfrac{1}{5}$.

Fundament. Es bezeichnet:

G das Eigengewicht der überhängenden Teile des Kranes,

G_0 das Eigengewicht der centrischen Teile einschl. Fundamentplatte.

Abbild. 439.



Aus der Gleichsetzung der Momente für den Drehpunkt E:

$$Q(a-c)+G(b-c)=G_0 c+Zd$$

folgt der Zug in den Fundamentschrauben:

$$Z=\frac{Q(a-c)+G(b-c)-G_0 c}{d}.$$

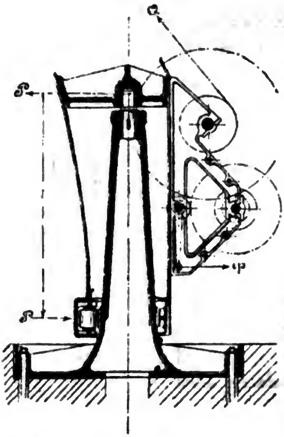
Die Standfähigkeit des Fundaments (für den Drehpunkt E_1) erfordert ein Eigengewicht des Fundaments:

$$Q_0=\frac{Q(a-c_1)+G(b-c_1)}{c_1}-G_0.$$

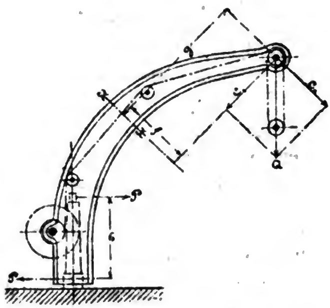
Das auszuführende Gewicht des Fundaments ist $=2\,Q_0$ bis $2{,}5\,Q_0$.

Ausführung. Säule aus Gufseisen, hohl: $k_b=400$, geschmiedet oder Stahlgufs: $k_b=800$ kg f. d. qcm. Strebe und Schliefse aus Walzeisen, 5- bis 8-fache Bruchsicherheit. Verbindung des Querhauptes mit dem Rollenlager durch zwei Gufseisenschilde, welche zugleich das Lastwindwerk tragen, oder nur durch Zugschienen (Abbild. 438). Zugkraft in jeder Schiene $Z_1=\frac{1}{2}\,T\cos\beta$ (T s. S. 558). Dann Windwerk auf der Strebe, letztere aus zwei Walzeisen bestehend.

Abbild. 440.



Abbild. 441.

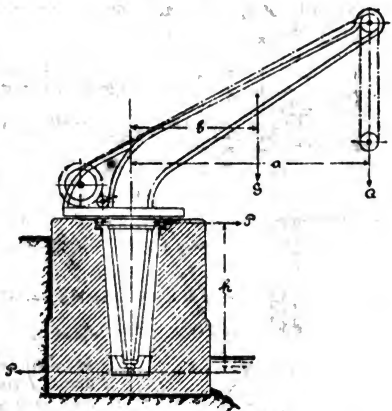


Für Verladekrane auf Rampen, auch mit Rücksicht auf die Gröfse der Ladestücke, sehr häufig statt Strebe und Schliefse ein gekrümmter Blechträger (Abbild. 440 und 441).

Angenäherte Berechnung des Normalquerschnittes XX auf zusammengesetzte Festigkeit u. zw., wenn C_1 und C_2 die Seitenkräfte von Q sind, für die Druckkraft C_1 und die Biegungsmomente $C_1 f$ und $C_2 g$.

Für Lasten über 10 t sind Säulen mit Kreisquerschnitt schwierig ausführbar; dann freistehende Krane als Schachtkrane auszuführen.

Abbild. 442.



3. Schachtkrane.

(Fairbairn-Krane.)

Wagerechte Schubkräfte (Abbild. 442):

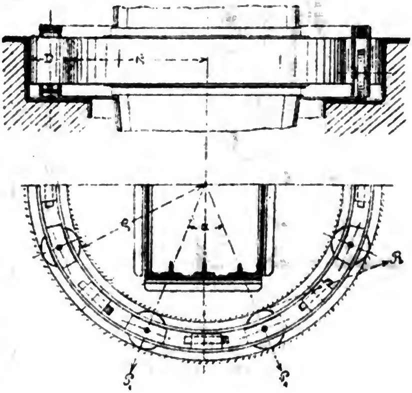
$$P = Q\frac{a}{h} + G\frac{b}{h}.$$

Angenäherte Berechnung der Trägerquerschnitte wie früher. Berechnung der Kransäule im Rollenlager auf zusammengesetzte Beanspruchung: Druckkraft $Q + G$ und Biegungsmoment Ph. h meist annähernd 0,5 a.

Wälzungs-Rollenlager

(Abbild. 443).

Abbild. 443.



Für zwei belastete Druckrollen ist der Rollendruck:

$$P_1 = \frac{P}{2\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

der Widerstand an einem Rollenumfang:

$$R = \frac{P}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\frac{f}{D},$$

meist f (Hebelarm der rollenden Reibung) $= 0{,}05$ cm.

Beitrag zu dem der Drehung des Kranes widerstehenden Momente $= 2R\varrho$.

4. Drehkrane mit Laufwagen. (Abbild. 444.)

Säule, Zapfen, Strebe wie unter 1. S. 557.

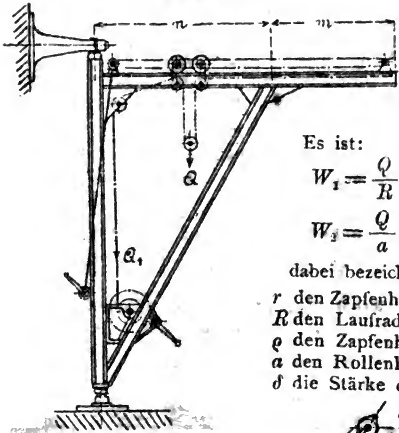
Ausleger auf Biegung zu berechnen für das Moment Qm und $\frac{1}{4}Qn$; dabei genügt es, abweichend von Abbild. 444, m bis Mitte Laufwagen in seiner äufsersten Stellung rechts zu rechnen.

Verschiebung des Laufwagens durch Zugkette und Windwerk; erforderliche Zugkraft am Laufwagen

$$W = W_1 + W_2,$$

worin W_1 den Widerstand des Laufwagens selbst, W_2 denjenigen der Kettenleitung bedeutet.

Abbild. 444.



Es ist:

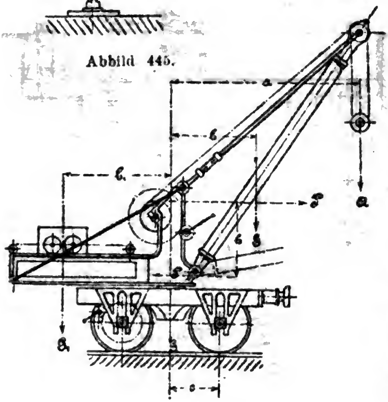
$$W_1 = \frac{Q}{R}(f + \mu_1 r),$$

$$W_2 = \frac{Q}{a}(0{,}375\,\delta + 2{,}4\,\mu_1\,\varrho);$$

dabei bezeichnet:

r den Zapfenhalbmesser am Laufwagen,
R den Laufradhalbmesser,
ϱ den Zapfenhalbmesser der Rollen,
a den Rollenhalbmesser,
δ die Stärke des Ketteneisens,
$\mu_1 = 0{,}1$ den Koefficienten der Zapfenreibung,
$f = 0{,}05$ cm den Hebelarm der rollenden Reibung.

Abbild. 445.



b. Fahrbare Krane.

1. Fahrbare Drehkrane.

(Abbild. 445.)

Berechnung der einzelnen Teile wie unter **a.**

Gegengewicht: am zweckmäfsigsten so grofs, dafs die Säule bei beladenem und bei unbeladenem Kran gleich beansprucht wird.

Bei voller Last: $Ph = Qa + Gb - G_1 b_1$;
unbeladen: $P_1 h = G_1 b_1 - Gb$; für $P = P_1$ folgt hieraus

das Gegengewicht: $G_1 = \frac{Qa}{2 b_1} + G \frac{b}{b_1}$.

Im Mittel ist:

$$a = 4 \text{ m}, \quad b = 1 \text{ m}, \quad b_1 = 3 \text{ m}.$$
$$G = 0{,}75\, Q, \text{ daher } G_1 \sim 0{,}9\, Q.$$

G_1 wird jedoch meist kleiner (für unvollständige Ausgleichung) ausgeführt.

Das Gegengewicht kann für kleinere Lasten verschiebbar eingerichtet werden (Abbild. 445); Handhabung aber zu umständlich.

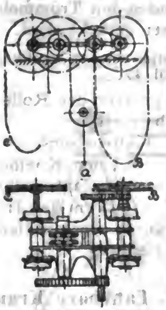
Die **Standfähigkeit** fordert:

$$Q(a - c) + G(b - c) - G_0 c - G_1 (b_1 + c) < 0 \text{ belastet,}$$
$$G_1 (b_1 - c) - G_0 c - G(b + c) < 0 \text{ unbelastet.}$$

G_0 = Eigengewicht des Wagens, $2c$ = Radstand. Ist die Spurweite kleiner, so ist diese für $2c$ in die Gleichung einzuführen.

Bei Eisenbahnkranen muſs die Strebe durch Lösen der Schlieſse zum Niederlegen eingerichtet sein.

Abbild. 446.

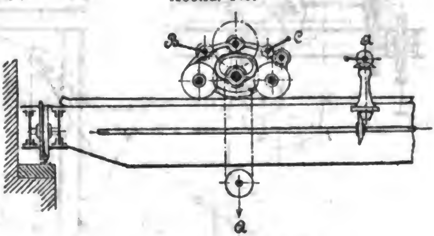


2. Laufkrane. (Abbild. 448, 449 und 450.)

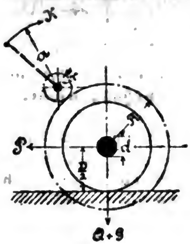
Berechnung des eigentlichen Windwerks wie oben.

Widerstand P beim Verschieben des Kranes (Abbild. 447) ergiebt sich aus:

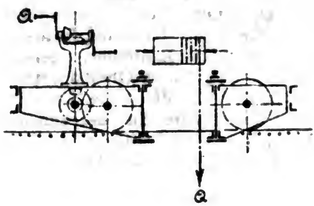
Abbild. 448.



Abbild. 447.



Abbild. 449.



$$P\frac{D}{2} = \mu_1 (Q+G)\frac{d}{2} + (Q+G)f;$$

$G =$ gesamtes Eigengewicht des Kranes;

$\mu_1 = 0{,}1$; $f = 0{,}05$ cm.

Vorgelege-Uebersetzung:

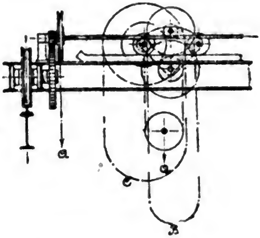
$$\frac{R}{r} = \frac{(Q+G)\left(\mu_1 \frac{d}{2} + f\right)}{0{,}9\,Ka}.$$

Ausführung: Träger mit Vorrichtung A zum Bewegen des ganzen Kranes (Abbild. 448, 449 und 450), auf welchem eine Laufwinde quer verschiebbar. Antrieb von unten durch endlose Ketten (Abbild. 446 und 450), oder Antrieb aller Windwerke oben von Laufbühnen aus (Abbild. 448 und 449). Hierbei B Antrieb für Lasthebung, C für Querbewegung der Laufwinde (Abbild. 446, 448, 449 u. 450).

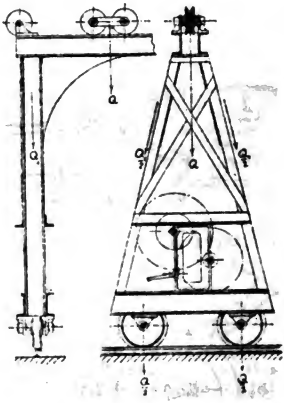
3. Rollgerüste (Abbild. 451).

Trägerberechnung: Jeder der beiden Träger für die Belastung $0{,}5\,Q$ bezw. für $\sim 0{,}8\,Q$, wenn die Last (bei Laufwinden mit Trommeln) durch die Trommelwicklungen einem Träger näher gerückt wird.

Abbild. 450.



Abbild. 451.



Streben je für die Druckkraft $0{,}5\,Q_1$, unter der Annahme, dafs die volle Last am Gerüstende wirkt. Laufräder, deren Achsen und Gleise-Oberbau sind gleichfalls für die volle Last Q auf einer Seite zu berechnen. Bei gegebener Festigkeit des Oberbaues ist die Radbelastung auf mehrere Räder durch Ausgleichhebel zu verteilen.

c. Feste Gerüste.

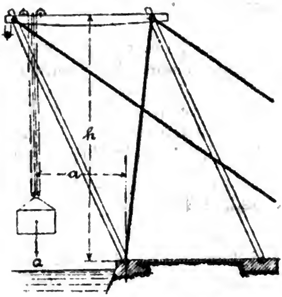
Gerüste mit drei festen Füfsen (Abbild. 453).

Verladegerüste mit vier Füfsen und Laufwagenträger (wie Abbild. 450 ohne Rollräder).

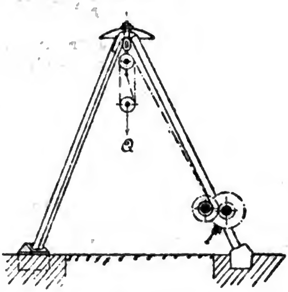
Verladegerüste mit überhängendem Träger (Abbild. 452).

Mastenkrane wie Abbild. 455 ohne Wippvorrichtung.

Abbild. 452.

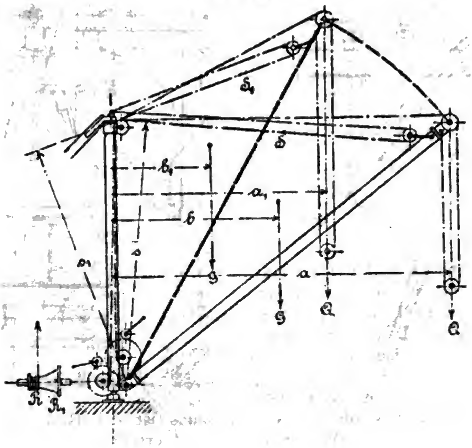


Abbild. 453.



d. Krane mit schwingender Strebe. (Abbild. 454.)

Abbild. 454.



1. Drehkrane.

Bezeichnet (Abbild. 454 a. S. 565):

S und S_1 die Zugkraft für Wippen bei Beginn und zu Ende des Wippens,
s und s_1 deren Hebelarme für den Drehpunkt der Strebe,
Q die Last; Hebelarme a und a_1,
G das Eigengewicht der Strebe; Hebelarme b und b_1,
Q_1 den Zug in der Lastkette; Hebelarme c und c_1,

so ist:

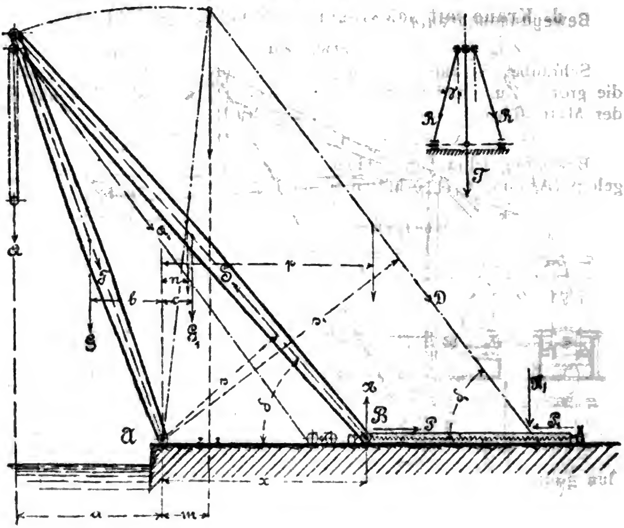
$$S = \frac{1}{2}\left(Q\frac{a}{s} + G\frac{b}{s} - Q_1\frac{c}{s}\right);$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(Q\frac{a_1}{s_1} + G\frac{b_1}{s_1} - Q_1\frac{c_1}{s_1}\right).$$

Windentrommel für Wippen des Auslegers mit abnehmendem Halbmesser, so dafs Anfangsmoment = Endmoment, $SR = S_1 R_1$ wird, wobei R und R_1 Trommelhalbmesser (Abbild. 454).

2. Scherenkrane. (Abbild. 455.)

Abbild. 455.



G_1 = Gewicht des Auslegers, G = Gewicht der beiden Streben, T = Mittelkraft der beiden Strebenkräfte R, t = Hebelarm von T für den Drehpunkt B bei ausgelegtem Kran, d = Hebelarm des Kettenzuges Q_1 für den Drehpunkt A, d_1 desgl. für B, beides bei ausgelegtem Kran, q = Hebelarm von Q_1 für A bei eingezogenem Kran. Die übrigen Bezeichnungen s. Abbild. 455.

Zug im Ausleger (am unteren Ende) aus der Momentengleichung für den Drehpunkt A:

$$S = Q\frac{a}{s} + G\frac{b}{s} \pm G_1\frac{c}{s} - Q_1\frac{d}{s}. \quad \text{(Kran ausgelegt.)}$$

Druck im Ausleger (am unteren Ende):

$$D = Q\frac{m}{s_1} + G\frac{n}{s_1} + G\frac{p}{s_1} + Q_1\frac{q}{s_1}. \quad \text{(Kran eingezogen.)}$$

Druck in jeder der beiden Streben (am unteren Ende):

$$R = \frac{T}{2\cos\gamma}.$$

Hierbei aus der Momentengleichung für den Drehpunkt B:

$$T_{\max} = Q\frac{x+a}{t} + G\frac{x+b}{t} + G_1\frac{x \pm c}{t} + Q_1\frac{d_1}{t}.$$

(Kran ausgelegt.)

Bewegungsschraube:

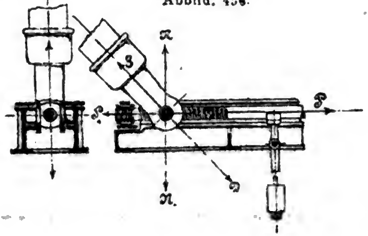
Zug $P = S\cos\delta$ bezw. Druck $P_1 = D\cos\delta_1$.

Schraube, Schraubenreibung und Kammlager (Abbild. 456) für die gröfste Zug- und Druckkraft zu berechnen, aufserdem Reibung in der Mutterführung durch den Führungsdruck:

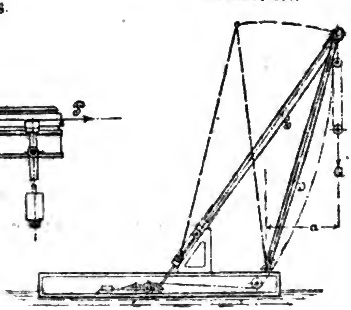
$$N = S\sin\delta \text{ bezw. } N_1 = D\sin\delta_1.$$

Bewegungsschrauben, schief in die Mittellage des Auslegers gelegt (Abbild. 457), erhalten wesentlich geringere Länge.

Abbild. 456.



Abbild. 457.

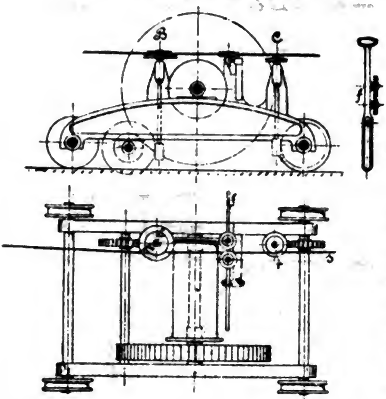


F. Krane mit Maschinenantrieb.

a. Krane mit Seilantrieb.

1. **Aeltere Anordnung** mit sehr rasch laufenden (Baumwoll-) Seilen ($v = 25$ bis 30 m i. d. Sek.) und kleinen Antriebscheiben (300 bis 400 mm Durchmesser) mit hoher Umdrehungszahl (1000 bis 2000 i. d. Min.). Gesamtübersetzung für Lasthebung bis 1 : 3000 durch Schnecken und Zahnräder. Wirkungsgrad, infolge der grofsen Uebersetzung, $\eta < 0{,}25$.

Abbild. 458.



Seilantrieb:

1) durch frei bewegliches Seil *s* (Abbild. 458), welches durch ein Führungsstück *f* vom Maschinisten an die Triebrollen r, r_1, r_2 nach Bedarf angeprefst wird. Wechselbewegung durch Andrücken des Seiles an entgegengesetzte Seiten der Triebrollen; verschiedene Lastgeschwindigkeiten durch Triebrollen von ungleichem Halbmesser r_1, r_2. Wegen scharfer Abbiegung der Seile sind nur weiche Baumwollseile von weniger als 12 mm Stärke und weniger Beanspruchung als 15 kg f. d. qcm zulässig.

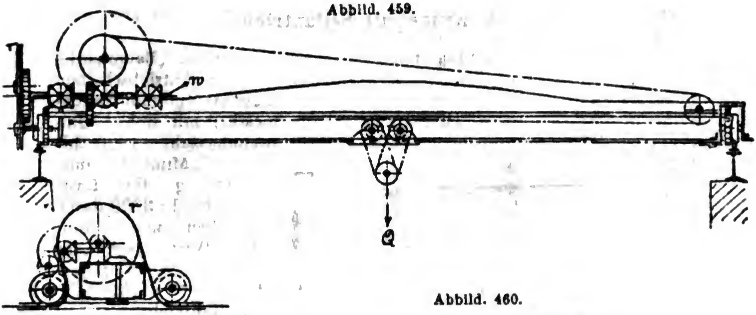
2) Seilantrieb durch beständig umlaufende Seilrollen (wie Abbild. 460, S. 569) und Wellen mit Reibungskupplungen.

2. **Neuere Anordnung** (Ansicht und Querschnitt Abbild. 459, ferner Abbild. 460 u. 461) mit mäfsig rasch laufenden Baumwoll- oder Hanfseilen ($v = 8$ bis 12 m i. d. Sek.) mit grofsen Antriebscheiben r (Durchmesser $= 0{,}8$ bis 1 m) und Zahnradübersetzung auf eine Welle w mit Reibungskupplungen zur weiteren Uebersetzung auf die einzelnen Windwerke ohne Schneckenräder. Wirkungsgrad η bis 0,4.

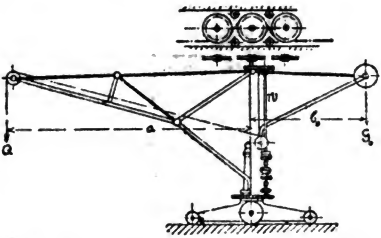
Geschwindigkeit für Lastheben $v = 0{,}5$ bis 1 m i. d. Min. (für Lasten über 10 t), meist mit stellbaren Vorgelegen für kleinere Lasten und für Lastsenken ($v = 1{,}5$ bis 2,5 m i. d. Min.). Verschiebung des Kranes oder der Laufwinde 2,5 bis 10 m i. d. Min.

Seilspannung für die Treibscheibe: $T > \frac{e^{\mu_0 \alpha}}{e^{\mu_0 \alpha} - 1} P,$

Abbild. 459.



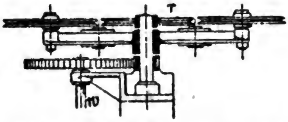
Abbild. 460.



worin P die am Treibscheibenumfang erforderliche Tangentialkraft bedeutet; für neuere Ausführungen nach Abbild. 459 umspannter Bogen $\alpha = \pi$, $\mu_0 = 0,2$ bis $0,4$ bei keilförmiger Klemmung des Seiles in den Treibrollen, mithin

$T > 2,2\,P$ bis $T > 1,4\,P$.

Abbild. 461.



Anspannung des Seiles durch bewegliche Gewichte $= 1,5\ T$. Seilbeanspruchung 15 bis 20 kg f. d. qcm. Seilscheibendurchmesser > 30-fache Seildicke. Seilführungen in 4 bis 5 m Entfernung.

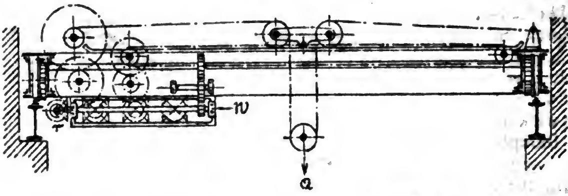
Ausführung für Laufkrane Abbild. 459, für Drehkrane mit eingleisiger Fahrbahn und oberer Rollenführung Abbild. 460 und 461.

b. Krane mit Wellenantrieb.

1. Laufkrane: Antriebwelle mit 80 bis 120 minutl. Umdrehungen laufend, vierkantig mit eingedrehten Halslagern. Wellenunterstützung in Entfernungen von 3 m durch Pendellager (Abbild. 463) oder durch Doppellager (Abbild. 464), welche durch einen Mitnehmer g am Antriebrad verdrängt werden und durch Gegengewichte sich

hinter dem Abweiser wieder aufrichten, oder durch den Mitnehmer eingeknickt werden. Uebertragung vom Antriebrad r auf eine Welle W (Abbild. 462) mit so vielen Reibungskupplungen, als Bewegungen auf die einzelnen Windwerke zu übertragen sind. Gesamter Wirkungsgrad $\eta = 0{,}4$ bis $0{,}5$.

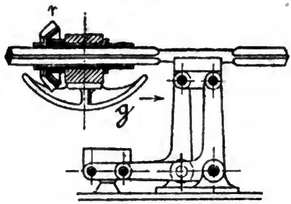
Abbild. 462.



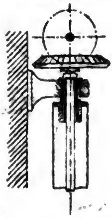
Abbild. 463.



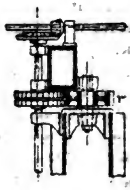
Abbild. 464.



Abbild. 465.

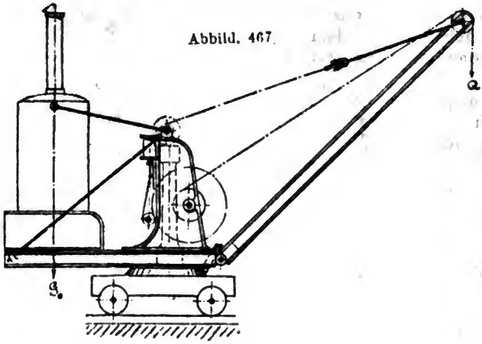


Abbild. 466.



2. Drehkrane: Die Einleitung der Bewegung erfolgt von der Welle aus durch den hohlen Kranzapfen (Abbild. 465) oder durch Umführung um den Drehzapfen (Abbild. 466), wobei das Doppelrad r auf der Kransäule lose drehbar ist.

Abbild. 467.



c. Dampfkrane.

Der Dampfkessel ist auf dem Krangerüst angebracht und kann als Gegengewicht dienen. (Stehende Röhrenkessel, 4 bis 6 Atm. Ueberdruck.)

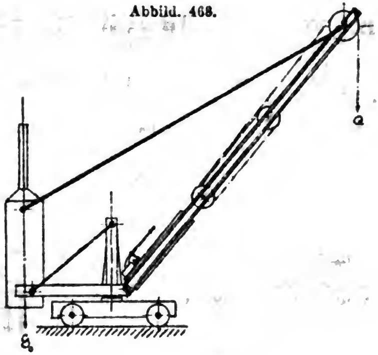
Aufstellungsarten. **1.** Es ist eine gewöhnliche **Zwillingsdampfmaschine mit Kurbelwelle** ($n = 80$ bis 150 i. d. Min.) angeordnet, von welcher die Bewegung auf die einzelnen Windwerke durch Kupplungen übertragen wird.

Anwendung bei feststehenden und fahrbaren Drehkranen (Abbild 467), seltener bei grofsen Roll- und Laufkranen.

Lastgeschwindigkeiten wie bei Seilkranen. (Vergl. S. 568).

2. Für die Lasthebung u. s. w. sind **unmittelbar wirkende (Hub-) Dampfmaschinen** angebracht (Abbild. 468), deren Kolbenhub durch Flaschenzugübersetzung vergröfsert wird. Lastsenkung bei Drosslung des Dampfauspuffes.

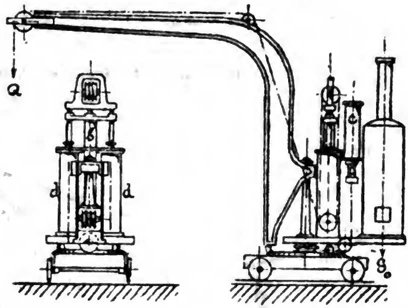
Abbild. 468.



Anwendung für Verlade- und Bau-Krane, bei sehr grofsen Lastgeschwindigkeiten $v = 1$ bis 2 m i. d. Sek., aber Lasten unter 2 t.

Anwendung nach Brown für Verladekrane (Abbild. 469) mit Wasserdruck-Bremscylinder *b* zwischen zwei Dampfcylindern *d* für die Lastbewegung; das Senken und Festhalten der Last unabhängig von der Kondensation des Dampfes durch Wasserdrosslung sicher zu bewirken. Aufserdem ein doppelt wirkender Dampf- (Hub-) Cylinder *c* für Drehung des Kranes mit Zugkette und fester Kettenrolle auf der Kransäule.

Abbild. 469.



III. WASSERDRUCK-HEBEMASCHINEN.*)

A. Handbetrieb.

Mit kleiner Druckpumpe nur bei tragbaren, einfach wirkenden **Wasserdruck-Hebeböcken.**

$$\text{Betriebskraft } P = \frac{b}{a} \frac{d^2}{D^2} \frac{Q}{\eta},$$

worin

a und b die Hebelarme des Arbeiters und des Pumpenkolbens,
d und D die Durchmesser des Pumpen- und Lastkolbens,
Q die Last,
η den Wirkungsgrad bezeichnet.

P bis 50 kg bei kurzer Arbeitsdauer, für starke Uebersetzung: $d \geqq 2$ cm, $b \geqq 3$ cm, $a \lesseqgtr 50$ cm, $\eta = 0{,}75$. Tragfähigkeit der Wasserdruck-Hebeböcke 30 bis 60000 kg bei 25 bis 30 cm Hub.

B. Maschinenbetrieb.

a. Betrieb aus Druckbehältern

im Bodenraum bei 15 bis 20 m Druckhöhe: für kleinen Betrieb und für Entnahme des Druckwassers aus **städtischen Wasserleitungen**, um die gefährlichen Druckschwankungen zu verhüten, welche bei unmittelbarer Entnahme des Druckwassers durch plötzliche Abstellung der Zuleitung entstehen. Inhalt möglichst grofs, um das Füllen in gröfseren Zeitabschnitten regelmäfsig bewirken zu können.

b. Betrieb mit Kraftsammlern (Akkumulatoren).

Ermöglicht hohen Wasserdruck (bewährt 40 bis 50 Atm., ausgeführt bis 70 Atm.), geringe Abmessungen der Rohrleitungen und Hebezeuge neben geringem Wasserverbrauch; die hydraulischen Widerstände wachsen unbedeutend, wohl aber die Reibungswiderstände in den beweglichen Dichtungen (Stopfbüchsen u. s. w.). Die Schwierigkeiten dieser Dichtungen bestimmen die obere Grenze.

---

*) Nach Ad. Ernst und Riedler.

1. Kraftsammler (Akkumulatoren)

sind möglichst nahe den Druckpumpen aufzustellen. In langen Rohrleitungen (über 4000 m) werden in fern liegenden Rohrsträngen **Hülfs-Kraftsammler** eingeschaltet; diese sind schwächer als die Haupt-Kraftsammler zu belasten, damit sie sich früher heben und nur bei gröfseren Druckänderungen mitspielen.

Druckwasser-Inhalt: $V \gtreqless$ Summe der Cylinderfüllungen aller voraussichtlich gleichzeitig zu betreibenden Hebewerke. Unter Annahme, dafs Hub- und Senkgeschwindigkeit der Lasten gleich grofs und auch bei stärkstem Betriebe die Pausen gröfser sind als die Förderzeit, genügt: $V = 0{,}33$ des einer Cylinderfüllung sämtlicher Hebewerke entsprechenden Wasserverbrauchs, für kleinere Anlagen gröfser, um geringere Abmessungen der Pumpen zu erhalten.

Berechnung. Gegeben: $V =$ Wasserinhalt, $p =$ erforderlicher Wasser(über)druck in Atm. Für grofse Anlagen wird angenommen: Taucherkolbendurchmesser D bis 60 cm und der Hub $H = 6$ bis 9 m; gerechnet: Kolbengewicht bezw. -belastung $Q = \frac{\pi D^2}{4} p$. Um die Gröfse der Reibung (vergl. S. 202 u. 492) wird p beim Auf- oder Niedergang des Kraftsammlers gröfser bezw. kleiner, daher möglichst zu verringern. Stopfbüchsendichtung durch quadratisch geflochtene Baumwollenpackungen mit stumpfer Stofsfuge. Meist fünf Packungsringe mit versetzter Stofsfuge (vergl. S. 492).

Ausführung. Belastung durch Eisenplatten auf dem Kopf des Taucherkolbens oder durch angehängten Behälter mit Steinfüllung (1 cbm Stein = 1600 bis 2000 kg) oder mit Eisenmasseln (1 cbm = 4000 kg), auch durch einen auf eine Platte gesetzten, gut zu verankernden Mauerklotz. Aufstellung mit feststehendem Kolben und beweglichem Druckcylinder erfordert geringere Höhe, ist aber nachteilig wegen der hängenden und schlechter zugänglichen Stopfbüchse. Für wichtige Anlagen stets Anordnung mit feststehendem Cylinder. Dann Stopfbüchse bei hängender Lasttrommel durch Laternenkopf zugänglich zu machen. Wassercylinder aus Schüssen mit Flanschenverschraubung. Taucherkolben mehrteilig mit Zapfeneingriff der Schüsse und Fugendichtung durch Kupferringe.

Armaturen. Sicherung gegen zu hohes Auffahren durch Anschlag mit Hebelgestänge zur selbstthätigen Abstellung der Druckpumpe; aufserdem ein Sicherheitsventil vor jedem Sammler, sowie Schutz des Sammlers gegen Herabstürzen bei Rohrbrüchen durch ein Rückschlagventil, das sich schliefst, sobald in der Leitung der gewöhnliche Druck durch Rohrbruch verloren geht.*) Bei Gruppen-Sammlern getrennte Absperrung für jeden einzelnen.

---

*) Vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891. Ad. Ernst, Beiträge zur Entwicklung der Hebewerke mit Druckwasserbetrieb.

Sind über ein Rohrnetz mehrere Sammler verteilt, so erfolgt die Abstellung der Pumpe nur von einem Sammler; die übrigen sind leichter belastet, sinken daher später und steigen früher auf und ihr Hub wird nur durch einen über ihnen schwebend aufgehängten Gewichtsring begrenzt.

2. Druckpumpen.

Bezeichnet:

p den Wasserüberdruck vor den Hebewerken in Atm.,

Q_{max} den gröfsten andauernden Wasserverbrauch aller Hebewerke, in cbm i. d. Std.,

η den Wirkungsgrad der Druckwasserleitung,

so ist unter Annahme von 10% Wasserverlust die Pumpenleistung:

$$N = 1{,}1 \frac{1000\, Q_{max}\, 10\, p}{60 \cdot 60 \cdot 75\, \eta} = \frac{11\, Q_{max}\, p}{270\, \eta} \text{ PS.}$$

Die **Dampfkessel** sind hierfür zu berechnen u. zw. mit Rücksicht auf stark wechselnden Dampfverbrauch mit grofser verdampfender Wasseroberfläche.

Dampfmaschine. Zwillingsmaschine, in jeder Stellung sofort angehend; ein selbstthätiges Stellzeug, vom Sammler her, sperrt bei der zulässigen höchsten Lage des letzteren die Dampfeinströmung ab, öffnet gleichzeitig die Entwässerungsventile der Dampfcylinder und setzt umgekehrt beim Sinken des Sammlers die Maschine wieder in Gang. Aufserdem ist eine besondere Vorrichtung erforderlich, durch welche der Expansionsschieber vor dem Wiederanlassen auf Vollfüllung gestellt wird. Bei stark veränderlichem Arbeitsverbrauch Füllung zweckmäfsig durch einen Leistungsregulator zu regeln, vergl. S. 524 u. 532. Sind Gasmotoren als Betriebsmaschinen aufgestellt, so ist der Antriebriemen des Pumpenvorgeleges durch den Sammler ein- und auszurücken.

Druckpumpen unmittelbar mit den Dampfkolbenstangen gekuppelt, meist Differentialpumpen (vergl. S. 600).

3. Druckleitung.

Betriebswasser mufs rein und säurefrei sein, gewöhnlich einem Behälter entnommen, der durch eigene Hülfspumpe mit Filtern gespeist wird.

Einfrieren wird verhütet durch Einbau in frostfreier Tiefe (1 bis 1,5 m), durch Umhüllung mit schlechten Wärmeleitern und durch besondere Heizung. Spiritus, Glycerin oder Salzzusätze sind bedenklicher und erfordern besondere Rückleitung. Letztere ist nur bei schwieriger Wasserbeschaffung lohnend. Bei gröfseren Anlagen ist das Kühlwasser der Oberflächenkondensatoren der Betriebsmaschinen zur Sammlerspeisung verwendbar, bei kleinen Anlagen mit Gasmotoren das Kühlwasser der Gasmaschine.

Gefrierpunkte

von wässerigem Glycerin.*)			von wässerigem Alkohol.**)			
Gewichts-Prozente Glycerin.	Specifisches Gewicht.	Gefrier-punkt. Grad C.	Gewichts-Prozente Alkohol.	Gefrier-punkt. Grad C.	Gewichts-Prozente Alkohol.	Gefrier-punkt. Grad C.
10	1,0245	— 1	2,58	— 1	21,7	— 12
20	1,0498	— 2,5	5,22	— 2	23,8	— 14
30	1,0771	— 6,2	7,36	— 3	26,0	— 16
40	1,1045	— 17,2	9,58	— 4	28,0	— 18
45	1,1183	— 26,2	11,50	— 5	30,0	— 20
50	1,1320	— 32,0	13,27	— 6	33,5	— 24
		unter	16,53	— 8	37,3	— 28
60	1,1582	— 35,0	19,09	— 10	41,2	— 32

Die Druckleitung ist bei grofsen Anlagen als Ringleitung auszuführen, um den Hebewerken von zwei Seiten Druckwasser zuführen und bei Rohrbrüchen Störungen möglichst verhüten zu können

Rohrdurchmesser in m: $d = 2\sqrt{\frac{Q_{max}}{\pi v t}}$, wobei Q_{max} den gröfsten Wasserverbrauch in cbm bedeutet, der in t Sekunden bei v m i. d. Sek. Durchflufsgeschwindigkeit durch die Rohrleitung stattfindet.

$v_{max} \leqq 3$ m i. d. Sek.; mittlere Geschwindigkeit des Tagesverbrauches $v_m \lesseqgtr 0,5$ bis 0,1 m i. d. Sek.

Rohrleitungen aus Gufseisen, stehend gegossen, mit Flanschenverschraubung und eingekapselten Rundgummidichtungen. Bei mangelhafter Lagerung schweifseiserne oder stählerne Rohre (s. S. 477 und 478). Berechnung der Wandstärke s. S. 364, wobei $p_i =$ Betriebsdruck + 5 Atm. zu setzen. $k_z = 180$ kg f. d. qcm bei Gufseisen. Rohre bis 125 mm lichte Weite mit Ovalflanschen und zwei Schrauben. Die einzelnen Rohrstränge erhalten Absperrventile, Entwässerungsvorrichtungen an den tiefsten und Entlüftungsvorrichtungen an den höchsten Stellen der Leitung.

4. Triebwerk-Dichtungen.

Ueber Lederstulp-, Metall- und Baumwoll-Dichtung s. S. 492. Die zugehörigen Stopfbüchseneinsätze gut sichtbar und zugänglich. Zur Stulpauswechslung müssen die Fahrstuhlbühnen, Lastträger, Sammler u. s. w. in angehobener Stellung abgestützt werden können,

---

*) Vergl. Bolley, Handbuch der techn.-chemischen Untersuchungen 1889, S. 911.
**) Vergl. Beilstein, Organ. Chemie Bd. I., 2. Aufl., S. 239.

um den Kolben allein zurücksenken und die Stulpe überstreifen zu können.

U-förmige Manschetten aus drei abgehobelten Riemen zusammengenäht.

Stulpreibung W s. S. 492 und 292. Für Baumwollenpackung ist nach Ernst $\mu = 0{,}038$ bis $0{,}064$, bei 50 Atm. Betriebsdruck und 200 mm Kolbendurchmesser $W = 120$ bis 200 kg.

C. Wasserdruck-Krane.

a. Wasserdruck-Krane mit Rollenübersetzung.

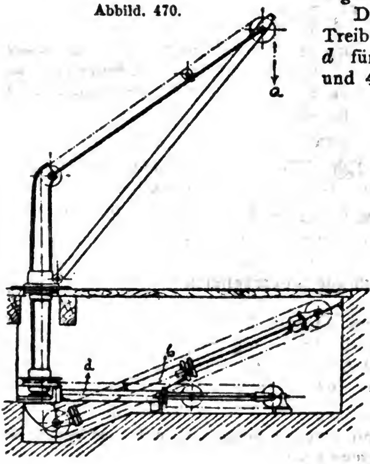
Treibcylinder h (Abbild. 470) für die Lasthebung lotrecht oder schiefliegend, Rückgang durch das Eigengewicht; einfach wirkend, Hub ($= s$) mit Flaschenzug-Uebersetzung (n bis 10 Rollen). Ketten- oder Drahtseil-Rollendurchmesser $D >$ 40-fache der Ketteneisenstärke, $\geq$ 500-fache Drahtdicke.

$$\text{Lasthub } H = sn; \qquad \text{Triebkraft } P = \frac{nQ}{\eta};$$

Wirkungsgrad η je nach der Uebersetzung; bei 10-rolligen Drahtseilflaschenzügen mit zwei weiteren Leitrollen η noch bis 0,75.

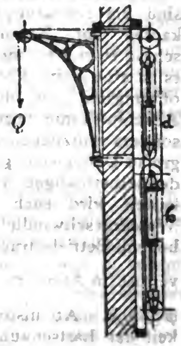
Treibcylinder d für Drehung des Kranes, doppelt wirkend mit Flaschenzugübersetzung, mit Angriff an der Kettenrolle der Kransäule. Drehung der Krane bis 1500 kg von Hand, wenn hierfür zugänglich.

Abbild. 470.



Drehkran mit getrennten Treibcylindern, h für Lasthebung, d für Drehung (Abbild. 470 und 471).

Abbild. 471.



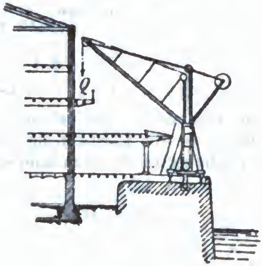
Fahrbare Dreh- oder Rollkrane mit beweglichem Anschlufs an die Druckleitung durch Kettenrohre, Teleskoprohre oder Schlauch (Abbild. 472). Nachteil: schwierige Dichtung, Zeitverlust durch An- und Abschrauben der Anschlüsse. Die Druckleitung erhält alle 10 m einen Anschlufsflansch.

Lastgeschwindigkeiten für Krane von 3 bis 5 t:

bei Lasthebung $c = 0{,}5$ bis 1,5 m i. d. Sek.,

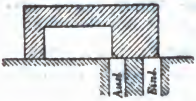
bei Krandrehung durch Wasserdruck 7 bis 8 m i. d. Sek. für 90° Drehung bei 6 m Ausladung.

Abbild. 472.

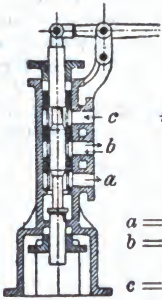


Steuerung durch Schieber (Abbild. 473) aus Phosphorbronze mit auswechselbarem Schieberspiegel. Berechnung der Tragflächen des nicht entlasteten Schiebers für Auflagerdruck < 100 Atm.; oder entlastete Kolben (Abbild. 474).

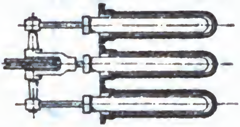
Abbild. 473.



Abbild. 474.



Abbild. 475.



$a =$ Ausströmung,
$b =$ Zu- und Ableitung vom Treibcylinder,
$c =$ Einströmung vom Sammler.

Zur Verhütung von Stöfsen beim Antrieb sind die Steuerungskanten der Kanäle schräg zu stellen oder es ist eine kleine Voröffnungsnut in die Abschlufskante einzufeilen, um plötzliche Wassereinströmung und besonders plötzlichen Abschlufs zu verhüten. Aus demselben Grunde ist grofse Uebersetzung durch die Steuerhebel und langsame Einwirkung der selbstthätigen Abstellvorrichtungen auszuführen. Am Steuerungskasten wird auch in der Regel ein Sicherheitsventil angebracht. Wassergeschwindigkeit in der Steuerung $v = 5$ bis 10 m i. d. Sek., bei hohem Betriebsdruck (50 Atm.) bis 20 m i. d. Sek., bei einem Druckverlust (in Atm.) $p = \frac{1}{10\,\varphi^2}\frac{v^2}{2g}$, worin der Geschwindigkeitskoefficient $\varphi \gtreqless 0{,}6$. Abflufsquerschnitt so zu bemessen, dafs die Geschwindigkeit der Lastsenkung geregelt wird.

Berechnung der Steuerung.

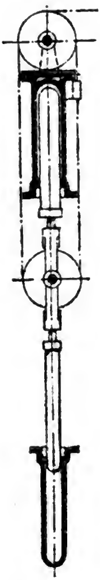
Bezeichnet:

p den Wasserdruck im Schieberkasten in Atm.,
x den Wasserdruck im Cylinder unter dem Kolben, in Atm.,
v (in m i. d. Sek.) die Durchflufsgeschwindigkeit im Eintrittskanal, gemessen an der Schieberabschlufskante und bestimmt durch die Gleichung: $vf = uF$, worin

f der Eröffnungsquerschnitt im Schieberspiegel in qm,
F der Kolbenquerschnitt in qm,
u die Kolbengeschwindigkeit in m i. d. Sek. ist,

$\frac{\zeta v^2}{2g}$ die Summe aller Bewegungswiderstände, welche sich dem Wasser auf seinem Wege vom Schieberkasten bis zur Wirkung auf den Kolben entgegensetzen (einschl. des Einflusses der Kontraktion im Eröffnungsquerschnitt selbst; Anteil von ζ hierfür bis 1,5),

Abbild. 476.



Abbild. 477.



so besteht die Beziehung:

$$x = p - \frac{v^2}{2g} \frac{1+\zeta}{10}.$$

Verfügt man über v, so ist x gleichzeitig bestimmt und damit für eine gegebene Kolbenbelastung P der Kolbenquerschnitt F aus der Beziehung:

$$Fx = P.$$

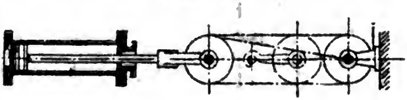
Weiter folgt für eine geforderte Kolbengeschwindigkeit u:

$$f = \frac{uF}{v}.$$

ζ ist von der Kanalform und der Art der Steuerung abhängig und von Fall zu Fall verschieden.

Für Schieber mit $f = 2$ qcm Schlitzweite fand H. Lang bei 50 Atm. Betriebsspannung bei voller Oeffnung: $\zeta = 4$,
bei Verengung auf 0,08 qcm: $\zeta = 1,25$.*)

Abbild. 478.



*) Vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, S. 726. Ad. Ernst, Beiträge zur Entwicklung der Hebezeuge mit Druckwasserbetrieb.

Veränderlicher Wasserverbrauch für veränderliche Lasten wird erzielt:

1. Durch Gruppenkolben (Abbild. 475), z. B. drei Treibcylinder; alle drei beaufschlagt für volle Last, die beiden äufseren Cylinder beaufschlagt bei $\frac{2}{3}$ Last, der mittlere Cylinder allein bei $\frac{1}{3}$ Last. Gruppenkolben von verschiedenem Durchmesser teleskopartig in einander gesteckt, finden bei unmittelbar wirkenden Aufzügen Verwendung.

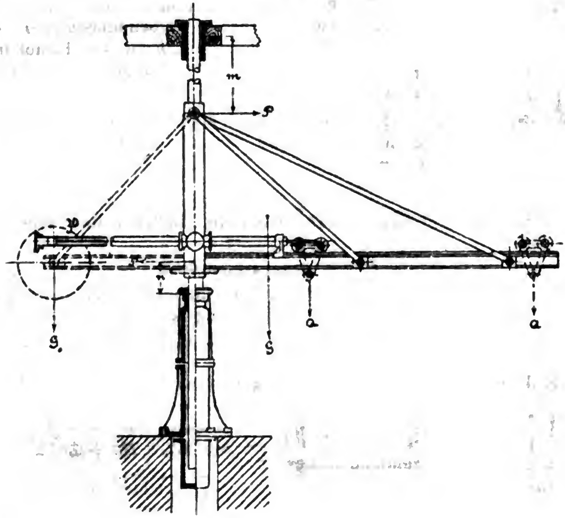
2. Durch Differentialkolben (Abbild. 477). Einströmung *u* hinter dem grofsen Kolben bei gleichzeitiger Ausströmung *o* vor dem kleinen Kolben für volle Last; gleichzeitige Einströmung bei *u* und *o* für halbe Last.

3. Durch Aus- und Einschaltung einzelner Flaschenzugsrollen (Abbild. 478). Der Treibcylinder macht den vollen Hub mit wenig Uebersetzungsrollen bei voller Last und nur einen Teil seines Hubes mit allen Uebersetzungsrollen bei kleiner Last.

b. Krane ohne Rollenübersetzung.

Drehkrane mit lotrecht geführtem Kolben und Ausleger mit Rollwagen (Abbild. 479); für Stahlwerke, Giefsereien u. s. w.

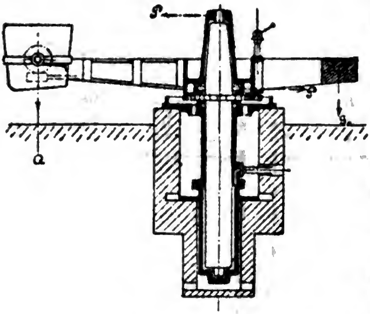
Abbild. 479.



Kolbenführung entweder nur im ausgebohrten Druckcylinder oder durch eine zweite obere Führung (wie in Abbild. 479); letztere Anordnung verringert die Biegungsbeanspruchung des Kolbens durch die Last und das Eigengewicht.

Berechnung des Kolbens auf zusammengesetzte Festigkeit für die wagerechten Seitenkräfte P und die ungünstigsten Werte der Hebelarme m und n (Abbild. 479), ferner auf Knickfestigkeit; dann Berechnung des Wasserdruckes für Last und Eigengewicht. Kolbenquerschnitt ergiebt sich wegen Eigengewicht meist zu grofs. Ausgleichung des letzteren durch Gegengewichte oder durch Wasserdruck auf einen kleinen Entlastungskolben zu umständlich. Ausgleichung der überhängenden Gewichte G durch G_0 für gleiche Beanspruchung der Führungen ist wünschenswert (s. S. 562).

Abbild. 480.



Verschiebung des Laufwagens von Hand oder durch doppelt wirkende Druckcylinder W. Drehung des Kranes stets von Hand aus an der Last.

Giefskrane für Stahlwerke (Abbild. 480) mit Hülfswindwerken zum Kippen der Pfanne, Aus- und Einschieben der letzteren und zum Drehen des Kranes.

D. Unmittelbar wirkende Kolben-Aufzüge.

a. Für kleine Hubhöhen

(bis 6 m) einfache Taucherkolben (Abbild. 481) mit versenktem Druckcylinder. Führung in der Stopfbüchse und an den Seitenflächen der Lastplatte.

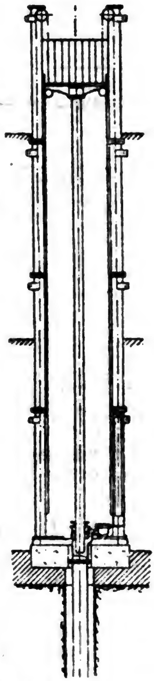
Kolbendruck $\frac{\pi D^2}{4} p = Q$ + Eigengewicht + Reibung + Beschleunigungsdruck.

Der Einflufs des Auftriebes kann vernachlässigt bezw. für die Beschleunigung angenommen werden.

Ausgleichung des beträchtlichen Eigengewichtes meist nur bei Lasten über 10 t u. zw. am häufigsten durch zwei Kettenzüge mit

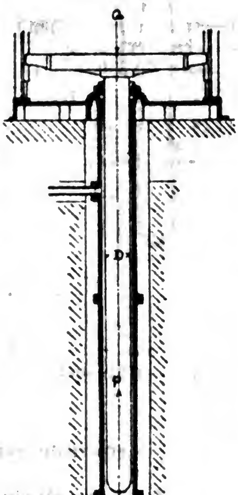
Gegengewichten in den Führungen. ¼ des Eigengewichts mufs unausgeglichen bleiben, um den selbstthätigen Rücklauf des Aufzuges mit genügender Geschwindigkeit zu sichern, oder Ausgleichung durch beständigen Wasserdruck auf einen Entlastungskolben ohne Zwischenventil. Das Druckwasser des Ausgleichcylinders wird beim Lastsenken in die Druckleitung zurückgeliefert.

Abbild. 482.



b. Für grofse Hubhöhen

Abbild. 481.



(6 bis 30 m) mit einfachem, aus einzelnen Rohren zusammengesetztem Kolben (Abbild. 482). Die Rohrschüsse sind durch innen liegende Muffenverschraubung mit einander befestigt oder genau kegelförmig in einander gesteckt und in der Kolbenmitte durch eine ganz durchlaufende Schraube verbunden. Festigkeitsberechnung auf Knicken (S. 347) für mindestens 10-fache Sicherheit.

Die Knickungs-Beanspruchung wird (nach R. Cramer) vermieden durch hohle Kolben ohne Bodenverschlufs, so dafs das Druckwasser bis unter die Kopfplatte des Kolbens reicht.

Fällt der Kolben infolge hoher Wasserpressung bei verhältnismäfsig geringer Belastung zu schwach aus, um gegen Knicken bei freiem Aufsteigen genügend gesichert werden zu können, so ist der Kolben excentrisch unter der Lastbühne an deren äufserstem Rande anzuordnen und durch eine Reihe geschlitzter Führungsstücke zu leiten, welche über die ganze Förderhöhe verteilt werden. Der Fahrstuhl wird dabei selbständig geführt und nur durch eine Mitnehmer-Schelle mit dem Kolben verbunden, deren vorkragender Arm durch die Führungsschlitze frei durchgeht.

c. Ausgleichung der toten Last und des veränderlichen Auftriebes.

1. Nach **Edoux** durch Gegengewichte G (Abbild. 482) in den Führungssäulen oder neben dem Fahrschacht und durch Verbindungsketten, deren gesamtes Eigengewicht p (kg f. d. lfd. m) dem Auftrieb des Kolbens vom Durchmesser D in m entspricht; es mufs dann sein: $p = 390\,D^2$ (bei zwei Ketten ist also das Eigengewicht f. d. lfd. m einer Kette $= 0{,}5\,p$). Die Kette vermehrt die Beschleunigungswiderstände.

2. Nach **R. Cramer** durch das Eigengewicht der Umsetzungskolben und durch Vermehrung der Druckwassersäule im Vorcylinder A (Abbild. 483) bei aufsteigendem Kolben d. i. abnehmendem Auftrieb.

d. Ausführung.

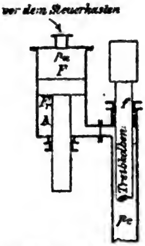
Druckcylinder von mäfsigem Hub (< 6 m) freistehend und zugänglich aufzustellen, im Unterbau oder in gemauerter Fundamentgrube. Cylinder für grofse Hubhöhen (10 bis 70 m) werden in Bohrlöcher versenkt, letztere zum Schutz gegen Erddruck verrohrt (Schweifseisenrohre von 7 bis 10 mm zunehmender Stärke). Bodenschlufs des Bohrloches durch Beton. Zur Sicherung gegen Rost Doppelrohre in 100 bis 200 mm Ringraum, mit Beton ausgegossen. Innenrohr 4 mm Wandstärke.

Die **Führung** der Kopfplatte mufs genau centrisch zum Kolben erfolgen, oder beide Teile müssen beweglich verbunden werden und die Kopfplatte mufs vollständige Führung von grofser Höhe $\gtreqless 2{,}5$ m erhalten. Führungsrollen erfordern Durchmesser > 200 mm und seitliche Spurkränze.

Umsetzungskolben (Abbild. 483) (s. o.) ermöglicht beliebigen Treibkolbenquerschnitt für gegebenen Wasserdruck.

Bezeichnet:

Abbild. 483.



F den vollen, F_r den Ringquerschnitt des Uebersetzungskolbens im Vorcylinder A,
f den Treibkolbenquerschnitt,
p_a, p_e den Wasserdruck vor dem Uebersetzungskolben bezw. vor dem Treibkolben,
h den Hub des Treibkolbens,
s den Hub des Uebersetzungskolbens, so ist:

$$p_e > p_a; \qquad p_e = p_a \frac{F}{F_r} \quad \text{und} \quad s = h \frac{f}{F_r}.$$

Wird der Ringquerschnitt F_r nach oben gelegt, so ist umgekehrt:

$$p_e < p_a; \qquad p_e = p_a \frac{F_r}{F} \quad \text{und} \quad s = h \frac{f}{F}.$$

Ausführlicheres über neuere Wasserdruck-Hebewerke s. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1890 und 1891; Ad. Ernst, Beiträge zur Entwicklung der Hebewerke mit Druckwasserbetrieb. Ferner: P. Pfeifer, Wasserdruck-Hebungen, Berlin 1891

Zeitschr. d. V. d. Ing. 1892, S. 306 u. f.; B. Gerdau, Lösch- und Ladevorrichtungen für Schiffe und Eisenbahnen.

IV. FÖRDERMASCHINEN.

A. Haspel.

Kurbelarm $a = 40$ cm, Kurbelgeschwindigkeit $c = 0{,}9$ m i. d. Sek.

Trommelhalbmesser $\begin{cases} r > 10 \text{ cm für Hanfseile,} \\ r > 15 \text{ cm für Drahtseile;} \end{cases}$

für stärkere Seile ist die Berechnung der Trommel nach S. 442 auszuführen.

Arbeitsleistung eines Mannes $E = 6$ bis 8 mkg i. d. Sek. bei 8-stündiger Arbeitszeit und etwa 50 m Schachttiefe.

Anzahl der Arbeiter $i = 2$ bis 4.

Die Gesamtleistung wächst zunächst mit der Tiefe wegen des geringen Einflusses der Pausen, nimmt dann aber wegen der Vergröfserung des Seilgewichtes wieder ab.

Gesamtleistung $A = 100\,000$ mkg in 8-stündiger Arbeitszeit für einen Arbeiter und eine Schachttiefe $H = 50$ m.

Nachteile der einfachen Haspelförderung: Lastgeschwindigkeit sehr klein $= 0{,}25$ bis $0{,}33$ m i. d. Sek. Die Lastkübel machen bei der Aufwicklung des Seiles eine Seitenbewegung. Die Fördertiefe ist durch höchstens zweimalige Seilaufwicklung bis zur Trommelmitte beschränkt.

Für **gröfsere Lasten** entweder Haspel mit Vorgelege (Berechnung wie bei Windwerken), oder Pferde-Göpel. Berechnung wie früher, wobei der Krafthebelarm $a = 5$ bis 6 m, jedenfalls aber > 4 m, weil sonst die wirksame Seitenkraft der Zugkraft zu gering wird und die Zugtiere in zu kleinem Bogen laufen müssen.

Kraftgeschwindigkeit c bis 1,2 m i. d. Sek.,

Leistung eines Pferdes $E = 35$ bis 40 mkg i. d. Sek. bei 8-stündiger Arbeitszeit und einer Schachttiefe $H < 100$ m.

Gesamtleistung $A = 7$ bis $800\,000$ mkg für 1 Pferd in 8-stündiger Arbeitszeit und $H < 100$ m.

Bei der **Berechnung von Anlagen** ist in der Regel die gesamte Last Q_0 gegeben, welche auf die Höhe H in t Stunden Arbeitszeit bei t_1 Stunden Zeit für einmaliges Ein- und Ausladen zu heben ist. Dann beträgt für die Fördergeschwindigkeit v:

die Dauer eines Aufzuges (in Stunden): $= \dfrac{H}{3600\,v} + t_1$,

die Anzahl der Aufzüge in t Stunden: $\mathfrak{z} = \frac{t}{\frac{H}{3600\,v} + t_1}$,

und die Förderlast für einen Aufzug: $Q = \frac{Q_0}{\mathfrak{z}}$.

B. Fördermaschinen mit motorischem Antrieb.

(Für grofse Lasten und grofse Förderhöhen.)

Ueber Förderseile s. S. 443 u. f.

Fördergeschwindigkeit $v = 0{,}5$ bis 15 m i. d. Sek., u. zw.:
$v \sim 0{,}5$ m i. d. Sek. bei freier Fahrt im Schacht,
$v = 1$ m i. d. Sek. bei freier Fahrt in verlattetem Trum,
v bis zu 3 m i. d. Sek. bei Seilführung und
v bis zu 15 m i. d. Sek. bei Förderschalen und Führung in Spurlatten.

Berechnung nach Nutzlast Q, toter Last q und Seillast G. Bei zweitrümiger Förderung sind die toten Lasten während der Fahrt ausgeglichen, nicht aber beim Aufsetzen bei Benutzung fester Aufsatzvorrichtungen.

Bei Verwendung cylindrischer Trommeln (Trommelhalbmesser R konstant) ist die Gröfse des Lastmomentes während der Fahrt veränderlich, u. zw. zu Beginn bezw. zu Ende der Hebung bei zweitrümiger Förderung:

$$M = (Q \pm G)\,R.$$

M wird gegen Ende der Hebung negativ für Seillasten > als die Nutzlast, die Förderung erfordert dann Brems- oder Gegendampfwirkung.

Mit Rücksicht auf diesen Uebelstand wird möglichste **Verminderung des Seilgewichtes** angestrebt. Anwendung von Seilen mit nach unten abnehmendem Querschnitt entsprechend der Beanspruchung durch das Eigengewicht. Ausführung von Seilen mit hoher Tragfähigkeit z. B. aus Tiegelflufsstahldrähten mit Bruchbelastung bis zu 18000 kg f. d. qcm (vergl. S. 444 u. f.).

Weitergehende Vermeidung des veränderlichen Lastmoments ist zu erreichen durch die

Ausgleichung des Seilgewichtes.

1. **Durch kegelförmige Trommeln;** diese setzen der veränderlichen Last veränderlichen Halbmesser von r bis R so gegenüber, dafs statisch das Lastmoment annähernd konstant bleibt.

Gröfse des Lastmoments für zweitrümige Fahrt beim Beginn der Förderung:

$$M_a = (Q + q + G)\,r - q\,R,$$

am Ende der Förderung:

$$M_e = (Q + q)\,R - (q + G)\,r.$$

Soll das Moment für Anfang und Ende der Förderung gleich sein, so mufs werden:

$$R = \frac{Q + 2G + 2q}{Q + 2q} r = \xi r;$$

r ist für die erforderliche Seildicke d nach S. 442 zu bestimmen.

Der Neigungswinkel α der Trommel ergiebt sich aus:

$$\sin \alpha = \frac{r^2 (\xi^2 - 1) \pi}{H d},$$

wenn die Seilwicklungen neben einander folgen. Für grofse Schachttiefen und grofse Seillasten wird α grofs; die Trommeln sind dann mit Spiralnuten auszuführen (Spiralkörbe).

Die statische Berechnung für genaue Seilausgleichung ergiebt als Begrenzungslinie der Fördertrommel eine Kurve, statt welcher annähernd eine Gerade gesetzt werden kann*).

Grofse kegelförmige Trommeln erfordern eine Entfernung vom Schacht $>$ 40 m, damit die seitliche Ablenkung des Seiles gering wird.

Für gleichzeitiges Aufsetzen der Förderschalen in verschiedenen Fördersohlen sind sie wegen ungleicher Abwicklung der Seillängen schwierig verwendbar.

2. **Durch Bobinen** bei Anwendung von Bandseilen. Die Aufwicklung des Seiles erfolgt auf eine Trommel vom Anfangshalbmesser r, welcher entsprechend der Seildicke nach S. 442 zu berechnen ist. Der Aufwicklungshalbmesser vergröfsert sich allmählich durch die Seildicken. Das Seil bleibt in einer lotrechten Ebene; Entfernung vom Schacht beliebig. Vollständige Seilausgleichung nur bei sehr geringem Anfangshalbmesser r oder bei sehr grofser Dicke des Seiles. Beides für Drahtseile schwierig ausführbar. Die Betriebsmaschine erhält wegen des geringen Anfangshalbmessers r geringere Abmessungen bei erhöhter Umdrehungsgeschwindigkeit.

3. **Durch Gegengewichte.** Am besten durch Gegenseil von gleichem Gewicht wie das Förderseil. Die Ausgleichung ist vollständig, giebt aber Seile mit konstantem Querschnitt und daher gröfsere Seilbelastung. Das Gegenseil mufs elastisch aufgehängt sein, um Stofswirkungen beim Ansetzen der Maschine zu vermeiden. Einstellung für verschiedene Fördersohlen schwierig (Baumanns Seilklemmen).

4. **Durch Kraftaufspeicherung,** Luftkompression, Gegendampfwirkung u. s. w. Wenig in Gebrauch, weil zu umständlich.

Berechnung der Fördermaschinen.

Statisch für das **Anheben der Maschine,** so dafs ein Cylinder allein bei der ungünstigsten Kurbelstellung das gröfste vorkommende Lastmoment überwinden kann. Hierbei ist für die geringste Dampfspannung, für welche die Maschine betriebsfähig sein soll, der

*) Näheres s.: von Hauer, Fördermaschinen; von Reiche, Werkzeugdampfmaschinen.

Tangentialdruck am Kurbelzapfen aufzusuchen (vergl. S. 501). Das hierbei in Rechnung zu ziehende gröfste **Moment des Widerstandes** ist (abgesehen von den Nebenwiderständen) für Förderung ohne Seilausgleichung anzunehmen:

bei **eintrumiger Förderung:**

$$= (Q + q + G)\,r,$$

bei **zweitrumiger Förderung** entweder beim Beginn der Hebung:

$$= (Q + G)\,r,$$

oder beim Aufsetzen der beladenen Schale:

$$= (G + q)\,r,$$

oder beim Aufsetzen der unbeladenen Schale:

$$= (Q + q - G)\,r.$$

Der vorletzte Wert wird gröfser als der letzte bei grofsen, kleiner bei kleinen Schachttiefen. Die Beschleunigungsverhältnisse können unberücksichtigt bleiben, weil nach vollendetem Anheben der zweite Cylinder mit zur Wirkung gelangt Die Dampfmaschine arbeitet bei Beginn der Förderung unter Volldruck und nach erzielter Massenbeschleunigung mit immer zunehmender Expansion oder Drosselung.

Gewöhnlich beträgt die Dampfspannung 4 bis 6 Atm., das Eigengewicht der Förderhunde 200 bis 300 kg bei 400 bis 600 kg Nutzlast (dabei ein, zwei oder vier Hunde in einer Förderschale). Gewicht der Förderschale im Mittel 1000 kg für zwei Hunde, 1500 bis 1800 kg für vier Hunde. Umdrehungszahl der Maschine bestimmt durch die Seilgeschwindigkeit am Trommelumfang.

Von der **Steuerung der Maschine** ist zu fordern: sicheres und genaues Anheben und Aufsetzen und gröfste Betriebssicherheit, besonders bei Menschenförderung. Die Steuerung mufs Füllungen bis 0,9 zulassen und Verkleinerung der Füllungen bis zur Dampfverteilung mit Bremswirkung (durch Expansion unter atmosphärische Spannung). Der Beharrungszustand ist hinsichtlich der Dampfverteilung, Dampfkanäle und Steuerung wie für gewöhnliche Dampfmaschinen zu berechnen; die nach dem obigen ermittelten Abmessungen sind damit in Einklang zu bringen. Am besten eignen sich Kulissensteuerungen und Ventilsteuerungen (durch unrunde Scheiben betrieben).

Die **Umsteuerung** mufs ein Mann ohne grofse Kraftanstrengung besorgen können. Für gröfsere Maschinen und nicht entlastete Steuerungen finden Hülfsdampfsteuerungen Anwendung, die dem Maschinisten einen Teil der Kraft abnehmen.

Sicherheitsvorrichtungen.

1. **Bremsen.** Die für normalen Betrieb zur Handhabung der Maschine beim Ende der Förderung erforderliche Bremswirkung erfolgt nur durch die Steuerung der Maschine durch entsprechend kleine Füllungen bezw. durch Gegendampf.

Jede Fördermaschine erhält aufserdem eigene **Bremsen**; diese dienen ausnahmsweise zum beliebigen Feststellen der Maschine und bei Störungen des normalen Betriebes. Bremskraft bei Hand- oder Fufsbetrieb 40 bis 50 kg. Fufsbremsen für kleine, Gewichtsbremsen mit Auslösung für gröfsere und Dampfbremsen für alle wichtigeren Maschinen.

Berechnung der Bremskraft P entsprechend dem gröfsten Lastmoment $M = (Q + q + G) r$ bei eintrumiger Förderung (bezw. Bruch des anderen Förderseiles) und der lebendigen Kraft der bewegten Massen L.

Bezeichnet r_1 den Halbmesser der Bremsscheibe, s die Förderstrecke, während welcher Bremsung erfolgt, so findet sich P aus:

$$P s \frac{r_1}{r} = (Q + q + G) s + L \text{ zu:}$$

$$P = \frac{M}{r_1} + L \frac{r}{s r_1}.$$

Ausführung: In der Regel zur Entlastung der Welle als doppelte Backenbremse mit Verbindungsstangen zwischen den Bremshebeln zur Herstellung gleichen Druckes auf beide Backen. Bremshebel zum Zweck der selbstthätigen Lösung schräg gestellt.

2. Weitere Sicherheitsvorrichtungen sind **Teufenzeiger**, meist mit selbstthätiger Ingangsetzung der Dampfbremse und Absperrung der Dampfeinströmung als Sicherung gegen zu hohes Auffahren, oder Einstellung der Bremse vom Schachtturm aus; ferner **Signalvorrichtungen**. Am Förderkorbe **Fangvorrichtung** für den Fall eines Seilbruches.

V. HEBEWERKE FÜR FLÜSSIGE KÖRPER.*)

A. Schöpfwerke.

1. **Eimerwerk**; insbesondere für unreine Flüssigkeiten, Geschwindigkeit der Kette bis 1 m i. d. Sek. Wirkungsgrad $\eta = 0{,}6$ bis 0,7.

2. **Wasserschnecke**; für grofse Entwässerungsanlagen mit bedeutenden Abmessungen ausgeführt. Durchmesser bis 1,75 m, Schraubenlänge bis 10,5 m, Neigungswinkel der Welle gewöhnlich 30°; Hubhöhen bis 4,5 m. Minutliche Umdrehungszahl $n < 21 : R$, wenn $R =$ Schraubenhalbmesser in m. Wirkungsgrad $\eta = 0{,}75$ bis 0,9.

*) Nach K. Hartmann, Die Pumpen.

3. **Kettenpumpe;** für dickflüssige Körper. Hubhöhen bis 3 m; Steigrohrweite 0,12 bis 0,15 m, Scheibenabstand 0,8 bis 1 m, Kettengeschwindigkeit 0,9 bis 1,2 m i. d. Sek.

4. **Wurf- und Pump-Räder,** für grofse Be- und Entwässerungsanlagen mit Dampfmaschinenbetrieb vielfach ausgeführt. Die Schaufeln der Pumpräder ragen aus geschlossenen Trommeln heraus; das Wasser kann über Radmitte gehoben werden. Hubhöhe bis 5 m, Raddurchmesser 5 bis 10 m, Umfangsgeschwindigkeit 1 bis 3 m i. d. Sek., zwei bis fünf Umdrehungen i. d. Min., Lieferungsgrad $\mu = 0{,}8$ bis 0,95, Wirkungsgrad $\eta = 0{,}7$ bis 0,8.

Leistung und Betriebsarbeit der Schöpfwerke.

Es sei:

- Q die gehobene Flüssigkeitsmenge in cbm i. d. Sek.,
- q die von einer Zelle geschöpfte Flüssigkeitsmenge in cbm,
- γ das Gewicht der Flüssigkeit in kg f. d. cbm,
- H die Hubhöhe in m,
- n die minutliche Umdrehungszahl,
- N die notwendige Betriebsarbeit in PS,
- μ der Lieferungsgrad (μ ist bei guter Ausführung bei den Schöpfwerken mit schöpfenden Gefäfsen nahezu 1, bei den Schöpfwerken mit treibenden Flächen 0,8 bis 0,9),
- η der mechanische Wirkungsgrad.

Dann ist für das **Eimerwerk** und die **Kettenpumpe:**

$$Q = \frac{\mu v q}{a},$$

wobei v die Kettengeschwindigkeit in m i. d. Sek., a der Eimer- bezw. Scheibenabstand in m;

für die **Schöpfräder:** $$Q = \mu \frac{n z}{60} q,$$

wobei z die Zellenzahl;

für die **Wurfräder:** $$Q = \mu \frac{\pi (D^2 - D_1^2)}{4} B \frac{n}{60},$$

wobei B die Radbreite, D und D_1 der äufsere und innere Radkranzdurchmesser, alles in m;

für die **Wasserschnecke:** $$Q = \mu \frac{n i}{60} q,$$

wobei i die Zahl der Schraubenwindungen.

Die Gröfse der erforderlichen **Betriebsarbeit** ergiebt sich zu:

$$N = \frac{1}{\eta} \frac{\gamma Q H}{75} \text{ PS}.$$

B. Pumpen.

Die **Flüssigkeitshebung** erfolgt:

a) durch Luft- oder Dampfdruck (Saugheber, Luftdruckapparate, Dampfwasserheber, Pulsometer),

b) durch einen Strahl von Druckwasser (Wasserstrahlpumpen, hydraulische Widder), Druckluft oder Dampf (Ejektor, Injektor),

c) durch rasch umlaufende Schaufelräder (Kreiselpumpen),

d) durch Kolben (Kolbenpumpen).

Bezeichnungen (in m bezw. qm):

H_s = Saughöhe,

L_s = Länge der Saugleitung,

F_s = Querschnitt der Saugleitung,

H_d = Druckhöhe,

L_d = Länge der Druckleitung,

F_d = Querschnitt der Druckleitung,

A = Flüssigkeitshöhe des atm. Luftdruckes (= 10,333 m für Wasser).

a. Hebung durch Luft- oder Dampfdruck.

1. Saugheber.

Es bezeichnet:

H_s die Förderhöhe vom Einlauf bis zum Heberscheitel in m,

H_f die Fallhöhe vom Heberscheitel bis zum Ausfluſs in m,

v und v_a die Geschwindigkeiten im Heberrohr bezw. am Ausfluſs in m i. d. Sek.,

h_s und h_f die Geschwindigkeitshöhen, den Bewegungswiderständen in der Leitung vor bezw. hinter dem Heberscheitel entsprechend.

Die Wirkungsweise ist an folgende drei Bedingungen geknüpft:

$$H_s + \frac{v^2}{2g} + h_s \leqq A;$$

$$H_f - H_s > h_s + h_f;$$

$$H_s + (H_f - H_s)\,\frac{\dfrac{v^2}{2g} + h_s}{\dfrac{v_a{}^2}{2g} + h_s + h_f} \leqq A.$$

Bei $H_f > A$ kann die Wirkung noch durch Verengung des Ausfluſsquerschnittes ($v_a > v$) erzielt werden.

Die am Heberscheitel sich absetzende Luft muſs zeitweise entfernt werden; hierzu dienen selbstthätige Entlüftungsvorrichtungen.

2. Dampfdruckpumpen (Montejus, Pulsometer).

Bei **Pulsometern** Saughöhe bis zu 8 m, Druckhöhe $<$ 50 m; bei gröſseren Höhen werden einige Pulsometer übereinander angeordnet. Stündlicher Dampfverbrauch im besten Falle 60 kg f. d. PS Pumpenleistung; Gefäſsinhalt zweckmäſsig nicht über 0,1 bis 0,15 cbm; Lieferungsgrad $\mu = 0{,}8$ bis 0,85. Für 1 cbm gehobene Flüssigkeit ist bei neueren Konstruktionen etwa 3 cbm gespannter Dampf notwendig, dessen Druck je nach der Länge der Druckleitung 1 bis 1,5 Atm. gröſser sein muſs, als der Förder- und Widerstandshöhe entspricht. Temperaturerhöhung des gehobenen Wassers etwa 2° C bei 10 m Förderhöhe und etwa 1,5° C für weitere Steigerung um je 10 m.

b. Strahlpumpen.

1. Wasserstrahlpumpen.

Gleichförmig wirkende Wasserstrahlpumpen für eine stündliche Förderung bis zu 150 cbm, für 3 bis 800 m Kraftwassergefälle gebaut; Wirkungsgrad $\eta = 0{,}1$ bis 0,25.

Stoſsweise wirkende Wasserstrahlpumpen (hydraulische Widder, Stoſsheber) für 0,003 bis 0,1 cbm Aufschlagwasser i. d. Min.; Wirkungsgrad $\eta = 0{,}7$; Anwendung, wenn Kraftwasser von geringem Druck im Ueberfluſs vorhanden ist, zur Förderung kleinerer Wassermengen auf gröſsere Höhen.

2. Dampfstrahlpumpen.

Die **Ejektoren** finden Anwendung als Brunnen- oder Lenzpumpen, zum Heben von trüben Flüssigkeiten, Säuren, ferner bei Strahlkondensatoren.

Injektoren. Mit und ohne Saugwirkung; nur dann vorteilhaft anzuwenden, wenn die Temperaturerhöhung des geförderten Wassers ausgenutzt werden kann. Daher meist zur Speisung von Dampfkesseln (für Lokomotiven ausschlieſslich, vergl. Abteil. II. S. 144) verwandt.

Durch nichtsaugende Injektoren kann Dampf von geringerer Spannung die Speisung eines Kessels mit höherem Druck mit angewärmtem Wasser (70° bis 90°) besorgen. Saughöhe bei geeigneter Konstruktion bis 6,5 m. Die Doppelinjektoren von Körting können 60° warmes Wasser noch 2 m hoch ansaugen; dabei stündliche Wasserförderung 1,9 bis 7 cbm bei 9 Atm. Betriebsdampfdruck. Neuerdings kommen selbstthätig wieder ansaugende (restarting) Injektoren zur Anwendung, welche gegen das Eintreten von Luft in das Saugrohr im Gegensatz zu den anderen Konstruktionen unempfindlich sind; sie saugen kaltes Wasser bis zu 6,5 m hoch, können auch Wasser von 60° speisen.

Saugende Injektoren erfordern dichte Saugleitung und eine Wassergeschwindigkeit im Saug- und Druckrohre von 0,8 bis 2,5 m i. d. Sek.

c. Kreiselpumpen.

(Zeichnerische Bestimmung der Kreiselpumpen s. S. 655.)

Besonders geeignet zur Förderung gröfserer Flüssigkeitsmengen auf kleinere Höhen; Saughöhe bis 8 m, Druckhöhe bis 40 m (hierbei besser zwei Pumpen hintereinander mit geteilter Druckhöhe. Für grofse Pumpen zweiseitiger Einlauf und nach aufsen sich verjüngende Schaufelbreite.

Bezeichnungen (alle Längenmafse in m):

r_e und r_a = innerer und äufserer Radhalbmesser,
v_e und v_a = Radgeschwindigkeiten am inneren und äufseren Umfang,
c_e und c_a = absolute Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit,
w_e und w_a = relative Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit,
b_e und b_a = innere und äufsere lichte Radbreite,
n = Anzahl der Radumdrehungen i. d. Min.,
h_s, h_r, h_d die den Bewegungswiderständen im Saugrohr, im Rad und im Druckrohr entsprechenden Druckhöhen,
H_s und H_d = Saug- bezw. Druckhöhe,
v_s und v_d = Saug- und Druckgeschwindigkeit,
Q = Wassermenge i. d. Sek., A = Flüssigkeitshöhe des Luftdruckes.

Es folgt die **gröfstmögliche Saughöhe** aus der Bedingung:

$$A - \left(H_s + h_s + \frac{v_s^2}{2g}\right) > 0.$$

Ferner wird:

$$v_a = \sqrt{\frac{2g\,(H + h_s + h_r + h_d) + v_d^2}{1 + \dfrac{\sin(\alpha_a + \beta)}{\sin(\alpha_a - \beta)}}};$$

α_a und β sind die in Abbild. 484 (S. 592) angegebenen Winkel. Um die gegebene Förderhöhe mit der **kleinsten Umfangsgeschwindigkeit** zu überwinden, mufs also

$$\frac{\sin(\alpha_a + \beta)}{\sin(\alpha_a - \beta)}$$

ein Maximum sein. Bei der vielfach angewandten zurückgekrümmten Schaufel (Form I in Abbild. 484) ist dieser Ausdruck < 1, bei der von Rittinger gewählten Schaufelkrümmung (Form II in Abbild. 484 mit $\alpha_a = 90$) $= 1$, bei der vorwärtsgekrümmten Schaufel (Form III) > 1; es empfiehlt sich daher, die letztere Form insbesondere für grofse Förderhöhen anzuwenden. Geschwindigkeiten v_s und $v_d = 1$ bis 2,5 m i. d. Sek.

Für die **minutliche Umdrehungszahl** gilt:

$$n = 9{,}55 \frac{v_a}{r_a}.$$

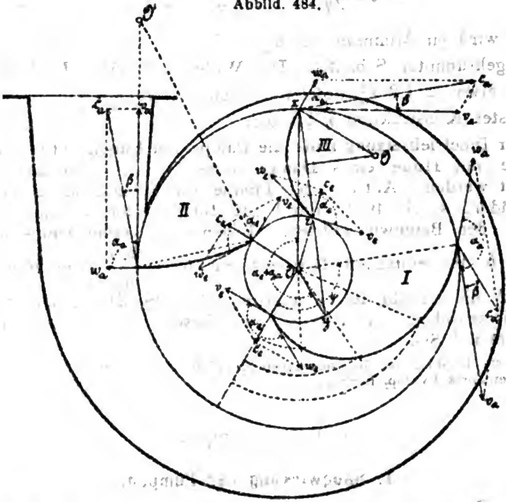
Ferner sei $r_a = 2\,r_e$, bei grofsen Förderhöhen gröfser.

$r_e = 0{,}5$ bis $0{,}6$ vom Durchmesser der anschliefsenden Saugleitung (die sich aus Q und v_s ergiebt).

Mit Berücksichtigung der Schaufeldicke e wird bei z_e Schaufeln am inneren, z_a Schaufeln am äufseren Umfang:

$$Q = \left(2\pi r_e - z_e \frac{e}{\sin \alpha_e}\right) b_e\, c_e = \left(2\pi r_a - z_a \frac{e}{\sin \alpha_a}\right) b_a\, c_a \sin \beta.$$

Abbild. 484.



z_e je nach der Gröfse des Rades 6 bis 12; z_a gewöhnlich $= z_e$, nur bei grofsen Pumpen $> z_e$; $c_e = v_s$, vielfach auch $= c_a \sin \beta$; dann sind die Radbreiten b_e und b_a verschieden grofs und aus obigem bestimmt. Ferner ergiebt sich α_e aus:

$$\operatorname{tg}(180 - \alpha_e) = \frac{c_e}{v_e}.$$

Schaufelform nach Fink als archimedische Spirale (Form I in Abbild. 484); besser jedoch die Rittingersche oder eine etwas vorwärts gekrümmte Form (II und III in Abbild. 484); diese letzteren lassen sich zweckmäfsig als Kreisbögen bilden, indem man $\sphericalangle xoy = 180 - (\alpha_e - \alpha_a)$ macht, xy zieht, xz senkrecht halbiert und als Mittelpunkt des Kreisbogens den Schnitt dieser Geraden mit der in x zu der Richtung von w_a gezogenen Senkrechten nimmt.

Der **Arbeitsbedarf** in mkg i. d. Sek. ergiebt sich zu

$$E_e = Q\gamma\left(H + h_s + h_r + h_d + \frac{v_d^2}{2g}\right) + E_w$$

$$= Q\gamma\,\frac{v_a^2}{2g}\left(1 + \frac{\sin(\alpha_a + \beta)}{\sin(\alpha_a - \beta)}\right) + E_w = \frac{QH\gamma}{\eta}.$$

E_e wird ein Minimum für $\alpha_a = 90 + \frac{1}{2}\beta$, also bei einer schwach zurückgekrümmten Schaufel. Die Widerstandsarbeit E_w kann nach Hartig etwa $= 1{,}2\ v_a^2$ gesetzt werden. Wirkungsgrad der Pumpe bei bester Konstruktion η bis 0,8.

Vor Inbetriebsetzung mufs die Pumpe mit Flüssigkeit gefüllt oder letztere mit Hülfe eines Dampf- oder Wasserstrahlapparates angesaugt werden. Antrieb der Pumpe durch Zahnräderübertragung (Pfeilräder, s. S. 403), durch Keilräder oder durch Riemen, Hanf- oder Baumwollseiltrieb. Brodnitz & Seydel empfehlen die Breite b des einfachen Riemens aus $b = \frac{3000\,N}{n\,D}$ zu berechnen, wenn N die Anzahl der zu übertragenden PS, D den Durchmesser der Riemenscheibe in m bezeichnet; Geschwindigkeit des Riemens < 10 m i. d. Sek.

Gröfste Leistung der Kreiselpumpen bis 17700 cbm i. d. Std. (gebaut von der Maschinenfabrik Cyklop, Berlin).

d. Kolbenpumpen.*)

1. Saugwirkung der Pumpen.

Die Saugwassersäule wird bewegt durch den Luftdruck A (normaler Barometerstand von 76 cm Quecksilbersäule entsprechend einer Wassersäule $A = 10{,}333$ m). Zu überwinden ist die Saughöhe h_s (in m), gemessen vom tiefsten Wasserspiegel bis zum Druckventil bezw. dem höchsten Punkt des eigentlichen Pumpenraumes (s. Abbild. 485), und die Widerstandshöhe h_w (in m), entsprechend den Widerständen

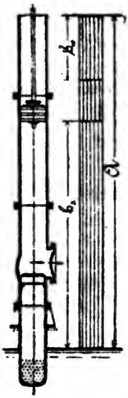
*) Nach Riedler.

einschl. Beschleunigungswiderstand der Wassermassen. Die überschüssige Wassersäule, die > 0 sein mufs, beträgt daher:

$$A - h_s - h_w.$$

Bei anderen Flüssigkeiten als Wasser ist die Saughöhe mit dem specif. Gewicht zu multiplizieren, um h_s in m Wassersäule zu erhalten. Für heifse Flüssigkeiten ist ferner von A der der Temperatur entsprechende Dampfdruck abzuziehen; die Saughöhe mufs daher entsprechend kleiner bezw. Null oder negativ sein, da sonst das Saugen durch Dampfbildung verhindert wird.

Abbild. 485.



Die **Bewegungswiderstände** h_w setzen sich wie folgt zusammen:

1. Druckhöhenverlust zur Erzeugung der Wassergeschwindigkeit v_s im Saugrohr. Saugrohrquerschnitt nach den örtlichen Verhältnissen und dem Kostenpunkt zu wählen. Wassergeschwindigkeit gewöhnlich $v_s \sim 1$ m i. d. Sek. für kurze Leitungen, $v_s < 0{,}75$ m i. d. Sek. bei Leitungslängen von etwa 50 m an.

2. Reibungswiderstand der Saugleitung (s. S. 231 u. f.).

3. Widerstände bei Richtungs- und Geschwindigkeitsänderungen (s. S. 235 u. f.), besonders auch im Saugkorb, Fufsventil und Absperrschieber. Zur Beschränkung dieser Widerstände Durchgangsquerschnitt im Korb $=$ 2- bis 3-fachem Saugrohrquerschnitt. Siebe u. dergl. leicht zugänglich und zu reinigen, vielfach mit Vorrichtung zum Durchblasen. Fufsventile aus reinem Gummi, frei schwimmend; freier Durchgangsquerschnitt der Ventile $=$ 1,5- bis 2-fachem Saugrohrquerschnitt. Absperrvorrichtungen im Saugrohr mit vollem Durchgangsquerschnitt.

4. Ventilwiderstand des Saugventils, d. h. Druckhöhenunterschied über und unter diesem zur Ueberwindung der Durchgangswiderstände, welcher, auf die Ventilfläche wirkend, dem Ventilgewicht (und etwaiger Belastung) das Gleichgewicht hält und hiernach zahlenmäfsig bestimmt werden kann.

5. Beschleunigungswiderstand derjenigen Saugwassermasse, welche bei jedem Pumpenhub zur Ruhe kommt.

Von diesen Widerständen sind diejenigen unter 1., 2., 3. beim Hubbeginn gleich Null, in der Hubmitte am gröfsten, falls kein Windkessel vorhanden ist, sonst sind sie konstant; der Widerstand unter 4. ist annähernd konstant, derjenige unter 5. beim Hubbeginn am gröfsten, in der Hubmitte gleich Null (s. S. 499 u. 500).

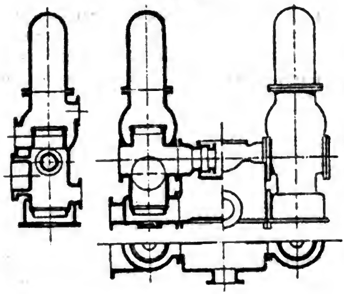
Rechnungsvorgang. Die Saughöhe h_s wird nach den örtlichen Verhältnissen festgestellt, dann unter Annahme bestimmter Saugrohrabmessungen h_w ermittelt und danach geprüft, ob die Bedingung $A - h_s - h_w > 0$ mit genügender Sicherheit erfüllt ist. Meist genügen annähernde Rechnungen. Für genauere Ermittlungen ist h_w für den Hubbeginn, die Hubmitte und zwischenliegende Kolbenstellungen zu berechnen und der sich ergebende gröfste Wert einzusetzen.

Der Anteil von h_w zur Erzeugung der Wassergeschwindigkeit v_s (1.) ist $= v_s^2 : 2g$. Die Beschleunigung der Saugwassersäule (5.) ist gleich derjenigen des Kolbens, reduziert im Verhältnis des Kolbenquerschnitts F zum Saugrohrquerschnitt f_s. Bei Kurbelantrieb mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ist die gröfste Kolbenbeschleunigung $= v^2 : r$ (v = Kurbelzapfengeschwindigkeit, r = Kurbelhalbmesser in m). Daher ist der Anteil von h_w zur Beschleunigung der Saugwassermasse beim Hubbeginn

$$= \frac{v^2}{r} \frac{F}{f_s} \frac{l_s}{9{,}81}.$$

(l_s = Länge der jedesmal zur Ruhe kommenden Wassersäule in m.) Hat die Saugsäule verschiedene Querschnitte, so ist entweder ein Mittelwert anzunehmen oder obiger Ausdruck für jeden einzelnen Teil der Saugwassersäule zu ermitteln und die Einzelwerte zu summieren. Bei genauerer Berechnung der Beschleunigungsverhältnisse ist die jedesmal mit zu beschleunigende Ventilmasse zu berücksichtigen.

Abbild. 486.



Ist die Bedingung

$$A - h_s - h_w > 0$$

nicht erfüllt, so erfolgt während der Beschleunigungsperiode Abreifsen der Saugwassersäule und Stofs, manchmal auch Nichtvollsaugen der Pumpe.

Zur sicheren Erzielung der ungestörten Saugwirkung wird in den meisten Fällen ein **Saugwindkessel** ausgeführt. Seine günstige Wirkung beruht darauf, dafs nur die Wassersäule zwischen Saugwindkessel und Pumpenkolben bei jedem Hubwechsel zur Ruhe kommt und nun zu beschleunigen ist (Widerstand unter 5.), dagegen im eigentlichen Saugrohr nahezu konstante Wassergeschwindigkeit auf-

tritt. Der Saugwindkessel ist daher möglichst nahe an den Saugventilen anzubringen (Abbild. 486 u. 493). Windkessel-Luftraum = 5- bis 10-fachem Hubraum der Pumpe.

Andere Mittel zur Verhinderung des Abreifsens: Verringerung der Kolbengeschwindigkeit bezw. Kolbenbeschleunigung, oder, wenn Hubzahl und Hub unabänderlich sind, Vergröfserung des Saugrohrquerschnitts, oder Anordnung mehrerer gekuppelter Pumpen mit versetzten Kurbeln, die an ein gemeinsames Saugrohr angeschlossen sind. In diesem ergeben sich dann infolge teilweiser Ausgleichung der Wasserentnahme geringere Beschleunigungen und Verzögerungen.

2. Druckwirkung der Pumpen.

Die **Druckhöhe** setzt sich zusammen aus der hydrostatischen Druckhöhe h_d und der Summe aller Bewegungswiderstände (in m Wassersäule zu rechnen).

Die **Bewegungswiderstände** sind:

1. Druckhöhenverlust zur Erzeugung der Wassergeschwindigkeit v_d im Druckrohr $= v_d^2 : 2g$.

2. Reibungswiderstand der Druckleitung (s. S. 231 u. f.).

3. Widerstände bei Richtungs- und Geschwindigkeitsänderungen in Pumpe und Druckrohr (s. S. 235 u. f.).

4. Ventilwiderstand des Druckventils.

5. Beschleunigungswiderstand der zeitweilig ruhenden Druckwassermasse (und des Druckventils).

Ueber die wechselnde Gröfse dieser Widerstände mit der Kolbenstellung gilt das gleiche wie bei der Saugwirkung (s. S. 594 unten).

Wassergeschwindigkeit für kleine Pumpen und kurze Leitungen 1,5 bis 2 m i. d. Sek., für hohen Druck gröfser, unter Berücksichtigung der Anlagekosten und der mit dem Leitungswiderstand wachsenden Betriebskosten festzusetzen. Für grofse Pumpen und lange Leitungen im Mittel 1 m i. d. Sek.

Rechnungsvorgang. Die Beschleunigung der Druckwassermasse erfolgt hier durch den Kolben, die Verzögerung durch Luftdruck, Druckhöhe und Widerstände. Es ist daher unter Zugrundelegung bestimmter Abmessungen für die Druckleitung nachzurechnen, ob beim Hubende die genannten verzögernden Kräfte grofs genug sind, um mit Sicherheit die dann auftretende gröfste Verzögerung entsprechend der Kurbelbewegung zu bewirken, welche, im Verhältnis des Kolbenquerschnitts zum Druckrohrquerschnitt f_d reduziert,

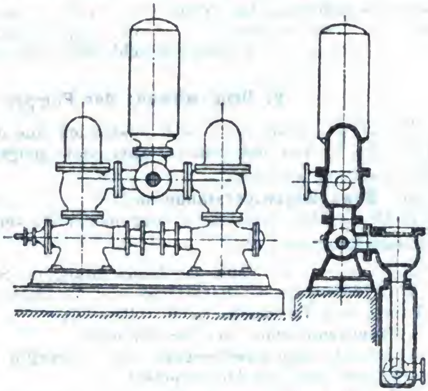
$$= \frac{v^2}{r} \frac{F}{f_d}$$

wird. Die Bedingung ist:

$$A + h_d + h'_w > \frac{v^2}{r} \frac{F}{f_d} \frac{l_d}{9{,}81},$$

worin l_d die Länge der jedesmal zur Ruhe kommenden Druckwassersäule in m bedeutet. (Bei verschiedenen Querschnitten dieser Wassersäule wieder Ermittlung des Ausdrucks rechts für die einzelnen Teile und Addition.) — Die Widerstandshöhe h'_w setzt sich hierbei aus den oben unter 1. bis 4. erwähnten Widerständen zusammen. Bei Pumpen ohne Druckwindkessel ist $h'_w = 0$ zu setzen, weil die Wassergeschwindigkeit beim Hubende gleich Null wird. Obige Bedingung mufs auch für jeden Teil der Druckwassermasse, von einem beliebigen Querschnitte an, erfüllt sein, von welchem ab dann h_d und l_d zu rechnen sind. (Für eine wagerechte Strecke am Ende der Leitung ist z. B. $h_d = 0$.) Bei ungenügender Verzögerung erfolgt Abreifsen der Druckwassersäule, besonders an Knieen u. s. w., und Stofs bei der Wiedervereinigung.

Abbild. 487.



Meist wird ein **Druckwindkessel** eingeschaltet, welcher konstante Bewegung der Druckwassersäule bewirkt. Die Gefahr des Abreifsens wird hierdurch wesentlich vermindert, da nur die Wassersäule zwischen Kolben und Druckwindkessel zu verzögern ist. Die Druckwindkessel sind möglichst nahe den Druckventilen anzubringen, sonst sind über diesen noch kleinere Windhauben anzuordnen. Der Luftinhalt des Druckwindkessels ist möglichst grofs, mindestens = 6- bis 8-fachem Hubraume der Pumpe, bei grofsen Drucklängen nach letzterem zu bemessen. Die Inhalts-Berechnung der Windkessel ist darauf zu beziehen, dafs die Druckschwankungen im Windkessel bei konstanter Abflufsgeschwindigkeit einen bestimmten Bruchteil des mittleren Windkesseldruckes ausmachen sollen. Dieser Bruchteil ist um so kleiner zuzulassen, je länger die Druckleitung ist. Z. B. ergiebt sich bei nichtgekuppelten doppeltwirkenden Pumpen für eine Druckschwankung von 1 % der Windkesselinhalt ∾ dem 20-fachen Pumpeninhalt (allgemein durch Multiplikation des reciproken Wertes obigen Bruchteiles mit annähernd 0,2).

Bei Zwillingspumpen kann der wirksame Inhalt der Saug- bezw. Druck-Windkessel durch ein Verbindungsrohr der Lufträume erhöht werden.

Zur Erfüllung der obigen Bedingung kann ferner, aufser durch Verminderung der Kolbenbeschleunigung und -Verzögerung, beigetragen werden durch Vergröfserung des Druckrohrquerschnitts oder durch Kupplung mehrerer Pumpen mit versetzten Kurbeln und gemeinsamem Druckrohr.

3. Abmessungen der Pumpen.

Diese ergeben sich aus der Wasserlieferung Q (in cbm i. d. Sek.). Gegeben ist ferner Saug- und Druckhöhe und -Längen. Anzunehmen sind die minutliche Umdrehungszahl n und der Kolbenhub s. Hierbei ist die Umdrehungszahl nach Mafsgabe der Wassermassenbewegung und der Ventilkonstruktion mit Rücksicht auf rechtzeitigen Ventilschlufs festzustellen, die Hublänge nach der Kolbengeschwindigkeit, dem Kolben- (Triebwerks-) Druck und den Anlagekosten zu beurteilen. Zu rechnen ist der wirksame Kolbenquerschnitt (wobei durchgehende Kolbenstangen besonders zu berücksichtigen)

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{60\,Q}{i\,s\,\mu\,n} \text{ (alles in m);}$$

hierin $i = 1$ für einfach-, $= 2$ für doppeltwirkende Pumpen, $\mu =$ Lieferungsgrad (0,95 bis 0,97 bei guten, 0,90 bei mangelhaften Ausführungen). Der Lieferungsgrad wird vermindert durch Undichtheit der Kolben und Ventile, verspäteten Ventilschlufs und angesaugte Luft.

Arbeitsbedarf der Pumpen:

$$N = \frac{1000\,Q\,(h_d + h_s)}{75\,\eta};$$

Wirkungsgrad der Pumpen η, abgesehen vom Widerstande langer Leitungen, der besonders zu berücksichtigen, für gute Ausführungen $= 0{,}9$ bis 0,93, sonst 0,85.

4. Einzelteile der Pumpen.

Berechnung der **Wandstärke** δ der cylindrischen Teile der Pumpenkörper und Ventilkasten (Durchmesser D) nach S. 468, wobei

für Gufseisen $k_z \leq 200$ kg f. d. qcm, mindestens $\delta = 0{,}02\,D + 1$ cm,

für Stahlgufs (bei hohem Druck) $k_z \leq 500$ kg f. d. qcm, $\delta \geq 1{,}5$ cm.

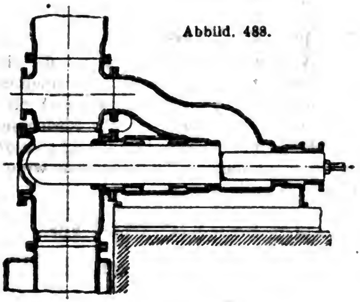
Für alle Durchdringungsstellen und Ansatzstutzen für gröfsere Oeffnungen ist besondere Festigkeitsrechnung bezw. Verstärkung oder genügende Ausrundung erforderlich.

Der **Pumpenkörper** ist so auszuführen, dafs keine Luftsäcke entstehen (besonders unter dem Deckel des Saugventilkastens und in den höchsten Teilen des Pumpencylinders) und alle angesaugte Luft durch das Druckventil aus dem Pumpenraum entweichen mufs. Angesaugte Luft im Pumpenraum vermindert den wirksamen Hubinhalt der Pumpe und verursacht Stofs bei Eröffnung der Druckventile.

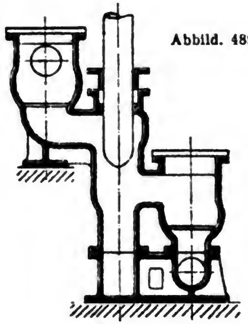
Grofse **Taucherkolben** sind auf äufseren Druck zu berechnen, wobei für Gufseisen $k_z = 300$ kg f. d. qcm genommen werden kann.

Berechnung der Wandstärke des **Druckwindkessels** nach S. 364, wobei:

für Gufseisen $k_z = 150$, für Schweifseisen $k_z = 600$ bis 700 kg f. d. qcm.

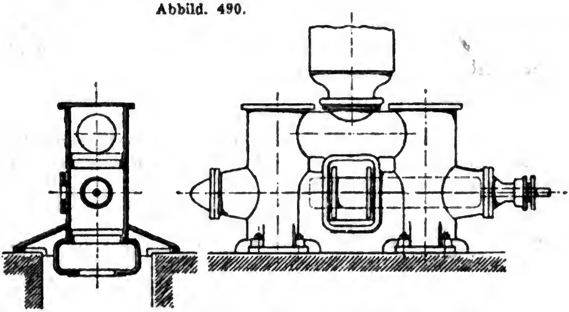


Abbild. 488.

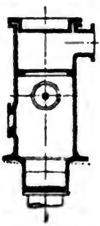


Abbild. 489.

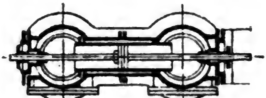
Abbild. 490.



Ausrüstung des Druckwindkessels: Manometer, Wasserstandsglas oder Probierventile, Windfüllpumpe oder Ventil am Pumpenkörper zum Ansaugen von Luft, Sicherheitsventil.



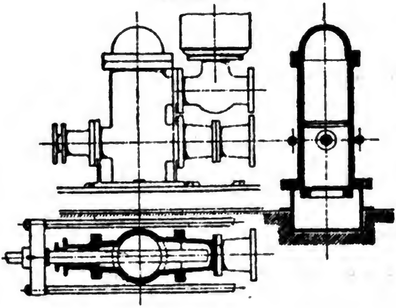
Abbild. 491.



Ausrüstung des Saugwindkessels: Vakuummeter, Wasserstandsglas, Luftzulafsventil, Einrichtung zum Absaugen überschüssiger Luft durch eine eigene Pumpe oder den Kondensator der

Dampfmaschine, Vorrichtung zum Füllen des Saugrohres mit Druckwasser bei grofsen Saughöhen (dann Fufsventil und Sicherheitsventil im Saugrohr erforderlich; aber zweckmäfsiger, für Entlüftung und Inbetriebsetzung langer Saugleitungen Strahlgebläse anzuwenden).

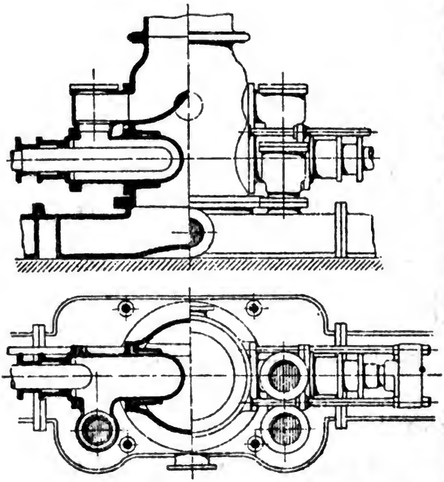
Abbild. 492.



Aufserdem erhält die Pumpe ein Ventil zur Verbindung des Druckraumes mit dem Pumpenraum, um letzteren vor dem Anlassen mit Druckwasser zu füllen, und einen Schieber oder ein Ventil, um die Druckleitung bei Revisionen von der Pumpe abzusperren. Ueber **Ventile** s. 487 u. f.

5. Anordnung der Pumpen.

Abbild. 493.



Druckpumpen überwiegend als Taucherkolbenpumpen ausgeführt (Abbild. 486 u. 487, 489 u. 490, 492 u. 493, mit Scheibenkolben Abbild. 491) und meist als Doppelpumpen angeordnet, um für Hin- und Rückgang gleiche Kraftwirkung zu erhalten. Bei hohem Druck (z. B. bei unterirdischen Wasserhaltungsmaschinen) sind dann die Stopfbüchsen nach aufsen gekehrt und die Kolbenquerhäupter durch Umführung verbunden. (Abbild. 492 u. 493). Abbild. 489 Beispiel einer stehenden Pumpe, in Abbild. 493 Saug- und Druckwindkessel als Pumpenständer ausgebildet.

Häufig statt der Doppelpumpen zur Ersparung eines Saug- und Druckventils **Differentialpumpen** (Abbild. 488). Sie arbeiten mit

einfacher Saugwirkung und verteilter Druckwirkung, wodurch ebenfalls gleiche Kraftwirkung erzielt wird. Der Querschnitt des Scheibenkolbens bezw. des gröfseren Taucherkolbens (wie in Abbild. 488) ist $= F$, derjenige des kleinen Taucherkolbens $= f$, derart, dafs der Ringquerschnitt $F - f = f$ bezw. den Saugwiderständen entsprechend noch kleiner ist, sodafs sich die Kraft beim Hin- und Rückgang gleich grofs ergiebt zu $F(h_s + h_w) + (F - f)(h_d + h'_w) = f(h_d + h'_w)$, wobei h_w und h'_w die mittlere Saug- und Druckwiderstandshöhe während des Hubes bedeuten. Hierbei wird bei einem Kolben-Hin- und Rückgang zusammen die Wassermenge gehoben: $(F - f)s + fs = Fs$, und die Berechnung der Pumpenabmessungen aus der Wasserlieferung hat daher zu erfolgen wie für eine einfachwirkende Pumpe ($i = 1$ auf S. 598).

(Hubpumpen s. Wasserhaltungsmaschinen.)

e. Wasserhaltungsmaschinen.*)

1. Hubpumpen mit Scheibenkolben (Abbild. 494).

Abbild. 494.



Besitzen den Vorteil der einachsigen Anordnung; Scheibenkolben als Ventilkolben ausgebildet (Ventile bei v). Wegen der Schwierigkeit der Kolbendichtung nur bis zu 50 m Druckhöhe verwendbar. Kolbengeschwindigkeit unter 1 m i. d. Sek. Der freie Durchgangsquerschnitt im Ventil ist meist unter $\frac{1}{3}$ des Kolbenquerschnitts, deshalb die Wassergeschwindigkeit mindestens = der dreifachen Kolbengeschwindigkeit; auch aus diesem Grunde ist der Betrieb auf sehr mäfsige Geschwindigkeiten beschränkt.

Wasserlieferung beim Aufgang: $(F - f)s$, beim Niedergang: fs, also zusammen: Fs ($F =$ Kolbenquerschnitt, $f =$ Gestängequerschnitt in qm).

Für den obersten Querschnitt des Gestängeteils, der die Hubpumpe antreibt, gilt:

Zugkraft beim Aufgang (in kg):

$$P_a = F h_s \gamma + (F - f) h_d \gamma + W_a + G,$$

wobei:

$G =$ Gewicht des betr. Gestängeteils mit dem Kolben in kg,

$\gamma =$ Gewicht von 1 cbm des zu fördernden Wassers in kg (unter gewöhnlichen Verhältnissen also $\gamma = 1000$),

$W_a =$ Summe aller Nebenwiderstände beim Aufgang, d. i. Kolben-, Stopfbüchsen- und Wasserreibung,

*) Nach Riedler.

sowie Beschleunigungskraft in kg. Für den Hubbeginn kommt die Wasserreibung, für die Hubmitte die Beschleunigungskraft nicht in betracht. (Genauere Berücksichtigung der Beschleunigungskraft bei den Druckpumpen durchgeführt (s. S. 604).

Druckkraft beim Niedergang:

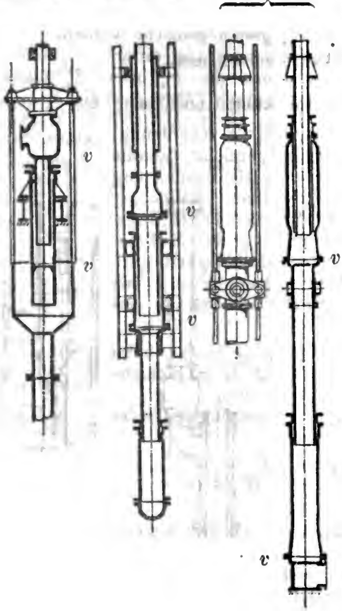
$$P_n = f h_d \gamma + W_n - G,$$

wobei:

W_n = Summe aller Nebenwiderstände beim Niedergang (s. W_a).

Für lange Gestänge mufs $P_n < 0$ sein, da das Gestänge für Druckbeanspruchung nicht genügend geführt werden kann.

Abbild. 495. Abbild. 496. Abbild. 497.



Berechnung der Abmessungen und der Leistung nach S. 598 (einfach wirkende Pumpe, $i = 1$).

Hierbei zu nehmen $\mu = 0{,}9$; $n = 10$ bis 20 i. d. Min. für Gestängelängen über 100 m, für kurze Gestänge < 50 m: n bis 30 i. d. Min., $\eta = 0{,}8$ bis 0,85 bei Anwendung von Scheibenkolben, $\eta = 0{,}9$ bei Anwendung von Taucherkolben.

Abteufpumpen sind gewöhnlich Hubpumpen mit Senkvorrichtung, meist an Drahtseilen aufgehangen und von einer Dampfwinde übertags gehoben und gesenkt. Antrieb der Kolbenstange vielfach durch Drahtseilgestänge. Für grofse Längen und starke Belastung von Seilgestängen ist der Hubverlust infolge der Ausdehnung des Seiles zu berücksichtigen.

2. Rittinger-Pumpen

(Abbild. 495 bis 497, Ventile bei v), ebenfalls einachsig, können einfach- und doppeltwirkend verwandt werden.

Einfach wirkende Rittinger-Pumpen (Abbild. 495 u. 496). Hierbei kann das Steigrohr bewegt werden, wodurch das Gestänge erspart wird (Abbild. 495). Dann gelten für die vom Antrieb der

einzelnen Pumpe herrührenden Kräfte im Gestänge dieselben Formeln für P_u und P_n wie bei Hubpumpen mit Scheibenkolben (s. S. 601), wenn unter F der (äufsere) Querschnitt des Rohrkolbens, unter f derjenige seiner Wandung verstanden wird. Oder der Pumpenkörper kann durch ein besonderes (doppeltes) Gestänge bewegt werden (Abbild. 496).

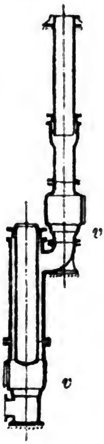
Doppelt wirkende Rittinger-Pumpen (Abbild. 497) mit Differentialanordnung in der Art, dafs ein gröfserer Taucherkolben (Querschnitt F) und ein kleinerer (Querschnitt f) zugleich wirksam sind. In der Abbildung Bewegung des Pumpenkörpers durch ein Gestänge. Dann gilt:

$$P_a = F h_s \gamma + f h_d \gamma + W_a + G;$$
$$P_n = (F - f) h_d \gamma + W_n - G.$$

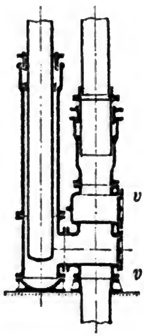
Es kann hiernach durch entsprechende Wahl von f die Kraftwirkung für Auf- und Niedergang gleich gemacht werden.

Sind mehrere Pumpen über einander angeordnet, so sind die Festigkeitsrechnungen für die Summe der P_a bezw. P_n durchzuführen, welche sich für die sämtlichen unter dem betr. Gestängequerschnitt liegenden Pumpen ergeben. (Entsprechende Rechnung für Druckpumpen s. in folgendem.)

Abbild. 498.



Abbild. 499.



3. Druckpumpen (Abbild. 498 und 499, Ventile bei v) werden am häufigsten angewandt.. Die Druckwirkung findet hier beim Niedergang statt. Sie sind zweiachsig und nehmen daher mehr Platz in Anspruch. Antrieb mit Gestänge-Gabelung. Die gesamte Druckhöhe wird in Höhen von 100 bis 150 m für die einzelnen Drucksätze eingeteilt.

Die **Gestänge-Berechnung** ist für die verschiedenen Punkte des Gestänges nach den beiden Rücksichten durchzuführen, dafs beim Niedergang kein Druck in das Gestänge kommt, was im allgemeinen erst durch besondere Belastungsgewichte erreicht wird, und dafs beim Aufgang der Gestängezug nicht die Festigkeit gefährdet. Diese Berechnungen sind, vom untersten Pumpensatze ausgehend, für die einzelnen Gestängeteile durchzuführen, und zwar stets für den Hubbeginn, weil hier die Beschleunigungskräfte ihren gröfsten Wert haben (die Wasserreibung kommt also nicht in betracht).

Bei der Gewichtsberechnung für den Niedergang wird für den betreffenden Drucksitz die Kraft P_n, welche auf seinen Kolben wirken mufs, um den Niedergang zu bewirken, gleich der Kraftwirkung der hier angreifenden Gewichte gesetzt. Dann braucht kein Druck durch das Gestänge übertragen zu werden. Es ergiebt sich unter Berücksichtigung der Beschleunigungskräfte für die Gestänge- und Wassermassen:

$$(G+B)\left(1-\frac{q_n}{9{,}81}\right)=P_n=Fh_d\gamma\left(1+\frac{F}{f_d}\frac{q_n}{9{,}81}\right)+R,$$

wobei bedeutet:

- G das Gewicht des Gestänges (mit Kolben und Umführung) zwischen dem betreffenden und dem zunächst darunter befindlichen Drucksatz, aus der vorhergehenden Festigkeitsrechnung ermittelt (s. unten),
- B die zu ermittelnde Gröfse des an dem Drucksatz zuzufügenden Belastungsgewichtes,
- R den Reibungswiderstand in den Führungen und der Stopfbüchse, je nach den besonderen Verhältnissen mit 5 bis 10% der statischen Kolbenkraft $Fh_d\gamma$ in Rechnung zu setzen (alles in kg),
- F den Kolbenquerschnitt,
- f_d den Druckrohrquerschnitt (beides in qm),
- h_d die Druckhöhe der Pumpe in m,
- q_n die gröfste Beschleunigung beim Niedergang in m i. d. Sek. (bei Schwungradmaschinen mit dem Verhältnis Kurbelhalbmesser: Schubstangenlänge $= 1:5$ je nach der Aufstellung $q_n = 0{,}8\, v^2 : r$ oder $1{,}2\, v^2 : r$, noch mit dem Hebelverhältnis des Balanciers multipliziert).

Ergiebt die Ausrechnung des Ausdrucks rechts in obiger Gleichung ein $P_n > G\left(1-\frac{q_n}{9{,}81}\right)$, so ist ein Belastungsgewicht B entsprechend der Gleichung $(G+B)\left(1-\frac{q_n}{9{,}81}\right)=P_n$ auf den Kolben aufzulegen (seltener findet statt dessen eine Vergröfserung des Gestängegewichts G über den durch die Festigkeitsrücksichten gebotenen Betrag hinaus statt).

Bei vorläufigen Rechnungen kann für mittlere Verhältnisse statt der obigen Gleichung zur Ermittlung von B annähernd gesetzt werden:

$$B+G=1{,}3\,Fh_d\gamma.$$

Dementsprechend kann auch das gesamte Gestängegewicht (mit den Belastungsgewichten), wenn i unter einander gleiche Drucksätze mit gleicher Druckhöhe vorhanden sind, schätzungsweise $= 1{,}3\,(i+1)\,Fh_d\gamma$ ermittelt werden (bei sehr tiefen Schächten wegen des grofsen Festigkeitsgewichtes gröfser).

Die Festigkeitsrechnung für den Aufgang ist für den obersten und den untersten Querschnitt eines jeden zwischen zwei Pumpen befindlichen Gestängeteils durchzuführen (Gestängequerschnitt nach unten abnehmend, entsprechend gleicher Festigkeit). Hierbei ist für die Zugkraft P_a die Summe der Gewichte und Kräfte von allen unter dem betr. Querschnitt liegenden Gestängeteilen (Σ_u) in Rücksicht zu ziehen. Es ergiebt sich:

$$10000 f k_z = P_a = \Sigma_u \left[(G + B)\left(1 + \frac{q_a}{9{,}81}\right) + F h_s \gamma + R \right],$$

wobei bezeichnet:

h_s die Saughöhe der betr. Drucksätze in m,

q_a die gröfste Beschleunigung beim Aufgang in m i. d. Sek. (bei Schwungradmaschinen entsprechend q_n zu ermitteln, s. o.),

f den Gestängequerschnitt in qm,

k_z die zulässige Beanspruchung des Gestängematerials in kg f. d. qcm ($k_z = 60$ bis 70 für Holz, $k_z = 500$ bis 600 für Schweifseisen; bei Stofsverbindungen, gewöhnlicher Verschraubung und Vernietung ist etwa 0,8 der sonstigen Beanspruchung zuzulassen).

Das Gewicht eines Gestängeteils ergiebt sich aus seiner Länge l (in m) und seinem Querschnitt f (in qm) zu $f l \gamma_g \beta$, wobei bezeichnet:

γ_g das Gewicht von 1 cbm des Gestängematerials in kg (= 800 für Holz, 7800 für Eisen),

β eine Zahl > 1 entsprechend der Gewichtsvermehrung durch die Gestängeverbindungen ($\beta = 1{,}25$ für Rundgestänge, $= 1{,}35$ für Walzeisen und Holzgestänge).

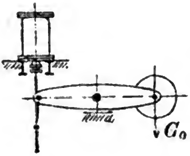
Aus der Berechnung auf Festigkeit folgen bei gröfseren Schachttiefen für die obersten Gestängeabschnitte so grofse Gewichte, dafs die Berechnung für den Niedergang ein $P_n < G\left(1 - \frac{q_n}{9{,}81}\right)$, also einen Ueberschufs des Gestängegewichts über den zur Ueberwindung des Widerstandes erforderlichen Betrag ergiebt. Ferner sind, wenn nach dem obigen jede Druckbeanspruchung im Gestänge vermieden ist, das Gewicht des obersten Gestängeabschnitts, sowie die etwa unmittelbar (nicht durch einen Balancier) mit dem Gestänge verbundenen hin- und hergehenden Teile der Dampfmaschine nicht zur Ausübung der Pumpenwirkung in Anspruch genommen. Dieser (in noch höherem Mafse bei Hub- und Rittinger-Pumpen auftretende) Ueberschufs mufs ausgeglichen werden, u. zw., wenn nicht durch Dampfdrosselung beim Niedergang und überschüssigen Dampfdruck beim Aufgang, durch besondere Ausgleichungen.

Aufserdem mufs bei doppelt wirkenden Dampfmaschinen, wenn kein Druck in das Gestänge kommen soll, noch eine besondere

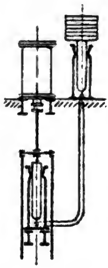
Ausgleichung der Dampfkraft beim Niedergang des Gestänges stattfinden. Die Dampfmaschine braucht dann bei Auf- und Niedergang nur die Hälfte derjenigen Kraft auszuüben, welche zur Hebung des Gestängegewichts erforderlich ist, und die betr. Ausgleichung mufs eine Kraftwirkung gleich derjenigen der Dampfmaschine haben. Beim Aufgang summieren sich dann beide Kräfte zu dem erforderlichen Betrage.

Mittel der Ausgleichung sind:

Abbild. 500.



Abbild. 501.



1. Balancier mit Gegengewicht (Abbild. 500).

2. Wasser-Gegendruck (Abbild. 501). Das Pumpengestänge treibt einen Wasserdruckkolben, der mit einem übertags befindlichen Kraftsammler in Verbindung steht.

3. Konstanter Dampfdruck, z. B. Entlastungscylinder oberhalb oder unterhalb des Dampfcylinders.

4. Wassersäulen z. B. eingeschaltete Pumpensätze ohne Ventile, die mit konstanter Wassersäule das Gestänge entlasten.

Beispiel

für die Gestängeberechnung einer **doppeltwirkenden Maschine** mit Vermeidung von Druckbeanspruchung im Gestänge und **mit Ausgleichung durch ein Gegengewicht.**

Fünf unter sich gleiche Drucksätze mit je 100 m Druckhöhe. $Q = 3{,}5$ cbm i. d. Min., $n = 7$ Doppelhübe i. d. Min. Daraus Hub $= 2{,}4$ m, Taucherkolben-Durchmesser $= 580$ mm.

Nach der obigen Gewichtsberechnung für den Niedergang folgt für jeden Drucksatz ein auszuführendes Gesamtgewicht $G + B = 28\,000$ kg; Kolbengewicht $= 2200$ kg. Daher am untersten Drucksatz zuzufügen ein Belastungsgewicht von $28\,000 - 2200 = 25\,800$ kg.

Gestänge zwischen dem untersten und dem darüberliegenden Drucksatz im untersten Querschnitte berechnet nach der obigen Festigkeitsformel für den Aufgang, unter Einsetzung der Kräfte sowie des Kolben- und Belastungsgewichtes vom untersten Drucksatze. Durchmesser $= 85$ mm.

Dann Berechnung desselben Gestängeteils in seinem obersten Querschnitt und der anschliefsenden Umführung unter Hinzufügung des Eigengewichts dieses Gestängeteiles zu den obigen Kräften und Gewichten, wobei zur Ermittlung des Eigengewichts vorläufige (nachher zu prüfende) Annahme über den mittleren Querschnitt. Durchmesser des obersten Gestängequerschnitts $= 95$ mm, der Umführungsstangen $= 80$ mm.

Daraus ergiebt sich das Gewicht des Gestänges zu 5800 kg. Gewicht der Umführung $= 1600$ kg, des Kolbens $= 2200$ kg, daher am vorletzten Drucksatz ein Belastungsgewicht zuzufügen von $28\,000 - (5800 + 1600 + 2200) = 18\,400$ kg.

Gestängequerschnitt über dem vorletzten Drucksatz berechnet unter Berücksichtigung der Kräfte, der Kolben- und Belastungsgewichte von beiden Pumpen sowie des Gestängegewichts zwischen ihnen u. s. w.

Es ergiebt sich schliefslich: Auf den Balancier der Dampfmaschine wirkendes Gesamtgewicht von Gestänge, Kolben, Umführungen und Belastungsgewichten = 181 000 kg. Die zur Ueberwindung des gesamten Niedergangswiderstandes erforderliche mittlere Kraft berechnet sich zu 121 000 kg. Daher ist am anderen (gleich langen) Balancier-Arme ein Gegengewicht anzubringen von 181 000 — 121 000 kg = 60 000 kg. Zu diesem ist noch, um die doppelte Wirkung der Maschine zu erzielen, ein Gewicht von $\frac{1}{2} \cdot 121\,000$ kg hinzuzufügen, sodafs das ganze Gegengewicht 120 500 kg beträgt.

Wasserhaltungsmaschinen ohne Gestänge (unterirdische) sind wie gewöhnliche Dampfpumpen unter Berücksichtigung des beschränkten Raumes, jedoch mit weitgehender Wahrung guter Zugänglichkeit und unter Vermeidung verwickelter Einzelteile zu entwerfen.

VI. GEBLÄSE UND KOMPRESSOREN.

A. Allgemeines.

(Vergl. S. 250 u. f.)

Die von einem Gebläse zu liefernde Luftmenge ist in der Regel gegeben in cbm, reduziert auf einen Barometerstand von 760 mm und eine Temperatur von 0° C, oder in kg.

Das Gebläse ist derart zu bemessen, dafs es auch bei der geringsten, an dem betreffenden Orte vorkommenden Dichtigkeit der Luft die nötige Luftmenge zu liefern im stande ist. Man hat der Rechnung somit die höchste örtliche Temperatur und den niedrigsten Barometerstand zu grunde zu legen. (Berücksichtigung der Höhe über dem Meeresspiegel bei hochgelegenen Hüttenwerksgebläsen.)

Um die Gebläseabmessungen nicht unnötig grofs zu erhalten, empfiehlt es sich, die Luft dort zu entnehmen, wo sie am kühlsten und trockensten ist; also thunlichst nicht aus dem Maschinenraum.

Das Gewicht von 1 cbm trockener Luft in kg beträgt nach S. 253:

$$\gamma = 0{,}4643 \frac{b}{273 + t},$$

worin b den Barometerstand in mm Quecksilbersäule, t die Temperatur in Graden C bezeichnet.

Das Gewicht von 1 cbm Luft mittlerer Feuchtigkeit mit der a. S. 251 angegebenen Konstanten:

$$\gamma = 0{,}4626 \frac{b}{273 + t}.$$

Von den beiden nachfolgenden Tafeln enthält die erste Werte des specifischen Volumens v der Luft (Raum von 1 kg Luft in cbm), die zweite Werte des Verhältnisses β des specifischen Gewichtes der Luft bei verschiedenen Temperaturen und Barometerständen zu dem specifischen Gewicht bei 0° und 760 mm Barometerstand.

Tafel des specifischen Volumens v.

cbm f. d. kg.

b	$t =$									
mm	— 10°	— 5°	0°	+ 5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
800	0,711	0,724	0,738	0,751	0,765	0,778	0,792	0,805	0,819	0,832
790	0,720	0,733	0,747	0,761	0,774	0,788	0,802	0,815	0,829	0,843
780	0,729	0,743	0,757	0,770	0,784	0,798	0,812	0,826	0,840	0,854
770	0,738	0,752	0,766	0,781	0,795	0,809	0,823	0,837	0,851	0,865
760	0,748	0,762	0,777	0,791	0,805	0,819	0,833	0,848	0,862	0,876
750	0,758	0,773	0,787	0,801	0,816	0,830	0,845	0,859	0,873	0,888
740	0,768	0,783	0,798	0,812	0,827	0,841	0,856	0,871	0,885	0,900
730	0,779	0,794	0,808	0,823	0,838	0,853	0,868	0,883	0,897	0,912
720	0,790	0,805	0,820	0,835	0,850	0,865	0,880	0,895	0,910	0,925
710	0,801	0,816	0,831	0,847	0,862	0,877	0,892	0,907	0,923	0,938
700	0,812	0,826	0,843	0,859	0,874	0,889	0,905	0,920	0,936	0,951
690	0,824	0,840	0,855	0,871	0,887	0,902	0,918	0,934	0,949	0,965
680	0,836	0,852	0,868	0,884	0,900	0,916	0,932	0,947	0,963	0,979
670	0,849	0,865	0,881	0,897	0,913	0,929	0,945	0,962	0,978	0,994
660	0,861	0,878	0,894	0,911	0,927	0,943	0,960	0,976	0,993	1,009
650	0,875	0,891	0,908	0,925	0,941	0,958	0,975	0,991	1,008	1,024
640	0,888	0,905	0,922	0,939	0,956	0,973	0,990	1,007	1,024	1,040

Tafel des Verhältnisses β.

b	$t =$									
mm	— 10°	— 5°	0°	+ 5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
800	1,093	1,072	1,053	1,034	1,015	0,998	0,981	0,964	0,949	0,933
790	1,079	1,059	1,039	1,021	1,003	0,985	0,969	0,952	0,937	0,921
780	1,065	1,045	1,026	1,008	0,990	0,973	0,956	0,940	0,925	0,910
770	1,052	1,032	1,013	0,995	0,977	0,960	0,944	0,928	0,913	0,898
760	1,038	1,019	1,000	0,982	0,965	0,948	0,932	0,916	0,901	0,886
750	1,024	1,005	0,987	0,969	0,952	0,935	0,920	0,904	0,889	0,875
740	1,011	0,992	0,974	0,956	0,939	0,923	0,907	0,892	0,877	0,863
730	0,997	0,978	0,961	0,943	0,927	0,911	0,895	0,880	0,865	0,851
720	0,983	0,965	0,947	0,930	0,914	0,898	0,883	0,868	0,854	0,840
710	0,970	0,952	0,934	0,917	0,901	0,886	0,870	0,856	0,842	0,828
700	0,956	0,938	0,921	0,905	0,889	0,873	0,858	0,844	0,830	0,816
690	0,942	0,925	0,908	0,892	0,876	0,861	0,846	0,832	0,818	0,805
680	0,929	0,911	0,895	0,879	0,863	0,848	0,834	0,820	0,806	0,793
670	0,915	0,898	0,882	0,866	0,850	0,836	0,821	0,808	0,794	0,781
660	0,901	0,885	0,868	0,853	0,838	0,823	0,809	0,796	0,782	0,770
650	0,888	0,872	0,855	0,840	0,825	0,811	0,797	0,784	0,771	0,758
640	0,874	0,858	0,842	0,827	0,812	0,798	0,785	0,771	0,759	0,746

Die für ein Gebläse aufzuwendende Nutzarbeit setzt sich zusammen: 1. aus der Arbeit der Kompression, 2. aus der Arbeit des Fortdrückens der Luft, 3. aus der Arbeit, welche erforderlich ist, um der Luft die in den Kanälen notwendige Geschwindigkeit (entsprechend einer lebendigen Kraft) zu erteilen.

Bei Gebläsen für höhere Drücke kommen nur die beiden ersten Arbeitsanteile in betracht; bei Gebläsen für niedrige Drücke (Ventilatoren, Kapselgebläse) berücksichtigt man in der Regel nur den zweiten Arbeitsanteil, obwohl der auf die Erteilung der erforderlichen Geschwindigkeit entfallende Arbeitsanteil bei Gebläsen mit ganz geringen Druckunterschieden oft recht erheblich ist.

Die vernachlässigten Arbeitsanteile finden dann dadurch Berücksichtigung, dafs man sie zu den schädlichen Widerständen schlägt und einen entsprechend ungünstigeren Wirkungsgrad einführt.

B. Ventilatoren.*)

a. Schleudergebläse.

1. Berechnung.

Es bezeichne:

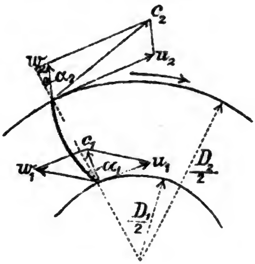
u_1 die Radgeschwindigkeit am inneren Flügelende,
u_2 „ „ „ äufseren Flügelende,
c_0 die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft in das Gehäuse tritt,
c_1 die absolute Geschwindigkeit, mit welcher die Luft in das Rad eintritt,
c_2 die absolute Geschwindigkeit, mit welcher die Luft das Rad verläfst,
c_3 die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft das Gehäuse (bezw. den Diffuser) verläfst,
w_1 und w_2 die relative Eintritts- bezw. Austritts-Geschwindigkeit; alle in m i. d. Sek.,
n die Umdrehungszahl i. d. Min.,
D_1 den inneren, D_2 den äufseren Durchmesser des Flügelrades in m,
b_1 die Flügelbreite an der Eintrittsstelle in m,
b_2 die „ „ „ Austrittsstelle in m,
Q die zu liefernde Windmenge in cbm i. d. Sek.,
v das specifische Volumen der Luft in cbm f. d. kg, vergl. Tafel a. S. 608,
h den zu erzeugenden Pressungsunterschied in mm Wassersäule, im folgenden der Kürze halber mit Pressung bezeichnet, gleichviel ob Unterdruck oder Ueberdruck erzeugt wird,
f einen Koefficienten, welcher bei gröfseren Ventilatoren guter Ausführung 1,2 bis 1,4, bei kleineren Ventilatoren 1,4 bis 1,7 zu nehmen ist.

*) Mit Benutzung von v. Hauer, Wettermaschinen. Leipzig, 1889.

1. Umfangsgeschwindigkeit des Flügelrades.

Es ist bei radialem äufsersten Flügelelement die Umfangsgeschwindigkeit:

Abbild. 502.



1) . . . . $u_2 = f\sqrt{ghv}$,

oder für Luft mittlerer Dichtigkeit mit $v = 0{,}8$ cbm f. d. kg:

2) . . . . $u_2 = f\,2{,}8\sqrt{h}$.

Diese Formel reicht auch aus, wenn das letzte Flügelelement etwas gegen den Halbmesser geneigt ist.

Ist der Winkel α_2, welchen das letzte Flügelelement mit dem Halbmesser bildet, bedeutend, so empfiehlt sich die Benutzung folgender Formel:

3) . $u_2 = f\left[\frac{D_1}{D_2}\frac{b_1}{b_2}c_1\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\frac{b_1}{b_2}c_1\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{2}\right)^2 + gvh}\,\right]$.

oder für mittlere Verhältnisse:

4) . . . $u_2 = f\left(4\operatorname{tg}\alpha_2 + \sqrt{(4\operatorname{tg}\alpha_2)^2 + 7{,}85\,h}\right)$.

α_2 ist hierin für rückwärts gekrümmte Schaufeln (Abbild. 506 und 507 a. S. 613) positiv, für vorwärts gekrümmte (Abbild. 508) negativ einzuführen.*)

2. Durchmesser des Flügelrades.

Die Geschwindigkeit c_0, mit welcher die Luft in das Gehäuse tritt, wird in der Regel = 8 m i. d. Sek. gesetzt.

Pelzer nimmt c_0 für niedrige Drücke kleiner als für grofse, u. zw. für

$h =$	10	20	50	100	150	200	250	300 mm:
$c_0 =$	3,2	4,6	5,7	7,6	9,1	10,3	10,8	11,6 m i. d. Sek.

Der Durchmesser d der Saugöffnung ergiebt sich mit Benutzung von Tafel S. 1 u. f. aus:

$$\frac{\pi}{4}d^2 = \frac{Q}{c_0} \text{ bei einseitigem Luftzutritt;}$$

$$\frac{\pi}{4}d^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{c_0} \text{ bei zweiseitigem Luftzutritt;}$$

der äufsere Durchmesser wird dann in der Regel gewählt:

$$D_2 = 2 \text{ bis } 3\,d, \text{ der innere } D_1 = d \text{ bis } 1{,}5\,d;$$

daraus ergiebt sich die **Umdrehungszahl**: $n = 60\,\frac{u_2}{\pi D_2}$.

---

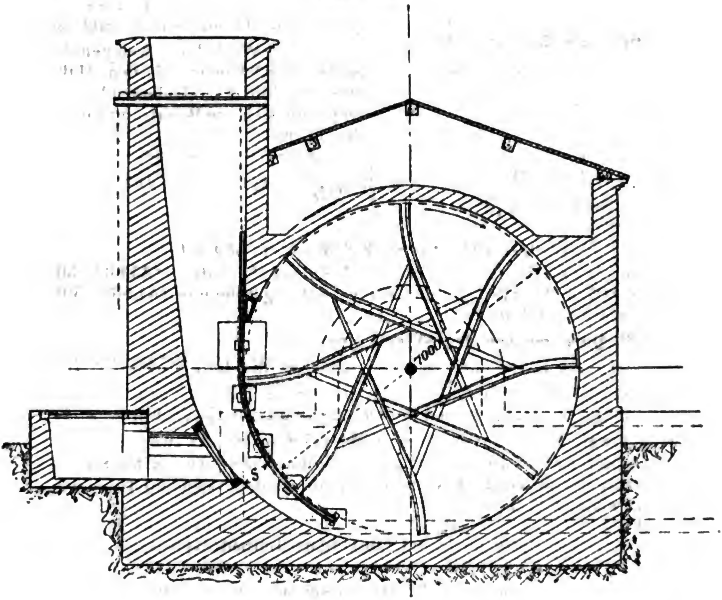
*) **Verbundventilatoren** ergeben kleinere Umfangsgeschwindigkeiten und sind daher für höhere Drücke geeignet. Versuche mit einem derartigen Ventilator ergaben für $u_2 = 50$, 75, 100 m i. d. Sek. bezw. $h = 290$, 525, 900 mm. Vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1892, S. 434.

Bei gegebener Umdrehungszahl der Antriebsmaschine empfiehlt es sich bisweilen, um zur Ersparung von Triebwerk unmittelbare Kupplung zu erreichen, D_2 gröſser zu nehmen als nach der obigen Formel sich ergiebt:

$$D_2 = \frac{60\, u_2}{\pi\, n};$$

in diesen Fällen sind dann oft absätzig wirkende Ventilatoren (Guibal, Harzé) empfehlenswert (s. Abbild. 503).

Abbild. 503.



Die **Schaufelbreite** wähle man derart, daſs die Luft die Geschwindigkeit nicht wesentlich ändert, was in Rücksicht auf Kontraktion ergiebt:

$b_1 = 0{,}25\, d$ bis $0{,}4\, d$ für einseitigen Luftzutritt,
$b_1 = 0{,}5\, d$ bis $0{,}8\, d$ für zweiseitigen Luftzutritt.

Die Schaufelbreite läſst man bei Ventilatoren für groſse Pressungen zweckmäſsig nach auſsen abnehmen, um die auf der

Vorder- und Rückseite der Schaufeln sich bildenden Unterschiede in der Pressung einigermafsen auszugleichen und damit der Hauptursache des Geräusches der Ventilatoren entgegenzuwirken; vielfach wird gewählt: $b_2 = b_1 \frac{D_1}{D_2}$. Absätzig wirkende Ventilatoren werden dagegen immer mit konstanter Flügelbreite ausgeführt. Diese ist dabei zu wählen:

$$b_2 = b_1 = 0{,}25 \text{ bis } 0{,}33\, D_2$$

und die Weite s der Schützenöffnung:

$$s = \frac{2\,Q}{b\,u_2\,i},$$

worin i die Zahl der Oeffnungen bezeichnet, meist $= 1$.

Die Schaufelzahl giebt Rittinger an zu $z = 15\,D_2$; diese Formel giebt jedoch für grofse Ventilatoren eine zu grofse Schaufelzahl. Häufig führt man nur die Hälfte der Schaufeln ganz aus, während die andere Hälfte nur aus kurzen Schaufelstücken besteht (Abbild. 503).

Absätzig wirkende Ventilatoren erhalten bedeutend weniger (8 bis 15) Schaufeln.

3. **Betriebsarbeit** in PS: $N = \frac{Q\,h}{75\,\eta}$.

Der Wirkungsgrad η schwankt, wenn N in Nutz-PS gegeben, bei grofsen Ventilatoren für Grubenlüftung u. s. w. zwischen 0,4 und 0,75; der letzte Wert wird jedoch nur ausnahmsweise erreicht.

Für kleinere Ventilatoren kann $\eta = 0{,}3$ bis 0,5 angenommen werden.

Wirkung des Auslaufraumes. Die vorstehenden Formeln gelten unter der Voraussetzung, dafs die Luft mit mäfsiger Geschwindigkeit (8 m i. d. Sek.) den Ventilator verläfst. Bei saugenden Ventilatoren ist es möglich, diese Geschwindigkeit durch entsprechende Erweiterung des Schlotes (Abbild. 503) oder durch einen ringförmigen, sich erweiternden Auslaufraum (**Diffuser**) noch weiter zu vermindern und dadurch sowohl Umdrehungszahl wie Betriebsarbeit zu ermäfsigen; während bei drückenden Ventilatoren die in der Leitung erforderliche Geschwindigkeit mafsgebend ist.

Fällt bei einem saugenden Ventilator das Gehäuse ganz fort, so erhöhen sich Umdrehungszahl und Betriebsarbeit bedeutend. Der durch die Geschwindigkeit c_2, mit welcher die Luft das Rad verläfst, dargestellte verlorene Arbeitswert beträgt in PS:

$$N_0 = \frac{1}{75}\,Q\,\frac{c_2^2}{2\,g}\,\gamma,$$

oder für mittlere Verhältnisse:

$$N_0 = 0{,}00086\,Q\,c_2^2.$$

Die Geschwindigkeit c_2 läfst sich am einfachsten zeichnerisch durch Zusammensetzung von u_2 und w_2 nach Abbild. 502 finden; die relative Austrittsgeschwindigkeit ist hierin:

$$w_2 = \frac{Q}{\pi D_2 b \cos \alpha_2}.$$

Ventilatoren mit geeignetem Auslaufraum setzen diesen Arbeitswert zum grofsen Teil in Pressungshöhe um, so dafs die als lebendige Kraft abgehende Arbeit nur $0{,}00086\, c_3^2$ beträgt.

2. Schaufelform.

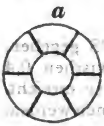
Eine bestimmte Schaufelform läfst sich als die zweckmäfsigste nicht bezeichnen, vielmehr haben sich die sehr verschiedenen in Abbild. 504 bis 508 dargestellten Formen je nach den besonderen Verhältnissen sämtlich gut bewährt.

Der Forderung stofsfreien Eintritts der Luft in die Schaufeln entspricht die Bedingung:

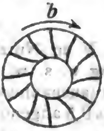
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}052 \frac{n D_1}{c_1},$$

worin α_1 den Winkel bezeichnet, welchen das innerste Schaufelelement mit dem Halbmesser bildet (Abbild. 502).

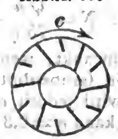
Abbild. 504.



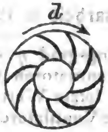
Abbild. 505.



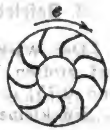
Abbild. 506.



Abbild. 507.



Abbild. 508.



Die Erfüllung dieser Bedingung ist wegen der Elasticität der Luft jedoch weniger von Bedeutung als bei Kreiselpumpen.

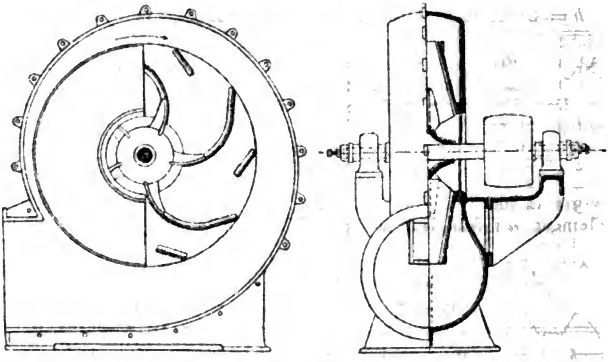
Abbild. 504 bis 508: a = gerade radiale Schaufeln am einfachsten: Wirkungsgrad leidlich; b = radial endigende Schaufeln mit rückwärts geneigtem inneren Flügelelement; Wirkungsgrad (nach Rittinger) gröfser als bei der Form a; c = rückwärts geneigte gerade Schaufeln: Umdrehungszahl gröfser, absolute Austrittsgeschwindigkeit kleiner wie bei den beiden vorigen. d = dasselbe in noch höherem Mafse wie unter c; empfehlenswert bei Ventilatoren für kleine Pressungen; e = kleine Umdrehungszahl, grofse absolute Austrittsgeschwindigkeit; derartige Ventilatoren ergeben bei grofsen Pressungen einen hohen Wirkungsgrad. Pelzer wendet mit gutem Erfolg gerade radiale Schaufeln mit seitlichen, schraubenförmigen Ansätzen an. (Verbindung von Schrauben- und Schleudergebläse.)

3. Konstruktionsangaben.

Die Schaufeln sind entweder seitlich durch fest mit denselben verbundene Blechwände abgeschlossen (Abbild. 509), oder die seitlich offenen Schaufeln bewegen sich in einem der äufseren Umgrenzung der Flügel sich möglichst anschmiegenden Gehäuse; die erste

Form giebt im allgemeinen einen etwas höheren Wirkungsgrad. Einseitiger Luftzutritt erfordert gröfsere Radabmessungen als zweiseitiger, ist aber in mancher Beziehung konstruktiv vorteilhafter; empfehlenswert ist er, wenn bei hoher Umfangsgeschwindigkeit zur Mäfsigung der Umdrehungszahl ohnehin ein gröfserer Raddurchmesser gewählt wird.

Abbild. 509.



Gehäuse gemauert, aus Gufseisen oder Blech, zuweilen aus Holz, vielfach auch Unterteil gemauert, Oberteil aus Blech.

Einlaufkegel für die Luft auf der Achse empfehlenswert. Die Achse ist so zu bemessen, dafs sie genügend fest, sowie steif genug ist, um nicht in Schwingungen zu geraten. Tiegelstahl empfehlenswert.

Flächendruck der Zapfen thunlichst klein; für die Länge ist die Formel S. 419 unten, mit $A_z = 0{,}5$, mafsgebend; der Durchmesser der Zapfen folgt aus der Bedingung genügender Biegungsfestigkeit.

Achse gegen achsiale Verschiebung gut zu sichern und womöglich mit Stellvorrichtung in dieser Richtung zu versehen.

Antrieb. Riementrieb hat sich bei Verwendung guten Leders auch für grofse Ventilatoren besser bewährt als Seiltrieb. Unmittelbarer Antrieb durch die Kraftmaschine bei kleiner Umdrehungszahl des Ventilators anzuwenden. Ventilatoren für Unterwindfeuerungen auf Schiffen durch sehr schnelllaufende Dampfmaschinen unmittelbar betrieben.

Beispiel.

Zur Lüftung eines Gebäudes ist ein saugender Ventilator zu berechnen, der bei einer Saughöhe von 20 mm Wassersäule 10 cbm Luft i. d. Sek. zu fördern im stande ist. Zum Betrieb diene eine Gasmaschine, welche womöglich unmittelbar mit dem Ventilator zu kuppeln ist. Erforderliche Betriebskraft aus:

$$N = \frac{1}{75}\frac{Qh}{\eta}, \text{ mit } \eta = 0{,}45: \; N = \frac{1}{75}\frac{10 \,.\, 20}{0{,}45} = 5{,}9 \text{ PS}.$$

Gewählt wird ein stehender Otto-Motor von 6 PS, normal mit 160 Umdrehungen i. d. Min.

Bei radial endigenden Schaufeln würde die Umfangsgeschwindigkeit des Ventilators

$$u = f\,2{,}8\sqrt{h}, \quad \text{mit } f = 1{,}4: \quad u_2 = 1{,}4 \,.\, 2{,}8\sqrt{20} = 17{,}5 \text{ m i. d. Sek.}$$

Tafeln über Schleudergebläse.

1. Saugende Schleudergebäse von A. Geisler in Düsseldorf.

h = Unterdruck (Depression) im Saugkanal in mm Wassersäule.

Nr.	D_2	Q	Werte der Umdrehungszahl n i. d. Min. für h = mm Wassersäule:						
	m	cbm i. d. Sek.	40	50	60	70	80	90	100
1	1,440	10	415	465	510	550	588	623	657
2	1,760	15	340	380	416	450	480	510	538
3	2,030	20	295	330	360	390	417	442	466
4	2,280	25	262	293	321	347	370	394	415
5	2,500	30	240	268	293	317	340	360	378
Ungefähre Betriebsarbeit für 1 cbm i. d. Sek. bei $\eta = 0{,}5$:			0,107	0,133	0,160	0,187	0,213	0,240	0,267

2. Schleudergebläse von Friedr. Pelzer in Dortmund.

(D. R. P. Nr. 31332 und Nr. 43318.)

D_2	Q	Werte der Umdrehungszahl n i. d. Min. für h = mm Wassersäule:						
m	cbm i. d. Sek.	10	20	30	40	50	60	70
0,250	0,16 bis 0,22	1000	1400	1700	1960	2175	2400	2600
0,300	0,22 „ 0,31	850	1160	1420	1650	1800	2000	2150
0,370	0,34 „ 0,48	660	950	1150	1350	1500	1620	1750
0,500	0,62 „ 0,85	500	700	850	1000	1100	1200	1300
0,600	0,9 „ 1,2	450	600	720	850	925	1000	1080
0,800	1,6 „ 2,2	320	440	540	640	700	750	820
1,000	2,5 „ 3,4	260	350	430	500	550	600	650
1,250	3,9 „ 5,3	200	280	340	420	425	480	520
1,500	5,7 „ 7,7	180	240	300	340	360	400	440
2,000	10 „ 14	120	175	215	250	280	300	330
2,500	15 „ 21	100	140	175	200	225	240	260
3,000	23 „ 31	80	120	140	170	185	200	220
3,500	31 „ 42	75	100	125	150	160	175	190
4,000	40 „ 55	65	90	110	135	140	150	165
Ungefähre Betriebsarbeit für 1 cbm i. d. Sek.:		0,027	0,053	0,080	0,107	0,133	0,160	0,187

Bei zweiseitigem Luftzutritt wird $\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{c_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{8} = 0{,}625$; $d = 0{,}892$;
$D_2 \sim 2{,}5 \,.\, 0{,}892 = 2{,}23$; gewählt wird $D_2 = 2{,}25$ m; daraus ergiebt sich:

$$n = 60\,\frac{u_2}{\pi D} = 60 \,.\, \frac{17{,}5}{3{,}14 \,.\, 2{,}25} = 142{,}8,$$

also zu wenig Umdrehungen. Mit D_2 noch herabzugehen ist des guten Wirkungsgrades halber nicht rätlich, daher werden rückwärts gerichtete Schaufeln angenommen und, mit $b_1 = b_2$, $D_1 = 0{,}6\, D_2$, $c_1 = 8$ und $g\,v = 7{,}85$, $\alpha_2 = 20^0$ geschätzt; daraus ergiebt sich mit Benutzung der Formel 8) a. S. 610:

$$u_2 = 1{,}4 \left(0{,}6 \,.\, 8 \frac{0{,}364}{2} + \sqrt{\left(0{,}6 \,.\, 8 \frac{0{,}364}{2}\right)^2 + 7{,}85 \,.\, 20}\right) = 18{,}77 \text{ m i. d. Sek.,}$$

das entspricht $n = 159$, was, mit Rücksicht auf den nur schätzungsweise gewählten Koefficienten f, hinreichend genau ist.

Unter der Voraussetzung, dafs für Schmiedefeuer ein Ueberdruck von 150 bis 200 mm und zum Schmelzen im Kupolofen etwa 400 bis 450 mm Wassersäule erforderlich ist, gilt nachstehende Tafel.

Ventilatoren für Schmiedefeuer und Giefsereien.

D_2	Zum Schmieden:			Zum Schmelzen:			Riemenscheiben:		Gewicht.
	Feuer mit 30 mm Düse.	n		Eisen.	n		Durchmesser.	Breite.	
m			PS	t i. d. Std.		PS	mm	mm	kg
0,275	1—2	3750	0,25	0,5	6000	1,00	60	50	40
0,300	2—4	3500	0,33	0,75	5600	1,25	70	55	50
0,350	4—8	3000	0,75	0,75—1,25	4800	1,75	80	60	80
0,400	8—12	2700	1,25	1,25—1,75	4300	2,50	100	70	100
0,500	12—18	2100	2,25	1,75—3	3300	4,50	120	80	160
0,650	18—30	1600	3,50	3—4,5	2500	7,00	150	90	230
0,800	30—50	1300	5,00	4,5—6,75	2100	9,00	200	100	500
1,000	50—80	1000	7,00	6,75—12	1500	12,00	250	150	850
1,200	80—110	800	9,00	12—15	1150	15,00	300	200	1200
1,500	110—150	650	11,00	15—18,75	900	18,00	350	250	1500

Für den Betrieb von Kupolöfen für Bessemerwerke dienen Ventilatoren mit Durchmessern bis über 3 m, bei 500 bis 1000 mm Wasserdruck.

b. Schraubenradgebläse.

Sind für gleiche Lieferungsmengen bedeutend kleiner und daher erheblich billiger wie Schleudergebläse, empfehlen sich daher, wenn grofse Luftmengen mit ganz geringer Pressung zu bewegen sind. Sie werden häufig, um Leitungswiderstände, welche höhere Pressungen erfordern würden, zu vermeiden, unmittelbar in die Wand des zu lüftenden Raumes eingebaut. Der ziemlich schlechte Wirkungsgrad läfst sich durch Anwendung von Leitschaufeln erhöhen, jedoch sind diese wegen des höheren Preises weniger in Gebrauch. Flügel entweder gerade oder nach Art der Schiffsschraube gekrümmt. Schraubenradgebläse von La Motte: eine zusammenhängende Schraubenfläche; Schraubenradgebläse von Blackman: Rad frei im Saugraum,

die Luft wird durch Schöpfschaufeln an der Vorderfläche und am Umfang entnommen.

Der Durchmesser des Flügelrades ergiebt sich aus:

$$D_2 = 1{,}3 \sqrt{\frac{Q}{c_2}},$$

worin Q die Luftmenge in cbm i. d. Sek., c_2 die Eintrittsgeschwindigkeit der Luft, in der Regel 8 bis 10 m i. d. Sek. ist.

Die Umfangsgeschwindigkeit ergiebt sich aus:

$$u = f\sqrt{hgv} \text{ (Tafel von } v \text{ s. S. 608)},$$

oder für mittlere Verhältnisse: $u = f \cdot 2{,}8\sqrt{h}$.

f ist zu setzen:

für die Schraube von La Motte = 1,9 bis 4,5,
für Schraubenräder mit geraden Schaufeln = 2,8 bis 3,5,
" " " gekrümmten " = 2,2 bis 2,9.

Die erforderliche Betriebsarbeit in PS beträgt:

$$N = \frac{Qh}{75\,\eta} \text{ mit } \eta = 0{,}2 \text{ bis } 0{,}3.$$

Schraubenradgebläse von G. Schiele & Co. in Bockenheim.

Druck $h = 2$ bis 6 mm Wassersäule.

D_2	Q_{max}	n_{max}	Gröfste Betriebs-arbeit.	Riemenscheibe.		Gewicht.
				Durch-messer.	Breite.	
m	cbm i. d. Sek.		PS	mm	mm	kg
0,3	0,67	2000	0,2	80	60	30
0,4	1,08	1500	0,3	100	60	50
0,5	1,75	1200	0,5	125	60	80
0,65	3,17	900	0,9	160	80	145
0,8	4,67	800	1,5	200	100	205
1,0	7,50	600	2,2	250	125	310
1,2	10,83	500	3,0	300	125	425
1,5	16,67	400	4,0	400	150	720
2,0	30,0	300	7,0	550	150	1125
2,5	47,5	230	11,5	700	160	1560
3,0	69,2	200	16,5	850	200	2250

Aufserdem 4 Nummern mit $D_2 = 0{,}2$, 0,25, 1,75 und 2,25 m. Vorstehende Angaben von Q, n, N sind als Gröfstwerte zu betrachten. Billigerer Betrieb wird erreicht durch geringere Werte von n und Q.

C. Cylindergebläse und Kompressoren.

a. Ermittlung der Abmessungen.

Es bezeichne:

F die Kolbenfläche eines Gebläsecylinders abzüglich des Kolbenstangenquerschnitts, in qm,

s den Hub in m,
D den Durchmesser des Kolbens in m,
d den Durchmesser der Kolbenstange in m,
G die i. d. Sek. zu liefernde Luftmenge in kg,*)
Q dieselbe in cbm, red. auf 0° C und 760 mm Barometerstand,
i (= 1 bezw. 2) die Zahl, welche angiebt, ob das Gebläse einfach oder doppelt wirkend ist,
β einen Koefficienten mit der a. S. 608 gegebenen Bedeutung,
v das specifische Volumen der Luft, s. Tafel a. S. 608,
μ den Lieferungsgrad, d. h. das Verhältnis der gelieferten Luftmenge zu dem vom Kolben beschriebenen Raum,
n die Umdrehungszahl i. d. Min.

Es ist dann für Eincylindergebläse:

$$sF = \frac{60}{i}\frac{Gv}{\mu n} = \frac{60}{i}\frac{Q}{\beta\mu n}, \text{ worin **)}$$

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \text{ bei beiderseitig}$$
$$F = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - \frac{d^2}{2}\right) \text{ bei einseitig}$$
durchgeführter Kolbenstange.

Bei Zwillings- und Drillingsgebläsen ist für Q $\frac{1}{2}Q$ bezw. $\frac{1}{3}Q$ einzuführen.

Mittlere Kolbengeschwindigkeit $\frac{2ns}{60}$ bei Gebläsen in der Regel 1 bis 1,5, ausnahmsweise bei geeignetem Bau der Einzelheiten 2 m i. d. Sek.

Bei Hochofengebläsen findet man:

an Balanciermaschinen s bis 3 m, dabei $n = 10$ bis 15;
„ stehenden Maschinen $s = 1$ bis 1,5 m, dabei $n = 20$ bis 30;
„ liegenden Maschinen $s < 2$ m, dabei $n = 30$ bis 40.

Stahlwerksgebläse zeigen häufig etwas gröfsere Geschwindigkeiten, 2 m i. d. Sek. und darüber; dabei $n = 30$ bis 50.

Lieferungsgrad μ bedingt durch Undichtigkeit des Kolbens und der Ventile, durch den Spannungsverlust der Luft beim Durchgang durch die Saugventile und besonders durch die Expansion der Luft im schädlichen Raum. Der letztere Einflufs ist bei höheren Pressungen gesondert zu rechnen. Es ist (s. Diagramm, Abbild. 510):

$$\mu = \psi\chi,$$

worin ψ das Verhältnis $s_1 : s$, bei stufenweiser Kompression $s_1' : s$ (s. Abbild. 511) des bei geöffneten Saugventilen zurückgelegten Kolbenweges zum ganzen Kolbenweg bezeichnet, während χ die

*) Bestimmung der erforderlichen Luftmenge bei Hochofen- und Stahlwerksgebläsen s. Zwölfter Abschnitt, Eisenhüttenkunde.

**) Für Kompressoren mit stufenweiser Kompression liefert diese Formel die Abmessungen des grofsen Cylinders.

übrigen Verluste berücksichtigt; bei Stahlwerksgebläsen und Kompressoren kann $\chi = 0{,}9$, bei Hochofengebläsen $\mu = \psi \chi = 0{,}9$ bis 0,95 angenommen werden.

Anm. Ungünstigere Werte für μ sind, unabhängig von den Gebläsemaschinen, für Verluste in den Leitungen, je nach deren Zustand, sowie der Winderhitzer anzunehmen.

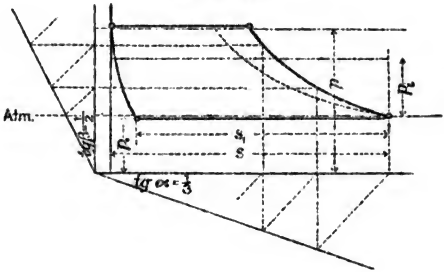
b. Ermittlung des Arbeitsbedarfs.

Von den a. S. 609 aufgeführten Arbeitsteilen kommt wesentlich nur die Kompressionsarbeit und Fortschiebungsarbeit in betracht; die Mehrarbeit für Erteilung der Windgeschwindigkeit wird nebst Ventilwiderstand zu den schädlichen Widerständen gerechnet.

Die Kompression erfolgt, wenn nicht eine sehr wirksame Kühlung eintritt, adiabatisch (vergl. S. 263). Kühlung der Wandungen bei Stahlwerksgebläsen zur besseren Instandhaltung der Cylinderflächen und Kolben zuweilen angewandt.

Bei Kompressoren für höhere Drücke hat sich die Einführung von zerstäubtem Wasser gleichzeitig mit der Luft als wirksame Kühlung bewährt.

Abbild. 510.



Zur Ermittlung des Arbeitsbedarfs verzeichne man das Druckdiagramm (s. Abbild. 510), wobei man die Saugspannung um 2 bis 3% niedriger als die Spannung der äußeren Atmosphäre (vergl. S. 607), die Druckspannung etwa um 3 bis 5% höher als die Spannung im Druckraum annehmen kann.*) Die Verzeichnung der Kompressionskurve erfolgt am einfachsten nach dem a. S. 261 gegebenen

*) Es ist dabei die absolute Druckspannung unmittelbar am Gebläse gemeint; der Druck am Ende der Leitung ist entsprechend den Leitungswiderständen niedriger; es ist demgemäß für die Druckspannung des Gebläses gegenüber dem am Ende der Leitung erforderlichen Druck ein um den Druckverlust höherer Wert in die Rechnung einzuführen.

Verfahren u. zw. befolgt die Kurve mit tg $\alpha = \frac{1}{8}$, tg $\beta = \frac{1}{5}$ etwa das Gesetz $p v^{1,41} =$ konst. (Adiabate), welches für Gebläse ohne wirksame Kühlung anzuwenden ist; die Kompression bei wirksamer Kühlung erfolgt dagegen etwa nach dem Gesetz $p v^{1,3}$ bis $p v^{1,2} =$ konst. Wählt man für die Verzeichnung der Kompressionskurve tg $\alpha = 0{,}2$, so ist tg $\beta = 0{,}267$ bis $0{,}245$, entsprechend obigem Kompressionsgesetz.

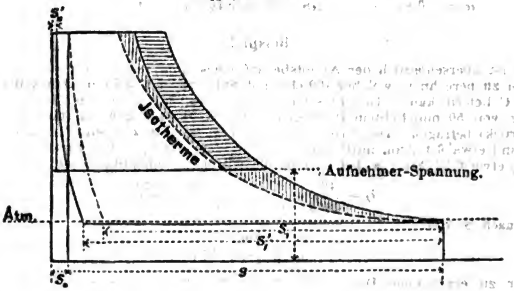
Für die Expansion des schädlichen Raumes genügt die Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes.

Die Fläche des so verzeichneten Diagramms ergiebt dann die mittlere indizierte Spannung im Gebläsecylinder. Haben Gebläse- und Dampfcylinder gleichen Hub, so ist:

$$p'_i\, O = \frac{1}{\eta}\, p_i\, F,$$

worin p_i den mittleren indizierten Druck im Gebläsecylinder, p_i' denjenigen im Dampfcylinder (vergl. S. 672), O die Kolbenfläche des letzteren bezeichnet.

Abbild. 511.



Für grofse liegende Hochofengebläse ist $\eta = 0{,}85$*), für Stahlwerksgebläse und Kompressoren $\eta = 0{,}75$ bis $0{,}83$. Bei stufenweiser Kompression in zwei Cylindern, welche für gröfsere Kompressoren mit hohem Druck sowohl zur Arbeitsersparnis als auch zur gleichmäfsigeren Verteilung der Kräfte empfehlenswert ist, kann man annehmen, dafs im Aufnehmer die Luft bei geeigneter Kühlung auf die Anfangstemperatur abgekühlt wird**), und demnach das Diagramm entwerfen, s. Abbild. 511; wagerecht gestrichelte Fläche gleich dem durch stufenweise Kompression gewonnenen Arbeitswert.

*) Vergl. Trappen, Dingler Polyt. Journ. 1885. Bd. 256, S. 119.
**) Vergl. Riedler, Verhandl. d. V. f. Gewerbefl. 1890, S. 294.

Ueberschläglich ist:

$$N_i = \varepsilon \alpha \frac{Q}{\beta} \frac{10000\,(p-1)}{75},$$

worin neben den auf S. 617 u. 618 angegebenen Bezeichnungen

N_i die indizierte Leistung der Dampfmaschine in PS,

p die absolute Spannung im Druckraum in kg f. d. qcm,

ε ein den Wirkungsgrad enthaltender Koefficient etwa für Hochofengebläse = 1,3 bis 1,4, für Stahlwerksgebläse und Kompressoren = 1,35 bis 1,5,

α ein Koefficient, welcher von dem Druck und der Kühlung abhängt und bei fehlender Kühlung gesetzt werden kann für:

p = 1,05	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7 kg f. d. qcm:
α = 0,99	0,97	0,94	0,91	0,88	0,86	0,77	0,70	0,65	0,57	0,52	0,47	0,44;

für Kompressoren mit wirksamer Kühlung und Kompression nach dem Gesetz $pv^{1,25}$ = konst. in einem Cylinder:

p =	3	4	5	6	7	8	9 kg f. d. qcm:
α =	0,61	0,53	0,48	0,43	0,40	0,37	0,34.

Beispiel.

Es ist überschläglich der Arbeitsbedarf eines Kompressors mit einfacher Kompression zu berechnen, welcher 400 cbm i. d. Std., red. auf 760 mm Quecksilberdruck und 0° C liefern kann. Die Pressung der Luft soll am Ende einer 1000 m langen Leitung von 50 mm lichtem Durchmesser 6 Atm. (kg f. d. qcm) absolut (= 5 Atm. Ueberdruck) betragen. Der Druckverlust beträgt nach S. 272, eine Temperatur von 20° C und etwa 6,4 Atm. mittleren Druck in der Leitung schätzungsweise vorausgesetzt, etwa 0,76 Atm., wobei dort in die Gleichung einzuführen ist

$$Q = \frac{400}{3600} \cdot \frac{10\,333}{10\,000} \cdot \frac{1}{6,4} \cdot \frac{273+20}{273}$$

und γ nach S. 253:

$$\gamma = \frac{64000}{29,38\,(273+20)}.$$

Der zu erzeugende Druck beträgt somit 6,76 Atm. absolut. Wird in obige Formel β entsprechend einem Druck der Atmosphäre von 735 mm und einer Temperatur von 25° C mit 0,9 eingeführt, so wird bei guter Kühlung:

$$N_i = 1,4 \cdot 0,41 \frac{400 \cdot 10\,000\,(6,76-1)}{0,9 \cdot 3600 \cdot 75} = 54,5 \text{ PS};$$

ohne Kühlung ergiebt sich mit $\alpha = 0,45$ rd. $N_i = 60$ PS.

c. Kraftverhältnisse.

(Schwungräder, Ausbalancierung.)

Die Kräfte, welche bei Gebläsen und Kompressoren auf das Triebwerk wirken, wechseln während einer Umdrehung bedeutend, besonders bei hohen Kompressionsgraden und starker Expansion des Dampfes, und erreichen an den Hubenden sehr hohe Werte, da

die höchste Spannung des Dampfes mit der in gleichem Sinne wirkenden Expansion des schädlichen Raumes im Kompressionscylinder zusammenfällt. Verzeichnung des vereinigten Kolbendruckdiagramms s. Abbild. 407 a. S. 516. Berechnung des Schwungrades s. Beispiel a. S. 516. Man begnügt sich hierbei in der Regel mit einem Ungleichförmigkeitsgrad von $\delta_s = 1:12$ bis $1:20$.

Von den verschiedenen Mitteln zur Vermeidung der Drucksummierung an den Hubenden (Nacheinströmen des Dampfes, Kurbel des Dampfcylinders versetzt gegen die des Windcylinders, Entlüftung des schädlichen Raumes nach dem Saugraum) hat sich keines dauernd bewährt. Für die Festigkeitsberechnung des Triebwerkes kommen die vereinigten Drücke in betracht, während für die Abnutzung ein mittlerer Druck anzunehmen ist.

Gelingt es bei stehenden Maschinen nicht, die Gewichtswirkung durch Gegengewicht am Schwungrad auszugleichen, so kann eine Ausgleichung durch ungleiche Dampfverteilung erreicht werden, wenn die Art der Steuerung der Dampfmaschine die Erhaltung der ungleich eingestellten Dampfverteilung gewährleistet; oder es kann der Querschnitt der oberen Dampfkolbenfläche durch eine genügend dicke, nach oben durchgeführte Kolbenstange verkleinert werden.

d. Ventile und Kolben.

Ventile. Man wähle die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft durch die Ventile geht:*)

$$u_{max} = 20 \text{ bis } 30 \text{ m i. d. Sek. in den Saugventilen,}$$
$$u_{max} = 25 \text{ bis } 35 \text{ m i. d. Sek. in den Druckventilen,}$$

wobei $u_{max} = \frac{1}{2}\pi$ mal der mittleren Windgeschwindigkeit ist.

Der aus der Geschwindigkeitserteilung sich ergebende Druckverlust beträgt hierbei noch nicht 1 % der Saug- bezw. Druckspannung. Höhere Geschwindigkeit auf kurzem Wege ist bei geeigneter Anordnung der Einzelheiten zulässig.

Um den für die Oeffnung der Ventile erforderlichen Beschleunigungsüberdruck, welcher bei ungeeigneter Konstruktion der Ventile erhebliche stofsweise Rückwirkungen auf das Triebwerk ausübt, thunlichst klein zu halten, beschränke man einerseits die Ventilmasse soweit wie möglich und wähle andererseits solche Ventilformen, welche der Druckwirkung der Luft eine genügende Angriffsfläche bieten (keine entlasteten Ventile). Die Druckventile erfordern wegen der zur Zeit der Ventileröffnung bedeutenden Kolbengeschwindigkeit in dieser Beziehung besondere Beachtung.

---

*) S. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1884, S. 5. Vergl. auch v. Hauer, Hüttenwesensmaschinen, Supplem. 1887.

Der Ventilschlufs mufs zur Vermeidung des Schlagens der Ventile, besonders bei metallischer Dichtung, im Hubwechsel erfolgen. Um dies zu ermöglichen, ist der Ventilhub thunlichst klein anzunehmen (bei Stahlwerksgebläsen mit metallischen Sitzflächen 5 bis 12 mm) und der erforderliche Durchgangsquerschnitt durch genügenden Umfang und hinreichende Zahl der Ventile zu erreichen. Die Belastung der Ventile ist dann möglichst so zu wählen, dafs mit der nach dem Hubende abnehmenden Kolbengeschwindigkeit das Ventil zu sinken beginnt. Hierzu bestimme man unter Berücksichtigung der Kontraktion beim Durchgang der Luft durch die Ventile den für die Erzeugung der gröfsten Geschwindigkeit erforderlichen Druckunterschied $(p - p_1)$ nach der Formel:

$$p - p_1 = \frac{u_{max}^2}{2g} \frac{p}{29{,}3\,(273 + t)\,\varphi^2} \text{ (vergl. S. 268);}$$

hierin ist für die Druckventile p näherungsweise der erzeugte Druck (absolut) in Atm., t die Temperatur der überströmenden Luft, φ der Geschwindigkeits-Koefficient (vergl. S. 268) und:

$$u_{max} = \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{2} q c,$$

worin α der Kontraktionskoefficient, q das Verhältnis des Kolbenquerschnittes zum Durchgangsquerschnitt sämtlicher Ventile, c die mittlere Kolbengeschwindigkeit ist. Für die Saugventile ist p der Druck der Atm. in kg f. d. qcm, näherungsweise $= 1$.

Der Luftdruck auf ein Ventil beträgt dann, wenn f die Angriffsfläche in qcm bezeichnet: $P = (p - p_1) f$; dementsprechend ist die Ventilschlufskraft zu wählen. Mit Rücksicht auf die Massenbeschränkung ist die Ventilbelastung nur durch Federdruck (Berechnung nach S. 373) auf das erforderliche Mafs zu erhöhen.

Die vorstehenden Bemerkungen gelten insbesondere für schnelllaufende Gebläse mit hohem Druck und für Kompressoren, weil bei stärkeren Drücken wegen der damit verbundenen hohen Temperaturen elastische Dichtungsstoffe (Leder, Filz, Gummi) nicht anwendbar sind und Ventilschlag empfindlich auftritt.

Für Hochofengebläse haben sich einfache Lederklappen (flügelartig) ohne Armierung, sowie Filzklappen, welche mit Leder benäht sind, am besten bewährt.

Stahlwerksgebläse für Ueberdrücke bis etwa 1.0 Atm. können elastischen Ventilbesatz erhalten (Filz, durch Blechscheiben armiert oder Vulkanfiber). Jedoch sind für die jetzt meist üblichen höheren Drücke Ventile mit Metalldichtung erforderlich.

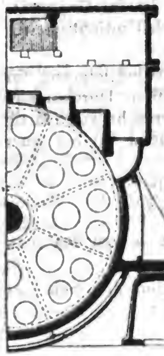
Riedler-Ventile mit gesteuertem Schlufs vermeiden die Gefahr des Schlagens, weshalb Gebläse mit derartigen Ventilen schneller betrieben werden können und daher kleiner ausfallen.

Kolben. Die Kolben von Hochofengebläsen sind häufig mit weichen Materialien (Leder, Hanf, Holz und besonders Leinwand) gedichtet und werden dann meist mit Graphit geschmiert. Für neuere Hochofengebläse wird jedoch Metallliderung mit elastischen Kolbenringen und Oelschmierung vorgezogen. Stahlwerksgebläse und Kompressoren erhalten nur metallische Liderung.

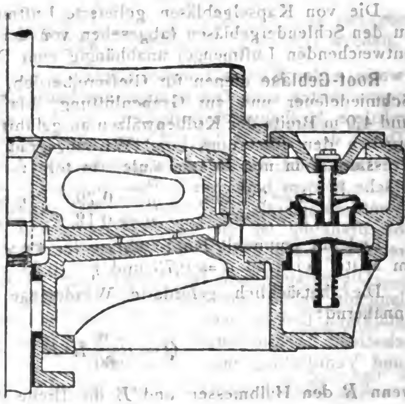
e. Anordnung der Gebläse.

Liegende Gebläse (s. Abbild. 512a) im allgemeinen billiger und leichter zu bedienen wie stehende; dagegen besitzen sie gegenüber stehenden gröſseren Leergangswiderstand und den Nachteil ungleichmäſsigen Verschleiſses der Cylinder; stehende Maschinen besitzen letzteren Nachteil nicht, sind aber unzugänglicher und kostspieliger (s. Abbild. 512b). Balanciergebläse vereinigen zum Teil die Vorteile beider Arten, sind aber noch teuerer wie stehende Gebläse.

Abbild. 512a.



Abbild. 512b.



Bei stehenden Gebläsen liegt entweder der Wind- oder der Dampfcylinder oben; der untenstehende Cylinder wird dann zweckmäſsig so eingerichtet, daſs sich der Kolben nach unten herausziehen läſst, s. Abbild. 512b. Die die Bauhöhe von stehenden Gebläsen beschränkenden, künstlichen Konstruktionen (Querhaupt zwischen Gebläse und Dampfcylinder, bügelförmige Schubstange, Verlegung der Kurbelwelle zwischen Dampf- und Windcylinder u. s. w.) sind

wesentlich unvollkommener als die einfache Anordnung mit einer durch beide Cylinder gehenden Kolbenstange, an deren unterem Ende die Schubstange angreift, trotz der bedeutenden Bauhöhe der letzteren Anordnung.

Für die **Antriebsmaschine** gelten die Grundsätze des allgemeinen Dampfmaschinenbaues. (Die für Gebläse vielfach angewandte Nacheinströmung des Dampfes ist für raschen Gang zu verwerfen.) Da die Hochofengase jetzt gröfstenteils zur Winderhitzung benutzt werden, stellt man auch an Hochofengebläse die Forderung geringen Dampfverbrauchs.

Kompressoren ohne Schwungrad verbrauchen sehr viel Dampf, empfehlen sich jedoch wegen der sehr einfachen Bedienung oft für geringe Luftmengen und finden zum Betrieb der Luftdruckbremsen im Eisenbahnwesen ausgedehnte Verwendung (Carpenter, Westinghouse u. a.)

D. Kapselgebläse.

Die von Kapselgebläsen gelieferte Luftmenge ist im Gegensatz zu den Schleudergebläsen (abgesehen von der durch Undichtigkeiten entweichenden Luftmenge) unabhängig vom Druck.

Root-Gebläse dienen für Giefsereibetrieb, zur Windlieferung für Schmiedefeuer und zur Grubenlüftung, bis zu 7,6 m Durchmesser und 4,0 m Breite der Kolbenwalzen ausgeführt. Versuche von Hartig ergaben den Lieferungs- und Wirkungsgrad (μ bezw. η) bei einer Pressung h in mm Wassersäule wie folgt:

$h = 38$ mm, $\mu = 0{,}79$, $\eta = 0{,}405$,
$h = 820$ „ , $\mu = 0{,}12$, $\eta = 0{,}143$.

Ledebur empfiehlt Root-Gebläse für Pressungen bis zu 400 mm, im Mittel sei dann $\mu = 0{,}75$ und $\eta = 0{,}45$.

Die thatsächlich geförderte Windmenge in cbm i. d. Sek. ist annähernd:

$$Q = \mu \frac{n}{60} R^2 B,$$

wenn R den Halbmesser und B die Breite der Kolben bezeichnet. Höhere Drücke erzielt man mit Kapselgebläsen mit Flächendichtung: **Präcisionsgebläse von Enke** gestatten ohne erhebliche Verluste 750 mm Wassersäule bei einfacher, bis 3000 mm bei dreifacher Dichtung.

Fabry-Gebläse besitzt gewöhnlich 2 dreizähnige Kolben; Ausführungen zeigen Durchmesser bis zu 4 m, Kolbenbreiten bis zu 3 m; da sie keine höheren Pressungen vertragen, fast nur für Grubenlüftung angewandt. Zweckmäfsig für $h > 20$ mm, gewöhnlich $h =$ 40 bis 60 mm. η bis zu 0,5.

Root-Gebläse von G. Schiele & Co. in Bockenheim.

Windmenge i. d. Min. cbm	Umdrehungszahl i. d. Min.	Durchmesser d. Ausströmung. mm	Zum Schmieden. Anzahl der Feuer.	Durchmesser der Düsen. mm	PS.	Zum Schmelzen. schmilzt Eisen i. d. Std. t	PS.	Durchmesser der Rohr-Flanschen. mm	Riemenscheiben. Zahl	Durchmesser. mm	Breite. mm	Gewicht. kg
0,75-1	400	40	1	15-20	—	—	—	130	1	75	50	—
1,25	400	40	1	20	—	—	—	130	1	75	60	40
2	400	60	1	25	—	—	—	130	1	90	60	50
2,75	400	80	2	25	0,25	—	—	160	1	100	80	80
4,5	400	100	3 2	25 30	0,50	—	—	180	1	125	90	100
9	400	125	4	30	0,75	0,50	1	220	1	200	100	200
15	390	150	6 4	30 35	1,00	0,75	1,5	240	1	250	120	300
23	380	175	11 8	30 35	1,25	1,25	2	300	1	300	130	420
34	370	200	17 12	30 35	1,50	1,75	3	325	2	275	100	830
48	360	225	24 17	30 35	2,25	2.5	4	350	2	300	110	1020
65	350	250	30 22	30 35	3,0	3,5	5,5	400	2	325	110	1350
80	340	300	30	35	3,5	5,0	7	450	2	350	120	1650
105	330	325	40	35	4	6,5	8,5	490	2	400	130	2000
130	320	350	50	35	5	8,3	9—10	500	2	450	140	2660
155	310	400	64	35	6	10,5	11—12	575	2	500	150	3300

E. Dampfstrahlgebläse.

Zum Betrieb von Feuerungen meist saugend angewandt (Kupolöfen, Flammöfen), drückend nur dann, wenn der bedeutende Wassergehalt der Luft vorteilhaft (Gasgeneratoren) oder nicht schädlich ist.

Bedienung sehr einfach, Anschaffungskosten gering, Dampfverbrauch ziemlich bedeutend.

Unterwindgebläse von Gebr. Körting, Hannover, in 10 Nummern mit kleinsten Dampfrohrweiten von 10 bis 50 mm, entsprechend kleinsten Windrohrweiten von 125 bis 700 mm.

Zum Betriebe von Martin-Oefen dienen verkürzte Unterwindgebläse für 20, 40, 60 cbm Wind i. d. Min.

SIEBENTER ABSCHNITT.

KRAFTMASCHINEN.

I. BELEBTE MOTOREN.

1. Die **Leistung** eines belebten Motors hat bei einer mittleren Kraft, einer mittleren Geschwindigkeit und einer mittleren Arbeitszeit einen gröfsten Wert. Bezeichnet:

L die gröfste tägliche Leistung eines belebten Motors in mkg,
P die dabei ausgeübte Kraft in kg,
v die entsprechende Geschwindigkeit i. d. Sek. in m,
t die tägliche Arbeitszeit, welche L entspricht, in Sek., so ist:

$$L = Pvt.$$

2. Ist die Geschwindigkeit, mit welcher der belebte Motor arbeitet, nicht v, sondern v', und die tägliche Arbeitszeit t', so hat man die **Kraft** P' zu setzen:

nach Gerstner $$P' = \left(2 - \frac{v'}{v}\right)\left(2 - \frac{t'}{t}\right) P,$$

nach Maschek $$P' = \left(3 - \frac{v'}{v} - \frac{t'}{t}\right) P.$$

Letztere Formel ist die gebräuchlichere.

3. Kraft P, Geschwindigkeit v und Leistung E belebter Motoren.

(Mittlere Arbeitszeit $t = 8$ Std. $= 28800$ Sek.)

Motor ohne, bezw. mit Maschine.	P kg	v m i. d. Sek.	$E = Pv$ mkg i. d. Sek.	$L = 28800\,Pv$ mkg
Mensch, ohne Masch.	15	0,8	12	345600
„ am Hebel	5	1,1	5,5	158400
„ an der Kurbel*)	10	0,8	8	230400

*) Nach Riedler beträgt für ununterbrochene Förderung an der Kurbel $P = 7$ bis 8 kg, $v = 0,9$ m i. d. Sek., also $E = 6,8$ bis 7,2 mkg i. d. Sek., $L = 181440$ bis 207360 mkg.

Motor ohne, bezw. mit Maschine.	P kg	v m i. d. Sek.	$E = Pv$ mkg i. d. Sek.	$L = 28800\,Pv$ mkg
Mensch, am Göpel	12	0,6	7,2	207360
„ am Haspelseil	25	0,3	7,5	nicht andauernd
(lotrecht)	10	0,75	7,5	216000
„ am Steigrad	64	0,15	9,6	276480
Pferd, ohne Maschine	60	1,25	75	2160000
„ am Göpel*)	45	0,9	40,5	1166400
Ochse, ohne Maschine	60	0,8	48	1382400
„ am Göpel	65	0,6	39	1123200
Maulesel, o. Masch.	50	1,1	55	1584000
„ am Göpel	30	0,9	27	777600
Esel, ohne Maschine	40	0,8	32	921600
„ am Göpel	14	0,8	11,2	322560

Leistung kräftiger Männer am Hebel der Feuerspritzen bei zweiminutlicher Arbeitszeit bis zu 0,5 PS; im Mittel 0,360 PS an Wagenspritzen, 0,378 PS an Abprotzspritzen.**)

II. WASSERMOTOREN.

A. Lotrechte Wasserräder.***)

Bezeichnungen.

Q die i. d. Sek. zufliefsende Wassermenge in cbm,

H das für das Rad verfügbare Gefälle $= \frac{c_1^2}{2g} + H' - \frac{c_2^2}{2g}$,

worin bedeutet:

c_1 die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser im Obergraben an dessen Ende vor dem Motor ankommt, in m i. d. Sek.,

c_2 die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser, nachdem es den Motor verlassen, im Untergraben an dessen Anfang abfliefst, in m i. d. Sek.,

H' den Höhenunterschied der Wasserspiegel im Ober- und im Untergraben an den soeben bezeichneten Stellen, in m,

*) Die Schwengel seien nicht unter 4 m lang.

**) Vergl. C. Bach, Konstruktion der Feuerspritzen, S. 90 u. 91.

***) Nach C. Bach, Die Wasserräder. Stuttgart, 1886, II. Teil.

$N_a = \frac{1000\,Q H}{75}$ die verfügbare Gröfse der Wasserkraft in PS,

$N = \eta N_a$ die Nutzleistung des Rades in PS,

$\eta = \frac{N}{N_a}$ der Wirkungsgrad des Rades,

n die Umdrehungszahl des Rades i. d. Min.,

$D = 2R$ der äufsere Durchmesser des Rades in m,

b die Radbreite im lichten in m,

a die Radtiefe im lichten in m,

$\mathfrak{z}$ die Anzahl der Schaufeln,

$e = \frac{\pi D}{\mathfrak{z}}$ die Schaufelteilung in m,

i die Anzahl der Arme eines Armsystems,

$v = \omega R = \frac{2\pi R n}{60}$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rades in m i. d. Sek.,

$\varepsilon = \frac{Q}{a b v}$ der Füllungskoefficient,

$q = \frac{60\,Q}{\mathfrak{z} n}$ das in einem Schaufelraume enthaltene Wasser in cbm,

$f = \frac{q}{b}$ in qm,

h_e der Gefällverlust beim Eintritt in m,

h_a der Gefällverlust beim Austritt in m,

g die Beschleunigung durch die Schwere, $= 9{,}81$ m.

a. Oberschlächtige Wasserräder.

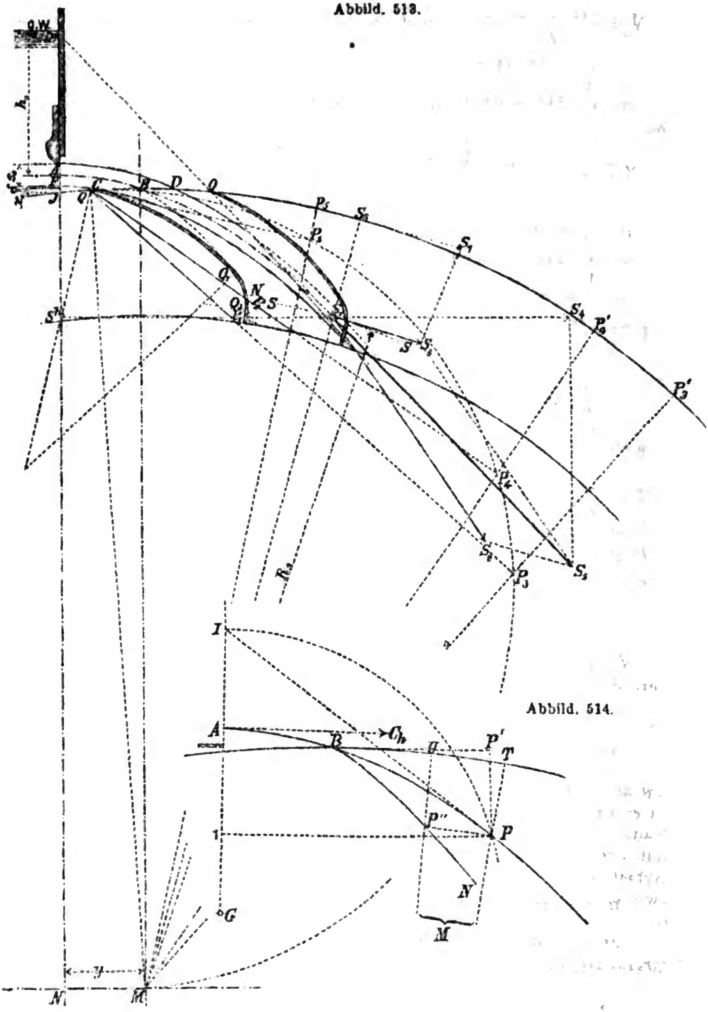
Wassereintritt in der Regel im Scheitel des Rades, bei verhältnismäfsig grofser Umdrehungszahl vor dem Scheitel, sofern möglichste Ausnutzung der Wasserkraft angestrebt wird; hierbei mufs dann für das Anlassen des Rades die Drehungsrichtung gesichert werden.

Bei Annahme der **Umfangsgeschwindigkeit** v ist zu beachten, dafs mit abnehmendem v folgende Gröfsen wachsen: der Wirkungsgrad bis zu einer gewissen Grenze, die Abmessungen und damit die Kosten des Rades, das Uebersetzungsverhältnis nach dem Triebwerke hin, hiermit das Gewicht und die Kosten der Vorgelege, der Verlust an Arbeit durch Zapfen- und Zahnreibung. In der Regel wird v zwischen 1,5 und 2 m i. d. Sek. zu wählen sein, unter Berücksichtigung der besonderen Verhältnisse.

Für die **wagerechte Komponente** c_h der Geschwindigkeit des Wasserstrahles (Abbild. 514) bietet ersten Anhalt die Gleichung:

$$c_h = 2{,}5\sqrt{v}\,.$$

Abbild. 513.



Abbild. 514.

Die hierzu erforderliche Druckhöhe:

$$h_0 = (1 + \zeta') \frac{c_h^2}{2g}, \text{ worin } \zeta' = 0{,}1 \text{ bis } 0{,}15.$$

Beim Wassereintritt im Radscheitel findet sich (Abbild. 513), wenn x'' das Freihängen bezeichnet, der **Durchmesser des Rades:**

$$2R = D = H - \left[(1 + \zeta') \frac{c_h^2}{2g} + \frac{s_0}{2} + \delta + x_0 - x' + x'' \right],$$

worin $x' = R - JN$.

Hierin bezeichnet:

x_0 den Spielraum zwischen Radumfang und Unterkante Einlaufblech. Hiermit kann man bei nicht zu breiten eisernen Rädern bis auf 5 mm heruntergehen, doch ist es mit Rücksicht auf die aus dem Schaufelraume entweichende Luft besser, mehr zu geben; bei hölzernen Rädern wird nur im Falle geringer Breite weniger als 15 mm angenommen werden dürfen. Zu erwartende Eisbildung im Winter kann den zulässigen Mindestwert von x_0 beeinflussen;

x'' das Freihängen. Dieses ist unter Beachtung des etwa zu erwartenden Steigens des Unterwasserspiegels (über den normalen, für welchen der Entwurf gefertigt) festzulegen; nur in Ausnahmefällen erscheint Waten des Rades im Unterwasser zulässig. Mit $x'' = 0{,}03$ bis 0,1 m pflegt man meist auszukommen;

s_0 die Strahlstärke (s. f. S.);

δ die Stärke der Einlaufschaufel (s. f. S.).

Zur Gewinnung eines ersten Wertes kann geschätzt werden:

$$D = H - (1{,}1 \frac{c_h^2}{2g} + 0{,}2) \text{ bis } H - (1{,}1 \frac{c_h^2}{2g} + 0{,}1).$$

Mit dem erhaltenen D wird unter Annahme einer für geeignet erachteten Umdrehungszahl $v = \frac{\pi D n}{60}$ ermittelt, dann nochmals c_h berechnet und h_0 festgestellt.

Radtiefe: $$a = \frac{1}{6} \sqrt[3]{H} \text{ bis } \frac{1}{4} \sqrt[3]{H},$$

wobei der Einfluſs von a auf die Gröſse des Eintrittsverlustes, auf die Breite, sowie auf die Kosten des Rades im Auge zu behalten und im Falle der Anordnung hölzerner Radkränze der Beschränkung zu gedenken ist, welche die Breite der verfügbaren Hölzer verursacht.

Radbreite: $b = \frac{Q}{a v \varepsilon}$, worin $\varepsilon = 0{,}25$ bis $0{,}5$.

Zu beachten ist, daſs für b gröſser als etwa 1,7 m ein mittlerer Kranz oder wenigstens eine Unterstützung des Radbodens nötig zu werden pflegt.

Strahlbreite: $b_0 = b - 0{,}4$ bis $b - 0{,}2$ für Räder ohne Mittelkranz,

$\frac{b_0}{2} = \frac{b}{2} - 0{,}4$ bis $\frac{b}{2} - 0{,}2$ für Räder mit Mittelkranz.

Sind ausnahmsweise besondere Oeffnungen zum Entweichen der Luft vorhanden (Lüftungsöffnungen), so kann die Strahlbreite gröfser genommen werden.

Strahlstärke: $s_0 = \frac{Q}{b_0 c_h}$.

Stärke der **Einlaufschaufel** von Eisenblech: $\delta = 5$ bis 8 mm.

Der **Mittelpunkt** M des Rades gegenüber dem Punkte A wird festgelegt durch:

$$y = \sqrt{2p}\sqrt{-(R-m+p)+\sqrt{2Rm-m^2+(R-m+p)^2}};$$

$$2p = 4\frac{c_h^2}{2g}; \qquad m = \frac{s_0}{2}+\delta+x_0;$$

$$x' = R - \sqrt{R^2-y^2}.$$

Nun ist x'' zu ermitteln und zu prüfen, ob das vorhandene Freihängen geeignete Gröfse besitzt; im verneinenden Falle ist D abzuändern und die Rechnung zu wiederholen.

Die **Mittellinie** ABP **des Wasserstrahles** (Abbild. 514 a. S. 630) ist eine Parabel mit A als Scheitel (bestimmt durch h_0), der Wagerechten c_h als Scheiteltangente, dem durch A gezogenen Lot als Hauptachse und mit dem um $AG = \frac{c_h^2}{2g} = \frac{h_0}{1+\zeta}$ unterhalb A gelegenen Brennpunkte G. Ein beliebiger Punkt P der Parabel ergiebt sich dadurch, dafs $AI = A1$ gezeichnet und von G aus mit GI als Halbmesser ein Kreis beschrieben wird. Der Schnittpunkt des Kreises mit der durch 1 gezogenen Wagerechten ist ein Punkt der Parabel und die Gerade PI Tangente im Punkte P.

Das bei B in das Rad eingetretene Wasserteilchen legt den **absoluten Weg** BP zurück; der zu dem beliebigen Punkte P des letzteren gehörige Punkt P'' der **relativen Bahn** $BP''N$ findet sich, indem durch P der Halbmesser MPT gezogen und $TU = \frac{BP'}{c_h}v$ gemacht wird. Der durch U bestimmte Halbmesser $UP''M$ schneidet den aus dem Radmittelpunkt M durch P beschriebenen Kreisbogen in dem gesuchten Punkte P''.

Schaufelform.

Ohne Beachtung des Austrittsverlustes wäre die Schaufel nach der relativen Bahn BN zu gestalten; mit Berücksichtigung des Austrittsverlustes kann in folgender Weise vorgegangen werden.

Eiserne Schaufeln, Abbild. 513.

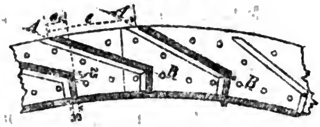
Die Schaufelkurve wird aus zwei Kreisbögen QQ_1 und Q_1Q_2 derart zusammengesetzt, dafs sie, die relative Bahn BN berührend, den Radumfang in einem Punkte Q schneidet, welcher um Bog. $BQ \leq 0{,}5\,e = 0{,}5\,QO$ von B absteht; in Q_2 schliefst sich eine

gerade, radial gerichtete Strecke an, deren Länge mindestens gleich der Höhe des Winkeleisens ist, das zur Befestigung der Schaufel an dem Radboden dient.

Bei Rädern mit Kropf wird sich die Schaufelform der relativen Bahn möglichst anschliefsen.

Hölzerne Schaufeln, Abbild. 515.

Abbild. 515.



Winkel, unter welchem die Schaufel den Radumfang schneidet, $= 30^0$, so dafs die Richtungen AB Tangenten an einem Kreise vom Halbmesser 0,866 R; bei gröfseren Füllungen wird bis zu 0,9 R, bei kleineren herab auf 0,85 R gegangen. Deckung e_1 ungefähr 0,25 e.

Schaufelteilung, Armzahl.

Anhalt giebt $e = 1{,}33\, \widehat{CD}$ bis $1{,}50\, \widehat{CD}$ (Abbild. 513), worin $\widehat{CD}$ den Einlaufbogen bedeutet.

Das hierdurch gewonnene e führt zu der vorläufigen Schaufelzahl $\mathfrak{z} = \pi D : e$. Mit Rücksicht auf die Konstruktion des Rades wird $\mathfrak{z}$ in der Regel ein Vielfaches der Armzahl sein müssen, für welche gewählt werden darf:

$$i = D + 2.$$

Arbeitsverluste.

1. **Eintritt.** Für den Schnittpunkt S_1 (Abbild. 513) der Mittellinie ABS_1 des Wasserstrahles mit dem durch den Halbmesser

$$R_s = \sqrt{(R-a)^2 + \frac{q\,\mathfrak{z}}{2\pi b}}$$

bestimmten Kreisbogen SS wird das Parallelogramm der Geschwindigkeiten eingetragen derart, dafs $S_1 S_8$ die Geschwindigkeit des Radpunktes S_1, $S_1 S_5$ die absolute Geschwindigkeit des Wasserteilchens ist. In $S_1 S_9 = S_8 S_5 = w_1$ findet sich die Geschwindigkeit, welche das in S_1 eintreffende Wasserteilchen gegenüber dem Rade besitzt. Abgesehen von dem — übrigens nicht bedeutenden — Verluste infolge des Rückschlages beim Eintritt ist:

$$h_c = \zeta' \frac{c_h^2}{2g} + \frac{w_1^2}{2g}.$$

2. **Austritt.** Eintragen der Linie QP_1 so, dafs die hierdurch vom Schaufelraume abgegrenzte Fläche $QQ_1Q_2P_1$ gleich dem Querschnitt $f = q : b$, sowie der Geraden QP_2 derart, dafs f hälftig geteilt wird; Ziehen der Linie QP_5 tangential an das äufserste Schaufel-

element, Beschreibung eines Halbkreises über MQ als Durchmesser und Verlängerung der Geraden QP_1, QP_2 bis zum Durchschnitt mit diesem Kreise in den Punkten P_3, P_4. Dann erhält man nach der gewöhnlichen Annahme in

$$h_a' = \frac{P_3P_3' + 4 \cdot P_4P_4' + P_5P_5'}{6} + \frac{v^2}{2g}$$

den Verlust beim Austritt. Thatsächlich ist dieser, wie die genauere Untersuchung (s. die eingangs S. 628 in der Fufsnote genannte Quelle S. 132 u. f.) erkennen läfst, wesentlich kleiner u. zw. für mittlere Verhältnisse etwa nur $\frac{2}{3}$ hiervon:

$$h_a = \tfrac{2}{3} h_a' + x''.$$

3. Verlust infolge **Zapfenreibung** pflegt zwischen 1 und 3% zu liegen.

4. Um dem — allerdings geringen — Einflufs des **Luftwiderstandes und sonstigen Unvollkommenheiten** Rechnung zu tragen, ist der nach Mafsgabe des unter 1. bis 3. Bemerkten ermittelte Wirkungsgrad um 2 bis 3% nach unten abzurunden.

Der **Wirkungsgrad** richtig gebauter oberschlächtiger Wasserräder beträgt bei gröfseren Gefällen bis $\eta = 0{,}85$.

Gewichte.

Das Gewicht G normaler oberschlächtiger, in den Einzelheiten durchgebildeter Wasserräder kann veranschlagt werden:

1. Für die Anordnung mit besonderem Zahnrad auf der Wasserradwelle ohne das Gewicht dieses Rades zu

$$G = 540\, a\, (b\, D)^{\frac{3}{2}} \text{ bis } 580\, a\, (b\, D)^{\frac{3}{2}},$$

oder weniger sicher zu

$$G = 460 \frac{N_a}{v} \text{ bis } 500 \frac{N_a}{v}.$$

Kleine schnelllaufende Räder, namentlich solche mit Kropf, fallen um $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{4}$ schwerer aus als die erstere dieser beiden Gleichungen angiebt.

Das Gewicht G_r des Stirnrades (Kränze aus einzelnen Abschnitten, 180 bis 240 Zähne, 5 bis 6 m Durchmesser) beträgt:

$$G_r = 50000\, D_1 b_1 t_1,$$

worin D_1 der Teilkreisdurchmesser, b_1 die Zahnbreite und t_1 die Zahnteilung in m.

2. Für die Anordnung, dafs der Zahnkranz in Verbindung ist mit dem Wasserrade, Stirnradgewicht eingeschlossen:

$$G = 700\, a\, (b\, D)^{\frac{3}{2}} \text{ bis } 750\, a\, (b\, D)^{\frac{3}{2}},$$

oder

$$G = 600 \frac{N_a}{v} \text{ bis } 650 \frac{N_a}{v}.$$

b. Wasserräder mit Kulisseneinlauf.

Wassereintritt ober- oder unterhalb der Höhe der Achse des Rades, welchem das Wasser durch einen besonderen Einlaufapparat in bestimmter Richtung zugeführt wird.

Bei Annahme des **Raddurchmessers** ist zu beachten, dafs mit wachsendem Durchmesser der Eintrittsverlust abnimmt, Radgewicht und Anlagekosten sich vergröfsern. Für Räder nach Abbild. 516 und 517 etwa

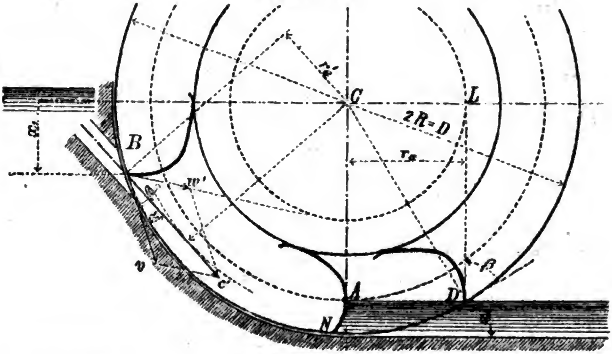
$$D = H + 3{,}5,$$

falls nicht besondere Gründe für andere Werte sprechen.

$$v = 1{,}6 \text{ m bis } 2{,}2 \text{ m i. d. Sek.}$$

(Vergl. das über v unter **a.** Bemerkte.)

Abbild. 516.



Radtiefe: $a = 0{,}4 \sqrt[3]{\frac{D}{H}}$ bis $0{,}5 \sqrt[3]{\frac{D}{H}}$,

u. U. mehr, namentlich bei stark veränderlichem Unterwasserspiegel.

Radbreite: $b = \frac{Q}{a v \varepsilon}$ worin $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$.

Schaufelteilung: $e = 0{,}5\,a$ bis $0{,}7\,a$ (vergl. S. 633).

Eintauchtiefe unter der Voraussetzung, dafs das Wasser unmittelbar vom Rade angenähert mit der Geschwindigkeit v abfliefst,

$$a_1 = \frac{Q}{b v}.$$

Spielraum zwischen dem steinernen Kropf und eisernen Rädern bis herab auf 5 mm und weniger. Man versieht die Lager der Wasserradwelle mit nachstellbarer Unterschale, stellt das Rad so hart gegen den Kropf, dafs es schleift und rückt dann nur soweit ab, dafs das Schleifen gerade aufhört.

Die **Richtung des äufsersten Schaufelelementes** (Abbild. 516) wird bestimmt durch:

$$r_a = \sqrt{R^2 - (R - a_1)^2}; \qquad \sin\beta = (R - a_1) : R.$$

Hiervon kann man etwas nach oben bezw. nach unten abweichen, u. zw. um so mehr, je weniger Wert darauf gelegt wird, dafs die Schaufeln dem Unterwasserspiegel lotrecht entsteigen.

Schaufelform. Bei lotrechtem Entsteigen ist NA die Evolvente an dem Grundkreis vom Halbmesser $CA = R \sin\beta = R - a_1$, oder ein Kreisbogen, welcher sich der Evolvente anschliefst. Von A an ist die Schaufel möglichst rasch nach oben zu krümmen, sowie derart und so weit zu führen, dafs ein Wasserübertritt in das Radinnere nicht stattfindet.

Einlauf. Der Winkel α, unter welchem die Kulissen an das Rad anschliefsen, entspricht etwa:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5.$$

Hiermit die absolute Eintrittsgeschwindigkeit c' für die oberste Kulisse:

$$c' = v\,\frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Die Tiefe des Punktes B_1 unter dem Oberwasserspiegel:

$$x_1 = (1 + \zeta')\frac{c'^2}{2g}, \text{ worin } \zeta' = 0{,}12.$$

Kulissenform, Abbild. 517. Man ziehe BO senkrecht zu c' (demnach tangential am Kreise vom Halbmesser $r_e' = CO = R \sin\alpha$), beschreibe um B einen Kreis vom Durchmesser s_1 = der Weite der oberen Kulisse = 0,06 bis 0,10 m, sowie von O aus zwei Kreisbögen $B_1'A_1$ und $B_1'''B_1''$, welche den Kreis vom Durchmesser s_1 berühren, und weiter einen Keisbogen BB_1 durch B. An die inneren Kulissenbegrenzungen $B_1'A_1$ und $B_1'''B_1''$ schliefsen sich die Kurven A_1A_1' und $B_1''A_1''$ (welch letztere so zu wählen ist, dafs sie in A_1'' eine wagerechte Tangente besitzt) derart an, dafs die in B_1 ausströmende Wassermenge

$$q_1 = \mu b_0 s_1 \sqrt{2gh_1},$$

(worin μ der Ausflufskoefficient = bis 0,94, bei hölzernen Radschaufeln um 5 bis 10% weniger,
b_0 die Kulissenbreite im lichten,)

auch durch den Querschnitt $A_1'A_1''$ einzutreten im stande ist, d. h.:

$$q_1 \leqq \frac{2}{3}\mu_0 b_0 \sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1''^3} - \sqrt{h_1'^3}\right),$$

$$\text{oder } h'' \geqq \sqrt[3]{\left[(h_1)^{\frac{3}{2}} + \frac{3q_1}{2\mu_0 b_0\sqrt{2g}}\right]^2},$$

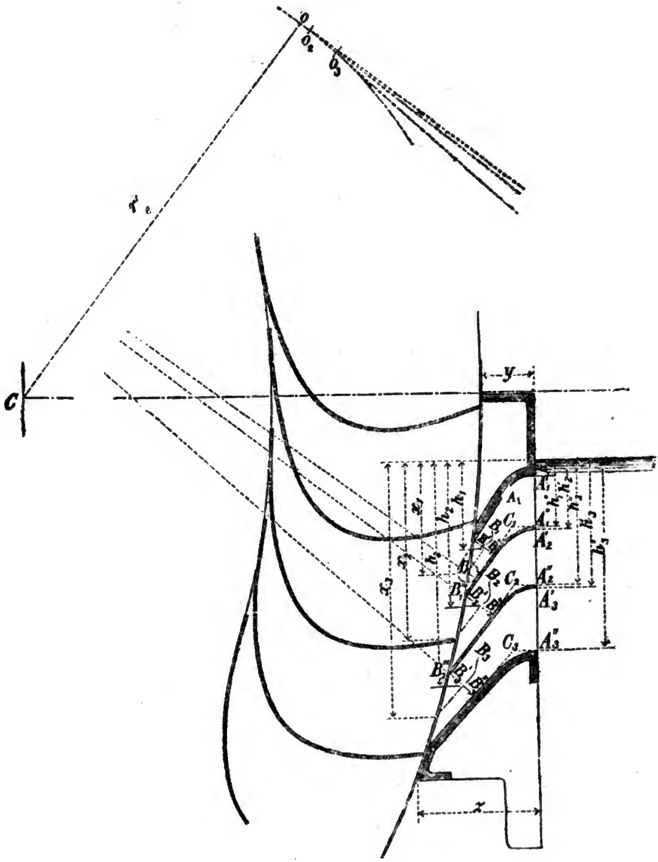
worin μ_0, = 0,9 oder weniger, der Ausflufskoefficient für den Eintritt

des Wassers in die Kulisse. Zu beachten ist, dafs A_1'' behufs richtiger Wasserführung um einen genügenden Betrag über B_1' liegen mufs.

Stärke des Kulissenblechs: $s_0 = 5$ bis 8 mm,

$$y \geqq 0{,}12 \text{ m}, \qquad z \geqq 0{,}35 \text{ m}.$$

Abbild. 517.



Zur Konstruktion der zweiten Kulisse von der Weite s_2 wird durch B_1''' die Tangente $B_1'''O_2$ an den Kreis vom Halbmesser CO gezogen, $B_1'''B_2' = s_0$, $B_2'B_2 = B_2B_2'' = 0{,}5\, s_2$ gemacht und von O_2 aus der Kreisbogen $B_2''B_2'''$ beschrieben. Der Punkt A_2'' ist nach Mafsgabe des oben Gesagten zu wählen:

$$q_2 = \mu\, b_0\, s_2 \sqrt{2\, g\, h_2}\,; \qquad \mu = \text{bis } 0{,}93 \text{ (s. oben)};$$

$$h_2'' \geqq \sqrt[3]{\left[(h_2')^{\frac{3}{2}} + \frac{3\, q_2}{2\,\mu_0\, b_0 \sqrt{2\, g}}\right]^2}\,; \qquad \mu_0 = 0{,}9 \text{ oder weniger.}$$

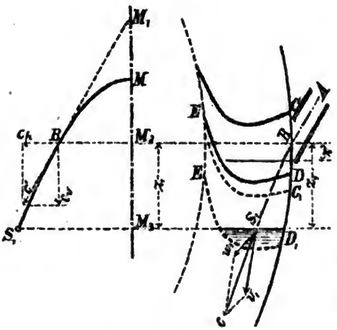
Ebenso kann eine dritte und vierte Kulisse festgelegt werden; in der Regel reichen drei aus.

Arbeitsverluste.

1. **Eintritt.** Die aus den Kulissen tretenden Ströme, in einem Strahle vereinigt gedacht, treffen den Radumfang angenähert in der Höhe

$$x = \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 + \cdots}{q_1 + q_2 + q_3 + \cdots}$$

Abbild. 518.



unter dem Oberwasserspiegel. Die absolute Geschwindigkeit in diesem Punkte B (Abbild. 518) ist

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta'}}\sqrt{2gx} \doteq \varphi\sqrt{2gx};$$

$$\zeta' = 0{,}15; \quad \varphi = 0{,}93.$$

Der Scheitel M der parabolischen Bahn MBS_1 wird bestimmt durch:

$$M_2B = \frac{c_h\, c_v}{g}; \quad M_1M = MM_2,$$

worin c_h und c_v die wagerechte bezw. lotrechte Komponente von c bezeichnen.

Der Schaufelraum CDE wird so eingetragen, dafs Bog. $CB = DB$, und in ihm der Wasserspiegel derart, dafs der Wasserquerschnitt $= 0{,}5\, f = 30\, Q : \mathfrak{z}\, n\, b$; hierdurch ergiebt sich z. Alsdann ist jener um $DD_1 = vt$ (sofern $t = \frac{1}{g}\left[-(c_v - v_v) + \sqrt{(c_v - v_v)^2 + 2gz}\right]$ und v_v die lotrechte Komponente von v im Punkte B) verschoben einzuzeichnen ($C_1D_1E_1$), und in dem Schnittpunkte S_1 der Parabel

MBS_1 mit dem Wasserspiegel das Parallelogramm der Geschwindigkeiten mit c_1 und v_1 als bekannten Gröfsen zu konstruieren und damit w_1 zu bestimmen:

$$h_e = \zeta' \frac{c_1^2}{2g} + \frac{w_1^2}{2g}.$$

2. Austritt. (Abbild. 519.)

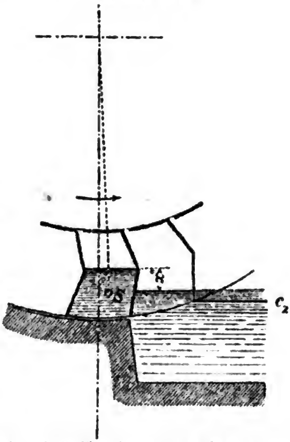
Angenähert: $h_a = x'' + \frac{v^2 - c_2^2}{2g}$.

Für $x'' = 0$, was bei eisernen Rädern sich nahezu erreichen läfst, und $c_2 = v$ wird $h_a = 0$.

3. Die **übrigen Verluste** betragen bei guten Rädern 3 bis 5%.

Der Wirkungsgrad derartiger, richtig entworfener und sorgfältig ausgeführter Räder erreicht bei Gefällen von 3 bis 4 m den Wert $\eta = 0{,}85$. Dies ist vorzugsweise dem Umstande mit zu danken, dafs die Geschwindigkeit, welche das Wasser beim Verlassen des Rades besitzt, für den Abflufs nutzbar gemacht werden kann.

Abbild. 519.



Gewicht.

Das Gewicht eiserner Räder mit gitterförmigem Radkranz und Stirnwandungen kann ohne Zahnrad veranschlagt werden zu

$$G = 330\, a\, (b\,D)^{\frac{3}{2}} \text{ bis } 360\, a\, (b\,D)^{\frac{3}{2}},$$

oder auch

$$G = 420 \frac{N_a}{v} \text{ bis } 460 \frac{N_a}{v}.$$

Räder von verhältnismäfsig kleinem Durchmesser und solche von geringer Breite fallen etwas schwerer aus.

c. Räder mit Ueberfalleinlauf.

$D = 3$ bis $4\,H$, $\quad v = 1{,}4$ bis $1{,}7$ m i. d. Sek.

Ueber die Einzelheiten des Rades vergl. das unter **b.** Bemerkte.

Einlauf (Abbild. 520). A Stellung der mit Leitblech versehenen Schütze bei Ueberflufs der normalen Wassermenge, bestimmt durch

$$Q = \mu\, b_0\, h \sqrt{2\,g\,h},$$

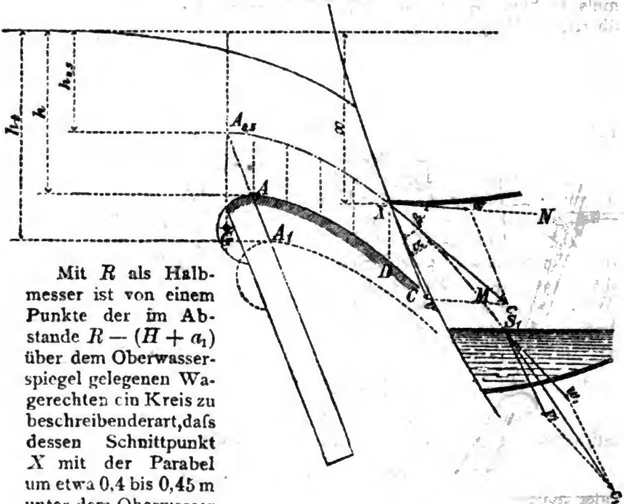
$\mu = 0{,}5$ bis herab auf $0{,}45$ bei Holzschaufeln.

Für die mittlere Schicht $A_{0,5}\,X S_1$, in welcher der ganze Wasserstrahl zusammengedrängt gedacht werden kann, ergiebt sich aus:

$$0{,}5\,Q = \mu\, b_0\, h_{0,5} \sqrt{2\,g\,h_{0,5}}$$

der Scheitel $A_{0,5}$ der entsprechenden Parabel, deren Brennpunkt G um $A_{0,5}\,G = \frac{10}{11} h_{0,5}$ unter $A_{0,5}$ liegt.

Abbild. 520.



Mit R als Halbmesser ist von einem Punkte der im Abstande $R - (H + a_1)$ über dem Oberwasserspiegel gelegenen Wagerechten ein Kreis zu beschreiben derart, daſs dessen Schnittpunkt X mit der Parabel um etwa 0,4 bis 0,45 m unter dem Oberwasser liegt. Für X wird das Parallelogramm der Geschwindigkeiten mit $c = 0{,}95 \sqrt{2\,g\,x}$ gezeichnet, und geprüft, ob die Zerlegung von c in Richtung des Radumfanges die nötige Komponente (ungefähr v) liefert; erforderlichen Falles ist der Mittelpunkt auf der bezeichneten Wagerechten zu verschieben oder der Raddurchmesser oder auch die Umfangsgeschwindigkeit anders zu wählen.

Der tiefste Stand der Schütze ergiebt sich aus:

$$Q_{\max} = \mu\, b_0\, h_t \sqrt{2\,g\,h_t},$$

wenn die gröſste Wassermenge (in cbm i. d. Sek.), welche noch überflieſsen soll, $Q_{\max}$ ist.

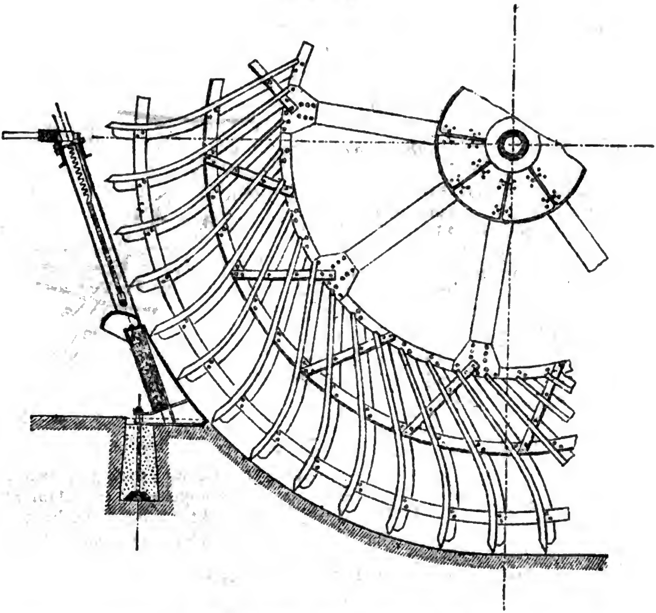
Niedergefälle-Räder von Zuppinger, Abbild. 521.*)

---

*) Vergl. auch Teichmann, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1888, S. 53 u. f.

Für kleine und mittlere Gefälle, besonders bei stark veränderlichem Unterwasserspiegel geeignet. v bis gegen 1,2 m i. d. Sek., Wirkungsgrad normal $\eta = 0{,}65$ bis 0,75, sofern x'' (Abbild. 519) nur gering. Neigungswinkel des dem Unterwasserspiegel entsteigenden Schaufelelementes gegen die Wagerechte = 70 bis 75° bei $a_1 = 0{,}3$ m, mindestens noch 45 bis 55° beim höchsten in Rücksicht zu ziehenden Wasserstand. Radtiefe hängt von der Veränderlichkeit des Unterwasserspiegels ab und liegt etwa zwischen $\frac{1}{4}R$ und $\frac{3}{8}R$; sie mufs so bemessen werden, dafs das Wasser nicht in das Radinnere übertritt. Ungefähre Schaufelteilung 0,5 m im Mittel.

Abbild. 521.



d. Wasserräder mit Spannschütze

können angesehen werden als Räder, denen das Wasser durch eine Kulisse zugeführt wird, und sind deshalb unter Beachtung des in **b.** Gesagten zu behandeln. Im allgemeinen geben sie einen geringeren Wirkungsgrad als die unter **b.** und **c.** besprochenen Räder.

B. Turbinen.*)

Bezeichnungen:

Ueber Q, H, N_a, N, η, g s. S. 628.

c die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Leitrade austritt, in m i. d. Sek.,

c_e die mittlere absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Laufrad eintritt, in m i. d. Sek.,

c_a die mittlere absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Laufrad austritt, in m i. d. Sek.,

$\omega = \frac{\pi n}{30}$ die Winkelgeschwindigkeit des Laufrades,

$v_e = \omega r_e$ die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades an der Eintrittsstelle, in m i. d. Sek.,

$v_a = \omega r_a$ die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades an der Austrittsstelle, in m i. d. Sek.,

w_e die mittlere relative Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in das Laufrad (Resultierende aus c_e und $-v_e$), in m i. d. Sek.,

w_a die mittlere relative Geschwindigkeit des Wassers beim Austritt aus dem Laufrad (Resultierende aus c_a und $-v_a$), in m i. d. Sek.

Die Geschwindigkeiten c, c_e, c_a, w_e, w_a gelten für die Schwerpunkte der Stromquerschnitte; die Geschwindigkeiten v_e und v_a für den Eintritts- bezw. Austrittspunkt des mittleren Wasserfadens, entsprechend den Abständen r_e bezw. r_a von der Achse.

α der Winkel zwischen v_e und c_e, welcher unter der Voraussetzung stofsfreien Eintrittes gleich demjenigen zwischen v_e und c gesetzt werden darf,

β der Winkel zwischen v_e und w_e,

γ der Winkel zwischen $-v_a$ und w_a,

H_e die Höhe des Wassereintritts in das Laufrad über dem Unterwasserspiegel; wenn nicht genau, so angenähert auch die Höhe des Wasseraustritts aus dem Leitrade über dem Unterwasser, in m,

H_r die Höhe, von welcher das Wasser beim Durchfliefsen des Laufrades herabsinkt, in m,

h_e der hydraulische Ueberdruck im Eintrittsquerschnitt des Laufrades, in m Wassersäule,

$\mathfrak{h}$ die Pressung, welche im Eintrittsquerschnitt des Laufrades zur Vermehrung der relativen Geschwindigkeit, zur Ueberwindung der Bewegungswiderstände im Laufrade, sowie nötigenfalls auch zur Ueberwindung der Centrifugalkraft vorhanden ist, i. m Wassersäule,

*) Nach C. Bach, Die Wasserräder 1886, I. Teil.

ε der hydraulische Wirkungsgrad, so dafs εH das Arbeitsvermögen, welches das Wasser f. d. kg auf das Laufrad überträgt,
b_1 die Breite des Leitrades an der Austrittsstelle in m,
b_2 die Breite des Laufrades an der Eintrittsstelle in m,
$\mathfrak{z}_1$ die Schaufelzahl des Leitrades,
$\mathfrak{z}_2$ die Schaufelzahl des Laufrades.

Man unterscheidet:

1. **Achsial-** und **Radialturbinen**, je nachdem die durch c_e und v_e bestimmte Ebene parallel mit der Turbinenachse läuft oder senkrecht dazu steht.

2. **Aeufsere** und **innere Radialturbinen**, je nachdem die Wasserzuführung von aufsen oder von innen erfolgt.

3. **Voll-** und **Partialturbinen**, nach dem Grade der Beaufschlagung.

4. **Ueberdruck- (Reaktions-)** und **Druck- (Aktions-) Turbinen**, je nachdem beim Eintritte des Wassers in das Laufrad eine auf Vermehrung der relativen Geschwindigkeit hinwirkende Wasserpressung vorhanden ist oder nicht.

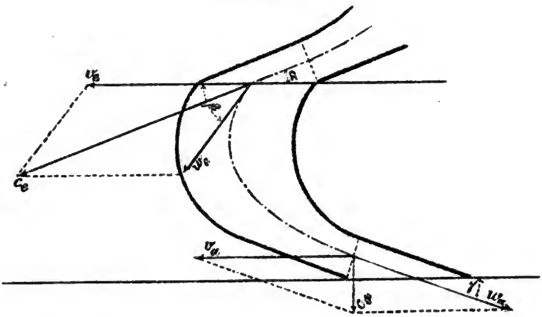
Die **Druckturbinen** zerfallen in zwei Gruppen: **Grenzturbinen** d. h. Druckturbinen mit (durch die Kanalwandungen) erzwungener Form des Wasserkörpers im Laufrad, **Strahlturbinen**, in denen der Wasserstrom meist nur die eine Kanalwandung (die hohle Fläche der Schaufel) berührt, im übrigen aber frei abweichen kann.

a. Die Achsialturbine als Ueberdruckturbine.

Unter der Voraussetzung, dafs c_a senkrecht zu v_a, d. h. $w_a \cos\gamma = v_a$, gilt die **Hauptgleichung:**

$$c_e v_e \cos\alpha = g\,\varepsilon H \qquad \text{. . . . . . . 1)}$$

Abbild. 522.



Hierzu tritt die **Bedingung stofsfreien Eintritts** (Abbild. 522):

$$c_e : v_e : w_e = \sin\beta : \sin(\beta - \alpha) : \sin\alpha;$$

$$2)\quad c_e = v_e \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)};\quad v_e = c_e \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta};\quad w_e = v_e \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)};$$

mithin:

$$3)\quad v_e = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{gH\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}};\quad c_e = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{gH\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha}};$$

$$\varepsilon = 0{,}80 \text{ bis } 0{,}85 \text{ d. i. } \sqrt{\varepsilon} = 0{,}90 \text{ bis } 0{,}92.$$

Man pflegt zu wählen:

$$\alpha = 15^0 \text{ bis } 24^0,$$

die kleineren Werte bei gröfseren Gefällen, die gröfseren bei geringeren Gefällen und bedeutenden Wassermengen.

Für β ist 90^0 ein geeigneter Mittelwert; je gröfser β, um so bedeutender fällt der Ueberdruck aus. Mit $\beta = 90^0$ folgt:

$$v_e = 0{,}9\sqrt{gH} \text{ bis } 0{,}92\sqrt{gH};\quad c_e = 0{,}9\sqrt{gH}\frac{1}{\cos\alpha} \text{ bis } 0{,}92\sqrt{gH}\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Ein **vorläufiger** Wert für den mittleren **Durchmesser** des Rades findet sich aus:

$$D = 2\sqrt{\frac{Q}{c_e}} \text{ bis } 4\sqrt{\frac{Q}{c_e}}.$$

Die **Schaufelstärke** s_0 beträgt:

bei Schweifs- oder Flufseisen und Stahl 4 bis 8 mm,
bei Gufseisen . . . . 6 bis 14 mm und mehr.

Für die **Schaufelteilung** t, auf dem Umfange πD gemessen, gewährt ersten Anhalt die Gleichung:

$$t = 0{,}15\sqrt{D}.$$

Die **Schaufelzahl** ist:

$$\mathfrak{z} = \frac{\pi D}{t}.$$

Bei radialer Stellung der im Spalte liegenden Schaufelkanten giebt man dem einen Rade eine oder einige Schaufeln mehr als dem anderen. Bis zu einer gewissen Grenze hin wird die Wasserführung eine um so gesichertere, je gröfser die Schaufelzahl; andererseits wachsen mit dieser die Bewegungswiderstände.

Die **Höhe** der Räder kann zunächst, vorbehaltlich späterer Abänderung, ungefähr gleich der Teilung gewählt werden, in der Regel das Laufrad etwas höher als das Leitrad. Scharfe Krümmungen der Schaufeln sind zu vermeiden.

Die **Spalthöhe** möglichst klein: 1 bis 4 mm, je nach der Gröfse der Turbine und den sonstigen Verhältnissen.

Die **Weite** der **Austrittsöffnungen** des Leitrades, dessen Teilung t_1, beträgt:

$$s_1 = t_1 \sin\alpha - s_0.$$

Durch die Laufradschaufeln erfahren diese Oeffnungen eine **Verengung:**

$$s'_1 = s_0 \left(\sin\alpha - \frac{s_0}{t_1}\right) \sim s_0 \sin\alpha,$$

so dafs die **Breite des Leitrades** an der Austrittsstelle, wenn der Kontraktionskoefficient $= 1$,

$$b_1 = \frac{Q}{(s_1 - s'_1)\, c_e\, \mathfrak{z}_1}.$$

Die **Breite des Laufrades** an der Eintrittsstelle:

$$b_2 = b_1 + 0{,}004 \text{ bis } b_1 + 0{,}010 \text{ m}.$$

Die **Eintrittspressung:**

$$\mathfrak{h} = H - \frac{c_e^2}{2g}(1 + \zeta_1 + \zeta_2); \quad \zeta_1 = 0{,}1 \text{ bis } 0{,}12; \quad \zeta_2 = 0{,}06 \text{ bis } 0{,}08,$$

womit:

$$h_e = \mathfrak{h} - H_e = H - H_e - (1 + \zeta_1 + \zeta_2)\frac{c_e^2}{2g};$$

$$\frac{w_a^2}{2g} = \frac{w_e^2}{2g} + \mathfrak{h} - \zeta_3 \frac{w_a^2}{2g};$$

$$w_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_3}} \sqrt{w_e^2 + 2g\mathfrak{h}}; \quad \zeta_3 = 0{,}1 \text{ bis } 0{,}12.$$

Die erforderliche **Austrittsweite** der $\mathfrak{z}_2$ Laufradkanäle:

$$s_2 = \frac{Q}{w_a\, \mathfrak{z}_2\, b_2},$$

sofern die Schaufelform derart gewählt wird, dafs der Kontraktionskoefficient $= 1$. Wird das Laufrad nach unten hin verbreitert, so ist an die Stelle des oben bestimmten b_2 der entsprechende, gröfsere Wert zu setzen.

$$\sin\gamma = \frac{s_2 + s_0}{t_2}.$$

Sollen die erlangten Werte brauchbar sein, so mufs die Aufzeichnung des Parallelogramms der Geschwindigkeiten für die Austrittsstelle c_a nahezu senkrecht zu v_a und nicht zu grofs ergeben; anderenfalls ist die Rechnung nochmals durchzuführen mit entsprechender Aenderung der gemachten Annahmen.

Läfst sich auf grund der nun vorliegenden Ergebnisse eine befriedigende **Schaufelform** nicht entwerfen, so haben Abänderungen zunächst in der Radhöhe oder der Schaufelteilung einzutreten, bis eine die Wasserführung sichernde und auf die Bewegungswiderstände Rücksicht nehmende Schaufelform gewonnen ist. Um ein Bild über das Gesetz zu erhalten, nach welchem die Ablenkung des Wasserstromes im Raume erfolgt, kann man die absolute Bahn des Wassers aus der Schaufelform, welche den relativen Weg giebt, ableiten.

Werden die Schaufeln nach **Schraubenflächen** gebildet, deren Erzeugende eine Senkrechte zur Turbinenachse und deren Leitlinie das mittlere Schaufelprofil ist, so erfolgen der Wassereintritt und der Wasseraustritt nur in der Mitte so, wie beabsichtigt; innen ist der Eintritt mit Stofs gegen die Schaufeln, aufsen mit Rückschlag der letzteren gegen das Wasser verknüpft. Der Austrittsverlust f. d. kg ist nur in der Mitte $\frac{c_a^2}{2g}$, von hier aus nimmt er zu sowohl nach innen, wie nach aufsen. Um diese der bezeichneten Schaufelform anhängenden Mehrverluste gering zu erhalten, darf die Radbreite nicht zu grofs gewählt werden, b_1 etwa $0{,}1\,D$ bis $0{,}2\,D$.

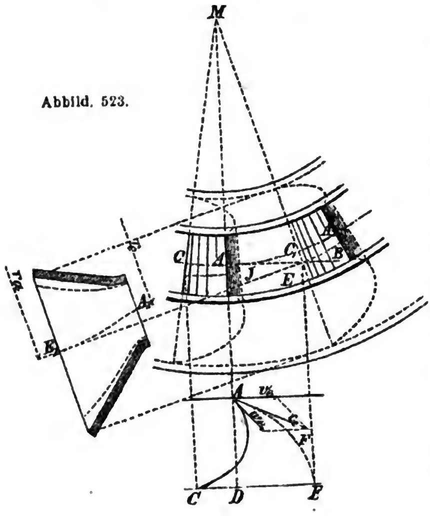
Der **Wirkungsgrad** der Turbine ergiebt sich nach Ermittlung der hydraulischen Verluste, welche veranschlagt werden können zu:

$$\frac{c_1^2}{2g} - (\zeta_1 + \zeta_2)\frac{c_e^2}{2g} + \zeta_3\frac{w_a^2}{2g} + \frac{c_a^2}{2g} = (1 - \varepsilon)\,H,$$

und unter Berücksichtigung, dafs die Arbeitsverluste durch die Reibung am Spurzapfen, im Halslager und durch die Reibung des Laufrades im Wasser, sowie infolge des Entweichens von Wasser durch den Spalt und infolge sonstiger Unvollkommenheiten in der Regel 5 bis 10% betragen dürften.

b. Die Achsialturbine als Druckturbine.

Abbild. 523.



1. Druckturbine mit freiem Strahl.

Das Wasserteilchen, bei A (Abbild. 523) mit der absoluten Geschwindigkeit c_e und der relativen w_e in das Laufrad eintretend, hat das Bestreben, in der Tangentialebene AB zu bleiben, falls von dem Einflufs der Reibung zwischen Schaufel und Wasserteilchen, sowie davon, dafs der Gegendruck der Schaufel eine auf Ablenkung (aus der Ebene AB heraus)

hinwirkende Seitenkraft ergeben kann, abgesehen wird. Innerhalb des Laufrades legt das Wasserteilchen den absoluten Weg AFE in der Zeit t zurück und tritt bei E aus. Die Schaufelpunkte A und C sind während dieser Zeit nach A_1 bezw. C_1 gelangt, wenn $AA_1 = CC_1 = vt \sim CE$. Der im Abstande $MA = r_e$ bei A eingetretene Wasserteil tritt demnach im Abstande $ME = MC_1 + C_1E = MA + C_1E = r_a$ aus. Ein symmetrischer Kranzquerschnitt, wie Abbild. 524 oder 525, besitzt daher nach innen zu eine überflüssige Breite; richtiger ist er einseitig zu wählen, wie Abbild. 523 angiebt.

Um die Abweichung C_1E zu verhindern, stellt Meifsner*) die nach einer cylindrischen Fläche gekrümmte Schaufel schräg, u. zw. derart, dafs $\alpha = \angle AEJ$ (Abbild. 523) und die Kanten parallel laufen. Andere wählen die Fläche nicht cylindrisch, begnügen sich mit geringerer Schrägstellung und lassen diese erst unterhalb der Eintrittskante beginnen.

Ausgeführte Strahlturbinen mit symmetrischem Kranzquerschnitt, Abbild. 524 oder 525, zeigen

$$b_3 = 2{,}5\, b_1 \text{ bis } 4\, b_1.$$

Einseitig nach aufsen verbreiterte Laufräder können entsprechend der Abweichung C_1E (Abbild. 523) schmäler gehalten werden.

Die **Eintritts-** und die **Umfangsgeschwindigkeit** ergeben sich aus:

$$c_e = 0{,}92\sqrt{2g(H - H_e)}; \qquad v_e = c_e \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta}$$

α pflegt zwischen 12 und 30° zu liegen; man wählt α um so kleiner, je gröfser das Gefälle und je geringer die Wassermenge.

β kann zunächst unter dem Vorbehalte späterer Abänderung zu 2α angenommen werden, womit:

$$v_e = \frac{c_e}{2\cos\alpha}; \qquad w_e = v_e; \qquad v_a = v_e \frac{r_a}{r_e}.$$

Für die Gröfse des mittleren Durchmessers D bei voller Beaufschlagung gewährt Anhalt die Beziehung:

$$D = 2{,}8\sqrt{\frac{Q}{c_e}} \text{ bis } ,4\sqrt{\frac{Q}{c_e}}.$$

Bei kleinen Gefällen und grofsen Wassermengen wird man sich dem ersteren Werte nähern, bei gröfseren Gefällen und kleinen Wassermengen sich mehr in der Nähe des zweiten Wertes halten, ihn unter Umständen auch überschreiten.

Im Falle nur teilweiser Beaufschlagung wird mit D höher gegangen. Man hat alsdann, wenn es sich um sehr bedeutende Gefälle handelt, Rücksicht darauf zu nehmen, dafs die Umdrehungszahl

*) Vergl. C. Bach, Die Wasserräder, S. 100, Abbild. 6.

nicht zu grofs ausfällt; die für angezeigt erachtete Umdrehungszahl kann dann mafsgebend für D werden.

Schaufelstärken wie bei den Ueberdruckturbinen unter **a.** angegeben; bei Partialturbinen sinken sie bis auf 0,002 m.

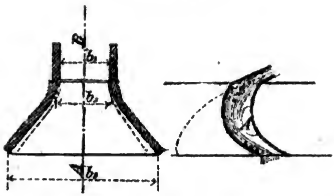
Schaufelteilung: $t = \frac{D}{24}$ bis $\frac{D}{15}$.

Bei Strahlturbinen mit nur teilweiser Beaufschlagung und für grofse Gefälle wird mit t bis auf 0,04 m heruntergegangen.

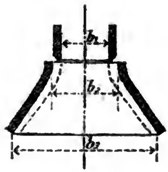
Die erforderliche **Höhe** des **Leit-** und des **Laufrades** wird durch die geeignete Schaufelform bestimmt. Als erste Annahme kann für die Höhe der ersteren $\frac{D}{14}$, für diejenige der letzteren $\frac{D}{10}$ gesetzt werden.

Die **Breite** b_1 des Leitrades ist in derselben Weise zu bestimmen, wie unter **a.** bei den Ueberdruckturbinen angegeben.

Abbild. 524.



Abbild. 525.



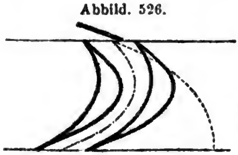
$b_2 = b_1 + 0{,}006$ bis $b_1 + 0{,}020$ (Abbild. 524);
$b_2 = 1{,}25\, b_1$ bis $1{,}5\, b_1$ und darüber (Abbild. 525).

Die relative Austrittsgeschwindigkeit beträgt:

$$w_a = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_3}} \sqrt{w_e^2 + 2g\,H_r + v_a^2 - v_e^2}\,; \quad \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_3}} = 0{,}96 \text{ i. M.}$$

Winkel γ ungefähr gleich α; er darf jedenfalls nicht so klein sein, dafs beim Austritt eine gewaltsame Verminderung der Strahlstärke und damit eine erzwungene Verbreiterung des Strahles stattfindet. Im übrigen ist das unter **a.** Gesagte in sinngemäfser Weise zu beachten.

Abbild. 526.



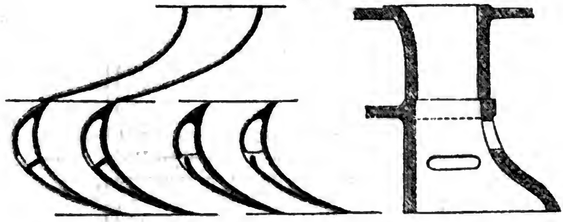
2. Druckturbinen mit erzwungenem Strahlquerschnitt (Grenzturbinen).

Bei stark veränderlichem Unterwasser am Platze. Der Querschnitt der Laufradkanäle mufs sich derart ändern, dafs das Produkt aus Kanalquerschnitt und

relativer Geschwindigkeit konstant bleibt. Zu diesem Zwecke werden die Schaufeln mit veränderlicher Stärke hergestellt, wie dies die Abbild. 526 und 527 erkennen lassen.

Bei Berechnung und Entwurf ist im weiteren nach Mafsgabe des oben Bemerkten vorzugehen.

Abbild. 527.



c. Aeufsere Radialturbinen.

Die unter **a.** gegebenen Gleichungen 1. bis 8. gelten auch hier, wobei $\sqrt{\varepsilon} = 0{,}91$ bis $0{,}93$ und $\alpha = 15$ bis 24^0 gewählt werden kann.

Für den Mittelwert $\beta = 90^0$ wird:

$$v_e = \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{gH}; \qquad c_e = \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{gH}\,\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Vom Durchmesser des Abflufsrohres, welcher im Mittel zu $d = 1{,}1\sqrt{Q}$ angenommen werden darf, ausgehend, wird zunächst schätzungsweise $2\,r_e = 1{,}4\,d$ bis $1{,}5\,d$ in die Rechnung eingeführt und hierbei spätere Abänderung vorbehalten.

Schaufelteilung auf dem Kreise $2\pi r_e$ etwa 0,15 bis 0,25 m.

Schaufelstärke wie bei den Achsial-Ueberdruckturbinen (s. S. 644).

Aus der **Weite** der Leitradöffnungen $s_1 = t_1 \sin\alpha - s_0$ und deren Verminderung durch die über diese hineilenden Laufradschaufeln um $s'_1 = s_0\left(\sin\alpha - \frac{s_0}{t_1}\right) \sim s_0 \sin\alpha$ findet sich die **Leitradhöhe** b_1 zu:

$$b_1 = \frac{Q}{(s_1 - s'_1)\,c_e\,\mathfrak{z}_1}.$$

Die **Laufradhöhe** b_2 kann alsdann gewählt werden:

$$b_2 = b_1 + 0{,}004 \text{ bis } b_1 + 0{,}010 \text{ m}.$$

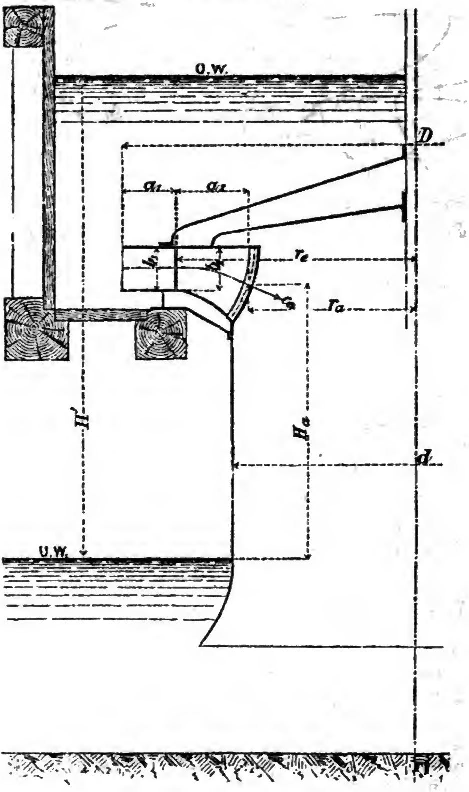
Die radiale Abmessung a_1 des Leitrades etwa $0{,}2\,r_e$, diejenige a_2 des Laufrades ungefähr $1{,}25\,b_2$, unter dem Vorbehalte späterer Berichtigung.

Nachdem $r_a = r_e - a_2$ und $\mathfrak{h} = H - \frac{c_e^2}{2g}(1 + \zeta_1 + \zeta_2)$ mit $\zeta_1 = 0{,}1$ bis $0{,}12$ und $\zeta_2 = 0{,}06$ bis $0{,}08$ ermittelt, findet sich,

$$w_a = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_3}} \sqrt{w_e^2 + 2g\mathfrak{h} + v_a^2 - v_e^2};$$

$$\zeta_3 = 0{,}1 \text{ bis } 0{,}12.$$

Abbild. 528.

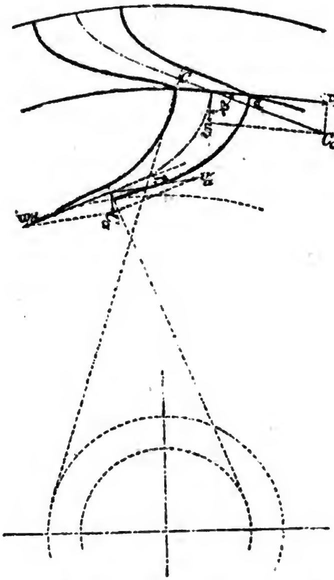


Die erforderliche Höhe b_3 des Austrittsquerschnittes der Laufradkanäle wird bestimmt durch:

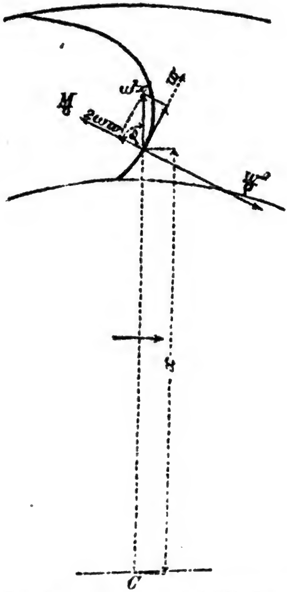
$$b_3 = \frac{Q}{(t_3 \sin\gamma - s_0)\, z_2\, w_a},$$

falls $t_3 = \frac{2\pi r_a}{z_2}$ und die Schaufelform derart, dafs der Kontraktionskoefficient gleich 1 gesetzt werden darf.

Abbild. 529.



Abbild. 530.



Der Wert für γ mufs der Bedingung $v_a = w_a \cos\gamma$ wenigstens angenähert entsprechen.

Beim Aufzeichnen der Schauflung wird sich ergeben, ob Aenderungen an den gemachten Angaben notwendig sind oder nicht.

d. Innere Radialturbinen.

Hier gelten dieselben Hauptgleichungen wie für die äufseren Radialturbinen, doch empfiehlt es sich, $\sqrt{\varepsilon} = 0{,}89$ bis $0{,}91$ in die Rechnung einzuführen. Bei Berechnung und Entwurf ist sinngemäfs

in derselben Weise zu verfahren wie unter **c.** und dabei unter Umständen vom Durchmesser des Zuleitungsrohres auszugehen.

Die meisten Radialturbinen mit innerem Leitrade werden als nur teilweise beaufschlagte Druckturbinen mit freiem Strahle, bei wagerecht gelagerter Achse zum Zwecke der Ausnutzung hoher Gefälle ausgeführt. Die Umfangsgeschwindigkeit solcher **Hochdruckturbinen***) pflegt zu liegen zwischen

$$v_e = 0{,}43 \sqrt{2\,g\,H} \text{ und } 0{,}47 \sqrt{2\,g\,H}.$$

Hinsichtlich der Berechnung sind dieselben Grundsätze mafsgebend, wie für die achsialen Strahlturbinen (vergl. S. 646).

Die **Schaufelform** mufs bei radial beaufschlagten Strahlturbinen derart sein, dafs sich der Wasserstrahl von der hohlen Fläche der Schaufel nicht löst, d. h. mit bezug auf Abbild. 530, worin w die relative Geschwindigkeit des Wassers und ϱ den Krümmungshalbmesser der Schaufelkurve an der in betracht gezogenen Stelle bedeutet,

$$\frac{w^2}{\varrho} - \omega^2 x \cos\varphi - 2\,\omega\,w > 0.$$

C. Zeichnerische Bestimmung der Turbinen und Kreiselpumpen.**)

Bezeichnungen:

h = ganze vorhandene Gefällhöhe,
c = absolute, w = relative Wassergeschwindigkeit,
v = Umfangsgeschwindigkeit des Rades,
r = Radhalbmesser (alles in m bezw. in m i. d. Sek.).

(Der Zeiger e oder a an einer der Gröfsen c, w, v und r deutet an, dafs sich diese Gröfse auf den Eintritt bezw. Austritt bezieht.)

α, β und δ bedeuten die Winkel, unter denen die Enden der Leitschaufeln (α), die Anfänge der Radschaufeln (β) und die Enden der Radschaufeln (δ) gegen die Bewegungsrichtung geneigt sind.

Q = verfügbare Wassermenge (cbm i. d. Sek.),

$F_a = \frac{Q}{c_a}$ = Austrittsquerschnitt;

c_a wähle man zwischen $\sqrt{2\,g \cdot 0{,}05\,h}$ und $\sqrt{2\,g \cdot 0{,}08\,h}$ entsprechend einem Arbeitsverlust von 5 bis 8%; (Tafel der Werte $\sqrt{2\,g\,h}$ s. S. 141;)

$h_\varrho = h - \frac{c_e^2}{2g}$ = Gefällhöhe entsprechend der Reaktionswirkung,

($h_\varrho = 0$ für Aktionsturbinen, $h_\varrho > 0$ für Reaktionsturbinen),

$c_\varrho = \sqrt{2\,g\,h_\varrho}$ = Reaktionsgeschwindigkeit,

*) Vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1882, S. 366 u. f.

**) Nach G. Herrmann, Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen. Berlin 1887, L. Simion.

$h_\alpha = \frac{c_e^2}{2g} - \frac{c_\alpha^2}{2g}$ = Gefällhöhe entsprechend der Aktionswirkung,

$c_\alpha = \sqrt{2 g h_\alpha}$ = Aktionsgeschwindigkeit,

$h_n = h_\alpha + h_\varrho = h - \frac{c_\alpha^2}{2g}$ = nützliche Gefällhöhe,

$c_n = \sqrt{2 g h_n} = \sqrt{c_\varrho^2 + c_\alpha^2}$ = Nutzgeschwindigkeit,

c_w = wirksame Geschwindigkeit, entsprechend

h_w = wirksames Gefälle (um z, der Widerstandshöhe in den Kanälen, kleiner als das vorhandene Gefälle h; man kann durchschnittlich setzen $z = 0{,}10\,h$ bis $0{,}15\,h$, mithin $h_w = 0{,}90\,h$ bis $0{,}85\,h$);

$\frac{h_\varrho}{h_n} = \varepsilon$ = Reaktionsverhältnis

($\varepsilon = 0$ für Aktionsturbinen, $0 < \varepsilon < 1$ für Reaktionsturbinen).

Aus den Bedingungen: „stofsfreier Eintritt und Austritt senkrecht zur Bewegungsrichtung des Rades“ ergeben sich die nachfolgenden Konstruktionen. (Der Mafsstab ist beliebig zu wählen.)

a. Achsialturbinen.

1. Stellt $BA = c_e$ (Abbild. 531) die gewählte Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers in dem mittleren Umfange, der zu einer Geraden $A_1 A_2$ gestreckt gedacht wird, dar, so erhält man, wenn $BE \parallel A_1 A_2$ und $DA \perp A_1 A_2$ gemacht wird, in

$BC = v$ die Radgeschwindigkeit,

$CA = w_e$ die relative Eintrittsgeschwindigkeit,

$DA = c_{ne}$ deren normale Komponente.

Macht man weiter $DE = BC = v$, so ergiebt sich für ein Rad mit parallelen Kränzen:

$EA = w_a$ = relative Austrittsgeschwindigkeit,

$\measuredangle EAA_2 = \delta$ = Neigung des Radschaufelendes in F,

$DA = c_{ne} = c_a$ = absolute Austrittsgeschwindigkeit,

$BD = c_\alpha$ = Aktionsgeschwindigkeit.

Beschreibt man um C mit $CB = v$ einen Halbkreis, so wird:

$DH = \sqrt{w_a^2 - w_e^2} = \sqrt{2 g h_\varrho} = c_\varrho$ = Reaktionsgeschwindigkeit,

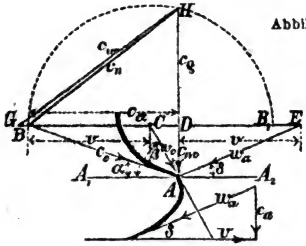
$BH = \sqrt{c_\alpha^2 + c_\varrho^2} = c_n$ = Nutzgeschwindigkeit.

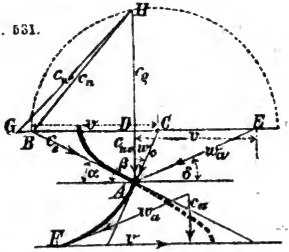
Macht man ferner $DG = BA = c_e$, so folgt:

$GH = \sqrt{c_e^2 + c_\varrho^2} = c_w$ = wirksame Geschwindigkeit.

2. Für eine reine **Aktionsturbine** mufs $c_\varrho = 0$ sein, d. h. B_1 mit D zusammenfallen (Abbild 532). C liegt in der Mitte zwischen B und D, daher $\delta = \beta$, $w_e = w_a$ und $v = 0{,}5\,c_\alpha$.

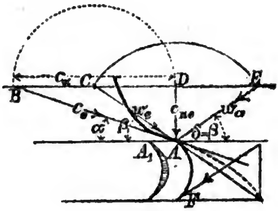
Abbild. 531.



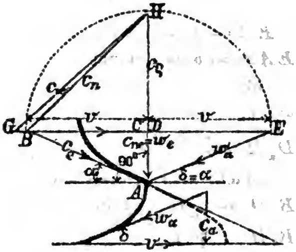


(Die Aktionsturbine besitzt für ein gegebenes Gefälle die kleinste Umfangsgeschwindigkeit.)

Abbild. 532.



Abbild. 533.

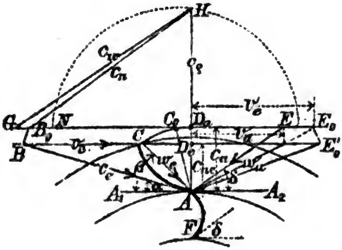


3. Für $\beta = 90^0$ gilt Abbild. 533. Hier wird:

$$c_\varrho = c_a = v, \quad w_e = c_a, \quad c_e = w_a, \quad \delta = \alpha.$$

Reaktionsverhältnis $\varepsilon = 0{,}50$.

Abbild. 534.



b. Radialturbinen.

Es bedeute:

$$\nu = v_e : v_a = r_e : r_a,$$

so gilt (bei gleicher Radhöhe für alle Querschnitte):

$$F_e : F_a = r_e : r_a = \nu,$$

$$F_e\, c_{ne} = F_a\, c_{na} = Q,$$

$$c_{ne} : c_{na} = r_a : r_e = 1 : \nu.$$

Wegen des Einflusses der Centrifugalkraft gilt für h_ϱ die Gleichung:

$$2 g h_\varrho = w_a^2 - w_e^2 - (v_a^2 - v_e^2).$$

(Die absolute Arbeitsfähigkeit wird durch die Centrifugalkraft nicht beeinflufst.)

In Abbild. 534 sei wieder $BA = c_e$, so ergiebt sich in
$BC = v_e$ die Radgeschwindigkeit am Eintrittsumfange.
$CA = w_e$ die relative Eintrittsgeschwindigkeit,
$D_e A = c_{ne}$ deren normale Komponente.

Macht man $D_a A = \frac{r_e}{r_a} D_e A = \nu c_{ne} = c_{na}$ und

$$D_a E = \frac{r_a}{r_e} BC = \frac{v_e}{\nu} = v_a, \text{ so wird:}$$

$EA = w_a$ = relative Austrittsgeschwindigkeit,
$EAA_2 = \delta$ = Neigung des Radschaufelendes in F gegen den Umfang.

Macht man ferner $D_a E_0 = BC = v_e$ $AC_0 = AC$ und beschreibt um C_0 mit $C_0 N = v_e$ einen Halbkreis, so folgt:

$D_a H = \sqrt{\overline{E_0 A}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{w_a^2 - w_e^2} = c_\varrho =$ { Reaktionsgeschwindigkeit.

Macht man schliefslich $AB_0 = AB$, so wird
$B_0 D_a = c_\alpha$ = Aktionsgeschwindigkeit,
$B_0 H = \sqrt{c_\alpha^2 + c_\varrho^2} = c_n$ = Nutzgeschwindigkeit,
und wenn $GD_a = BA = c_e$ gemacht wird, so folgt
$GH = c_w$ = wirksame Geschwindigkeit.

2. Auch hier mufs für reine Aktionswirkung H in D_a, folglich C_0 in die Mitte von B_0 und D_a fallen.

c. Kreiselpumpen.

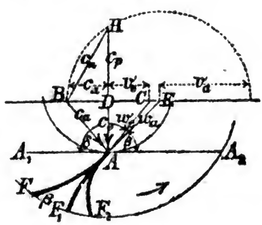
(Weiteres über Kreiselpumpen s. S. 591 u. f.)

Sind umgekehrte äufsere Radialturbinen (Abbild. 535).

Gewählt wird die senkrecht zum inneren Radumfange gerichtete Eintrittsgeschwindigkeit $c_e = DA$ (etwa = 2 bis 3 m i. d. Sek. = Geschwindigkeit im Saugrohr).

Ist AC die Richtung des Schaufelanfangs, und zieht man durch D eine Parallele zu $A_1 A_2$, so wird

Abbild. 535.



$DC = v_e =$ Geschwindigkeit des inneren Radumfanges,
$CA = w_e =$ relative Eintrittsgeschwindigkeit.

Bei einem Rade mit abnehmender Kranzbreite, welches aufsen und innen denselben Querschnitt besitzt, ist DA auch die radiale Komponente der Austrittsgeschwindigkeit. Macht man daher

$\measuredangle EAA_2 = \beta =$ Neigung des Schaufelendes gegen den Umfang, so wird: $EA = w_a =$ relative Austrittsgeschwindigkeit.

Trägt man $EB = v_a = \frac{r_a}{r_e} v_e$ ab, so ist:

$BA = c_a =$ absolute Austrittsgeschwindigkeit.

Beschreibt man um E mit $EB = v_a$ einen Halbkreis, so wird:

$HD = c_p =$ Geschwindigkeit, welche der im Rade (aufser der Geschwindigkeit c_a) erlangten Pressung entspricht.

Weiter ergiebt sich:

$BD = c_a =$ Komponente von c_a, die bei der Wasserhebung nutzbar wird,
$BH = c_n =$ Nutzgeschwindigkeit.

1. c_p wird um so gröfser, je mehr die Schaufeln zurückgekrümmt sind. Endigen die Schaufeln (nach Rittinger) radial (F_1), so fällt E nach D und es wird $c_p = c_a$.

2. Bei vorwärtsgekrümmten Schaufeln (F_2) kann man $c_p = 0$ machen und erhält dann die kleinste Umfangsgeschwindigkeit bei gegebener Förderhöhe (entsprechend den Aktionsturbinen).

3. Aus der Förderhöhe h und der Widerstandshöhe z (etwa $= 0.4\,h$ bis $0,5\,h$) folgt

$$c_n = \sqrt{2g\,(h+z)}$$

und daraus der zu wählende Mafsstab.

D. Einzelheiten der Turbinen.

Schaufeln von Ueberdruck- und Strahlturbinen zweckmäfsig aus Flufs- oder Schweifseisenblech von 4 bis 8 mm Dicke, Grenzturbinen erhalten dagegen meist gufseiserne Schaufeln. Blechschaufeln in der Regel in die gufseisernen Kränze eingegossen, selten umgebördelt und damit zusammengenietet. Die einzugiefsenden Ränder (10 bis 16 mm breit) der Bleche müssen dem flüssigen Gufseisen metallisch reine Oberflächen bieten und werden deshalb verzinnt. Zur weiteren Sicherung gegen Lockerwerden erhalten diese Ränder schwalbenschwanzförmige Ausschnitte (Materialverminderung fördert das Einschweifsen).

Kränze, von Gufseisen, bei einzugiefsenden Schaufeln meist nicht unter 24 mm, bei den gröfseren Blechstärken 30 mm und darüber stark. Die Gufsspannungen in den Kränzen führen zuweilen im

Betrieb Zerspringen herbei. Deshalb zieht man wohl schweifseiserne Ringe auf die neue Turbine. Dasselbe geschieht häufiger noch bei sehr grofsen Turbinen, nachdem der äufsere Kranz zuvor aufgesprengt worden ist. Ferner empfiehlt sich, die Armsterne der Laufräder als gewölbte (durchbrochene) Scheiben und gesondert herzustellen.

Nabe sitzt in der Regel auf einem in die Welle eingreifenden zweiteiligen Tragringe. Nabenlänge zur Vermeidung des Schiefstellens des Rades grofs zu wählen, $\sim 0{,}1\, d_a + 8$ cm, wenn d_a der gröfste Durchmesser des Laufrades im Spalt.

Tragstange, bei Ueberwasserspurzapfen und hohler lotrecht gelagerter Welle, wird auf Knicken durch die Spurzapfenbelastung, auf Drehung durch das Reibungsmoment des Zapfens und häufig auch durch biegende Momente beansprucht. Fehlen letztere, so ist bei Vernachlässigung des Drehmomentes der Durchmesser der schweifseisernen Stange in cm:

$$d = \sqrt[4]{\frac{Pl^2}{6}} \text{ (Knickfall 2) mit } \mathfrak{S} = 16, \text{ s. S. 347)}$$

zu nehmen, worin bedeutet:

P den Spurzapfendruck in kg,
l die Länge der Tragstange in m.

Hat die Stange biegenden Momenten von Belang zu widerstehen — deren Auftreten jedoch zumeist durch geeignete Konstruktion zu vermeiden ist —, so ist ihnen besonders Rechnung zu tragen, wobei zu beachten, dafs Ausbiegungen der Tragstange das Verhalten des Spurzapfens empfindlich beeinflussen können. Das untere Ende der Stange ist entweder kegelförmig gestaltet und in die als Stangenträger geformte Fundamentplatte passend eingesetzt oder mit gewölbter Stirnfläche versehen und mit Spielraum in die Höhlung des Trägers eingesetzt, sowie durch Schrauben stellbar und gegen Drehung gesichert. Die erstere Art ist nur bei durchaus zuverlässigem Untergrund anzuwenden.

Welle, wenn voll, aus Schweifseisen oder Flufsstahl, wenn hohl, aus Gufseisen oder Stahlgufs. Stehende Wellen haben in der Regel aufser dem Drehmoment noch Zug- oder Druckkräften und biegenden Momenten zu widerstehen. Letztere rühren her von der Wasserbelastung des Laufrades bei teilweiser und unsymmetrischer Beaufschlagung, ferner bei Uebertragung der Arbeit durch Stirnräder oder Kegelräder vom Zahndruck u. a. m.; bei Kegelrädern darf das Moment der achsialen Seitenkraft des Zahndruckes in der Regel nicht vernachlässigt werden. Die Welle ist dann zu berechnen aus der Beziehung (vergl. S. 306 und 360 für $m = \frac{10}{3}$ nach Bach):

$$k_b \geq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65 \sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2},$$

worin zu setzen $\sigma = \sigma_z + \sigma_b$ für den Fall, dafs eine Zugkraft von Belang vorhanden ist; ferner ist:

$$a_0 = \frac{k_b}{1{,}3\, k_d}.$$

Für stofsfreien Betrieb und veränderliche Arbeitsabgabe ist zu setzen

für gufseiserne hohle Wellen $k_d = 0{,}8\, k_z = 160$ (Beanspruchungsweise b Tafel S. 809), $k_b = 1{,}5\, k_z = 150$ kg f. d. qcm (Beanspruchungsweise c ebendas.), entsprechend $a_0 = \sim 0{,}75$.

Bei Feststellung der Abmessungen geht man vom inneren Durchmesser der hohlen Welle aus u. zw. nimmt man ihn bei kurzen Wellen um 15 bis 20 mm, bei langen Wellen um etwa 30 mm gröfser als den Durchmesser der Tragstange, vorausgesetzt, dafs das für den Kern erforderliche Mindestmafs erreicht wird; anderenfalls ist von der aus Herstellungsrücksichten gebotenen Kernstärke auszugehen. Der rechnungsmäfsige äufsere Durchmesser ist dem Kernverlegen entsprechend zu vergröfsern. Gröfsere Abstufungen in der Wandstärke sind zu vermeiden, deshalb behält man die für den gefährlichen Querschnitt berechnete Stärke für die ganze Welle bei, mit Ausnahme der Laufstellen und Nabensitze, falls nicht triftige Gründe dagegen sprechen.

Mit der Länge der im ganzen ausgeführten gufseisernen Welle gehen die meisten Fabriken bis 5,5 m; bei längeren Leitungen werden die einzelnen Wellen durch Schraubenkupplungen verbunden.

Spurzapfen bei den meisten Anlagen über Wasser angeordnet: **Ueberwasserzapfen,** u. zw. ist er in der Regel mit dem auf die Tragstange gesetzten Spurlager in einer Erweiterung der hohlen Welle untergebracht, welche eine für den Einbau von Zapfen und Lager und deren Wartung hinreichend grofse Oeffnung besitzt. Bei Oberzapfen (Abbild. 538 a. S. 661), am Ende des Wellenstranges angeordnet (zum Unterschied von Mittelzapfen; Abbild. 536 a. S. 660), sind meist zwei solcher Oeffnungen vorgesehen. Ueber der Welle sitzende **Ringzapfen** (Abbild. 539 a. S. 661) sollen nur gezwungen angeordnet werden, z. B. wenn die Aufstellung einer Tragstange für den vollen Zapfen schwierig ist oder die Untergrundverhältnisse die Erhaltung der richtigen Lage der Tragstange nicht zu gewährleisten vermögen, oder wenn die Wellenleitung sehr lang und es mit Rücksicht auf die Wartung geboten ist, den Zapfen in beträchtlicher Höhe über dem Laufrad anzuordnen. Ringzapfen verbrauchen nicht nur mehr Arbeit als Vollzapfen, sondern sind auch wegen ihres gröfseren Durchmessers gegen Fehler der Aufstellung und die kleinen Verschiebungen, die sich im Laufe des Betriebes einstellen, empfindlicher. **Unterzapfen** womöglich nur dann, wenn die Zugänglichkeit genügend gewahrt ist, wie z. B. bei den inneren Radialturbinen mit lotrechter Achse und Wasserzuführung von unten.

Als Material für die gleitenden Körper hat sich bewährt: Stahl und Bronze oder dichtes Gufseisen und Stahl, auch Hartgufs und Stahl.

Zapfendurchmesser nach der Formel:

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P}{p},$$

worin bedeutet:

d den Durchmesser des vollen Zapfens in cm,
P die gröfste wirklich auftretende Zapfenbelastung in kg,
p den durchschnittlichen Druck f. d. qcm Tragfläche;

hierbei zu beachten einerseits, dafs ein kleines p einer wirksamen Schmierung des Zapfens förderlich ist, andererseits, dafs bei beträchtlichem Zapfendruck kleine specifische Pressungen zu Zapfen von grofsem Durchmesser führen, welche gegen die unvermeidlichen Fehler der Aufstellung, die im Betriebe eintretenden Verschiebungen, sowie gegen Durchbiegungen der Welle und der Tragstange empfindlich sind. Man wird deshalb mit zunehmendem Zapfendruck P auch die gestattete Pressung p wachsen lassen. Dementsprechend werde gesetzt für die oben genannten Materialien und unter Voraussetzung der bei Turbinenzapfen üblichen guten Schmierung:

$$p = 40 + 0{,}3\sqrt{P} \text{ kg f. d. qcm.}$$

Für die bei Turbinenzapfen auftretenden Belastungen liefert die Formel $p = 50$ bis 80 kg f. d. qcm.*) Die Verminderung der Tragfläche durch die Schmiernuten ist in diesen Werten berücksichtigt.

Die Rücksicht auf Wärmeabführung erfordert nach Bach:

$$d \geqq \frac{Pn}{60\,000\,A_z} \text{ (vergl. S. 420),}$$

worin nach Stribeck $A_z = 0{,}67$ bis $1{,}67$.

Die höheren Werte sind nur zulässig, wenn alle der gleichmäfsigen Auflage des Zapfens hinderlichen Umstände fern gehalten werden, bei vorzüglicher Schmierung und thunlichster Förderung der Wärmeabgabe (Zapfen badet im Oel und wird von ihm durchflossen). Mit A_z über 1,67 zu gehen, ist selten rätlich und bedingt mindestens Oelkühlung oder dafs das Oel zwischen den Gleitflächen hindurch geprefst wird.

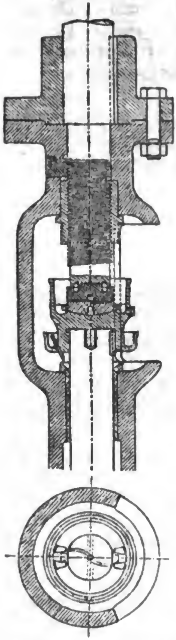
Beispiele: Abbild. 536 a. f. S. Mittelzapfen, Abbild. 538 Oberzapfen, Abbild. 539 Ringzapfen. Zuführung des Oels von der Mitte, so dafs beständiger Oelumlauf, Schmutzraum tiefer als die Gleitflächen zur Aufnahme von Unreinigkeiten und Metallspänen; Deckel auf dem Oelbehälter. Einstellung des Zapfens (bezw. des Laufrades) entweder durch Schraube und Mutter, oder durch eine auf das obere Ende der Zapfenspindel wirkende Stellschraube (bei Oberzapfen oder bei in mäfsiger Entfernung vom Wellenende angeordneten Mittelzapfen), oder durch Keile. Die Zapfenspindel mufs lang geführt und gegen ungewollte Drehung gesichert sein. Spurplatte durch Nasen an der Drehung gehindert. Doppelspur, Abbild. 538, dabei dient eine Spur als Reserve. Da mit Eintritt der Wirksamkeit des zweiten Gleitflächenpaares die Bedingungen für das Warmlaufen

*) Bei besonders günstigen Verhältnissen und kleinem n kann man p bis auf 120 kg f. d. qcm erhöhen.

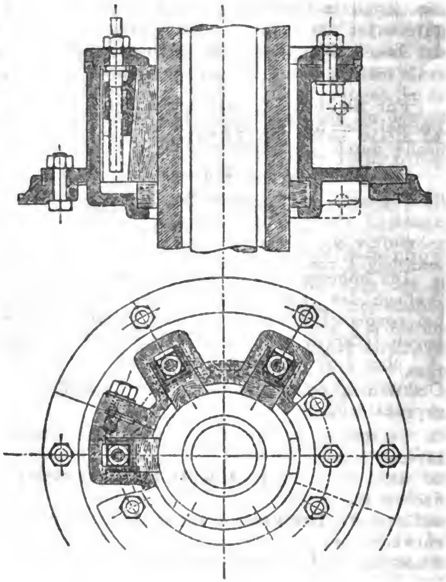
schon gegeben sind und jenes zudem gröfsere Reibung liefert als das für gewöhnlich arbeitende Flächenpaar, so erscheint der Wert dieser Konstruktion gering. Thatsächlich wird sehr häufig auf die Reservespur verzichtet.

Halslager mit Rücksicht auf geringe Abnutzung und richtige Nachstellung anzuordnen, da beides zur Instandhaltung des Spurzapfens nötig. Wo die achsiale Seitenkraft des Zahndruckes und einseitige Wasserbelastung erhebliche Momente ergeben, sind kurze Wellen zu vermeiden, weil sonst die Lagerentfernung klein und

Abbild. 536.



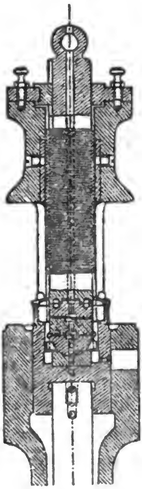
Abbild. 537.



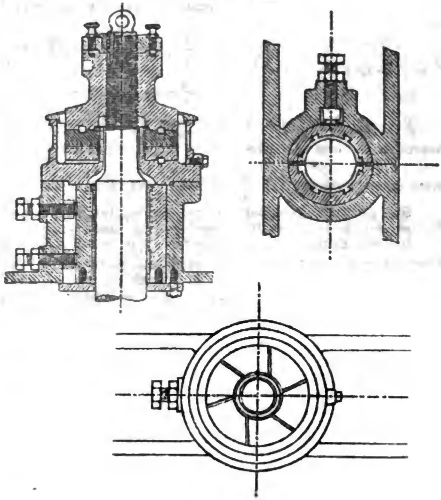
infolge dessen die Lagerbelastungen beträchtlich werden. Unter Wasser Pockholzführung (Abbild. 537), meist drei bis sechs Klötze, je nach Zugänglichkeit von hinten oder von oben nachstellbar und nach derselben Seite herausnehmbar. In die Zwischenräume der Klötze mufs das zur Schmierung dienende Wasser Zutritt haben. Ist ein nennenswerter Lagerdruck nicht vorhanden, so kann die Nachstellung entbehrt

werden. Ueber Wasser Lager mit Bronze oder Weifsmetallfutter gebräuchlich, oder auch gufseiserne zweiteilige Büchsen von erheblicher Länge. Zur möglichsten Entlastung des unter Wasser befindlichen Lagers rückt man das obere Lager thunlichst nahe an das Zahnrad. Am besten ist es, die Anordnung so zu treffen, dafs die tangentiale Seitenkraft des Zahndruckes in der Mittelebene des oberen Lagers wirkt, also nur dieses belastet.*)

Abbild. 538.



Abbild. 539.



III. DAMPFMASCHINEN.

A. Berechnung der Dampfmaschinen.

I. Analytische Berechnung.**)

a. Theoretische Bemerkungen.

Aufser den Bezeichnungen S. 672 p, p', $\frac{s_1}{s}$, p_i, f, f', m kommen hier noch in betracht: die relativen Kolbenwege $\frac{s_2}{s}$, $\frac{s_3}{s}$ und $\frac{s_4}{s}$ bei Beginn der Kompression,

*) Ueber Regelung der Turbinen und über Regulatoren s. A. Pfarr, Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891 S. 891 u. f.; ferner B. Lehmann, ebendas. 1879. S. 31 u. f.

**) Aus der 14. Auflage von Prof. Hrabák mit einigen Zusätzen desselben. Nachdruck vorbehalten.

bezw. der Vorausströmung und Voreinströmung, ferner die Gröfse der Drofslung ϑ in dem Sinne, dafs für die Admission (Einströmung) bei der mittleren Spannung p

die Dampf-Anfangsspannung $= (1 + \vartheta)\, p$,
die Dampf-Endspannung $= (1 - \vartheta)\, p$.

Für die **mittlere indizierte Spannung**: $p_i = fp - f'p'$ ist zunächst bei den Eincylinder-Maschinen mit Benutzung des Mariotteschen Gesetzes allgemein, bei beliebiger Dampfverteilung:

$$f = \frac{s_1}{s} + (1-\vartheta)\left(\frac{s_1}{s} + m\right) \ln \frac{\frac{s_2}{s} + m}{\frac{s_1}{s} + m} + \tfrac{1}{2}(1-\vartheta) \frac{\frac{s_1}{s} + m}{\frac{s_3}{s} + m}\left(1 - \frac{s_3}{s}\right) - \tfrac{1}{2}(1+\vartheta)\left(1 - \frac{s_4}{s}\right) \ldots 1)$$

$$f' = \frac{s_2}{s} + 1{,}1\left(1 - \frac{s_3}{s} + m\right) \ln \frac{1 - \frac{s_3}{s} + m}{1 - \frac{s_4}{s} + m} + 0{,}55 \frac{1 - \frac{s_3}{s} + m}{1 - \frac{s_4}{s} + m}\left(1 - \frac{s_4}{s}\right) - \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{s_2}{s}\right) \ldots 1')$$

Bei der **Kulissen-Steuerung** wird je nach Stellung des Gleitstückes eine besondere Füllung $\frac{s_1}{s}$ herbeigeführt, wobei die relativen Kolbenwege $\frac{s_2}{s}$, $\frac{s_3}{s}$ und $\frac{s_4}{s}$ stets auch besondere (zu $\frac{s_1}{s}$ gehörige) Werte annehmen.

Bei Ermittlung dieser Werte, sowie der Koefficienten f und f' wurde eine Kulisse mit konstantem linearem Voreilen (nach Gooch oder dergl.) zu grunde gelegt.

Bei der Ermittlung von $p_i = fp - f'p'$ mittelst der in folgendem angegebenen Werte von f und f' mufs indes berücksichtigt werden, dafs p' nicht blos mit p zunimmt, sondern auch gegen den Nullpunkt der Kulisse hin (vermöge der gedrosselten Ausströmung) sich derartig ändert, dafs am Nullpunkte überhaupt $fp = f'p'$ wird.

Bei Maschinen mit **Expansions-Steuerung** nimmt die Füllung $\frac{s_1}{s}$ verschiedene und beliebige Werte an, ohne dafs gleichzeitig die relativen Kolbenwege $\frac{s_2}{s}$, $\frac{s_3}{s}$ und $\frac{s_4}{s}$ eine Aenderung erleiden würden; d. h. die genannten Gröfsen nehmen in den Ausdrücken 1) und 1') konstante Werte an, im Mittel $\frac{s_2}{s} = 0{,}94$, $\frac{s_3}{s} = 0{,}96$, $\frac{s_4}{s} = 0{,}998$. Hiermit gestalten sich zunächst die Werte von f' in 1') von der Gröfse m (des schädlichen Raumes) allein abhängig, und zwar ergiebt sich:

für $m = 0{,}05$ . . . . $f' = 1{,}013$,
„ $m = 0{,}025$ . . . . $f' = 1{,}031$.

Der allgemeine Ausdruck 1) für f geht hiermit für alle Eincylinder-Maschinen, ausgenommen jene mit Kulissen-Steuerung, in den folgenden über:

$$= \frac{s_1}{s} + (1-\vartheta)\left(\frac{s_1}{s} + m\right)\left\{\ln \frac{0{,}96 + m}{\frac{s_1}{s} + m} + \frac{0{,}02}{0{,}96 + m}\right\} - 0{,}001\,(1 + \vartheta) \ldots . 2)$$

Die Abhängigkeit dieses Ausdruckes von ϑ und m zeigt den Einflufs der Drofslung und des schädlichen Raumes auf die Wirkung der Maschinen ohne und mit Dampfhemd.

Bei Dampfhemd-Maschinen kann zur Berechnung ihrer (gröfseren) Dampfwirkung eine entsprechend gröfsere (als die wirkliche) Dampfmenge expandierend angenommen werden, indem ein entsprechend gröfserer Wert von m für den schädlichen Raum in Rechnung gebracht wird, während diesfalls gleichzeitig auch eine geringere Drofslung (ϑ) anzunehmen sein wird, als bei den Maschinen ohne Hemd.

Bei einer Zweicylinder- (Woolf- oder Verbund-) Maschine läfst sich die indizierte Spannung p_i — als der auf den Expansionscylinder reduzierte, mittlere gesamte Spannungsunterschied — stets auf die Form $p_i = fp - f'p'$ zurückzuführen und hiermit

ziffernmäfsig berechnen, sobald das Inhaltsverhältnis $\nu = \frac{v}{V}$ der beiden Cylinder festgesetzt ist.

Für die vorkommenden verschiedenen Werte von ν gestaltet sich die Gröfse des ideellen Spannungs-Koefficienten f verschieden. In der Gegenwart mufs aufserdem der Unterschied zwischen Maschinen ohne und mit (geheiztem) Aufnehmer (Receiver) in bezug auf die Gröfse von f festgehalten werden. Die Zweicylinder-Maschinen ohne Aufnehmer (Woolf-Maschinen) sind jedoch im folgenden stets auch mit rechtzeitiger Absperrung des Expansionscylinders auf der Einströmungsseite gedacht; die alten Woolf-Maschinen mit ganzer Füllung des Expansionscylinders, und demgemäfs auch mit einem grofsen Spannungsabfall beim Dampfübertritte, besitzen geringere Werte von f und werden hier weiter nicht beachtet.

Bei den Dreicylinder-Maschinen (mit dreimaliger Expansion) gilt auf Grundlage des Inhaltsverhältnisses $v_1 : V$ (des Hochdruck- zum Niederdruck-Cylinder, ohne Rücksicht auf den Mitteldruck-Cylinder) ähnliches, wie für die Zweicylinder-Maschinen oben bemerkt.

Der **Dampfverbrauch** einer Maschine besteht aus dem nutzbaren Dampfverbrauche und dem Dampfverluste.

1. Der nutzbare Dampfverbrauch beträgt bei einer Eincylinder-Maschine in kg i. d. Std.:

$$Q' = 3600\, O c \left\{ \left(\frac{s_1}{s} + m\right) \gamma - 1{,}1 \left(1 - \frac{s_2}{s} + m\right) \gamma' \right\},$$

wobei γ das Gewicht von 1 cbm des Einströmungsdampfes in kg, γ' jenes des Ausströmungsdampfes bezeichnet; mit Hülfe der Gleichung:

$$N_i = \frac{10000}{75}\, O c p_i$$

ergiebt sich der nutzbare Dampfverbrauch f. d. indizierte PS u. Std.:

$$C'_i = \frac{Q'}{N_i} = \frac{27}{p_i} \left\{ \left(\frac{s_1}{s} + m\right) \gamma - 1{,}1 \left(1 - \frac{s_2}{s} + m\right) \gamma' \right\}.$$

Bei Kulissen-Steuerung ändert sich $\frac{s_2}{s}$ mit der Füllung $\frac{s_1}{s}$, und teilweise auch γ' mit p, während γ jedenfalls durch p (nach Fliegners Dampftafel; s. S. 258 u. 252) gegeben ist und bei Expansionssteuerung

$$\frac{s_2}{s} = 0{,}94 \text{ und } \gamma' = \begin{cases} 0{,}660 \text{ für Auspuff,} \\ 0{,}137 \text{ für Kondensation} \end{cases}$$

gesetzt werden kann. Demnach hängt C'_i bei einer gewissen Maschinengattung nur von p und $\frac{s_1}{s}$ ab und ist in folgendem für die verschiedenen Maschinengattungen ziffernmäfsig angegeben. Daselbst findet man auch Angaben für die Zweicylinder- und Dreicylinder-Maschinen.

2. Der Dampfverlust rührt zum gröfsten Teile von der Abkühlung innerhalb des Cylinders, zum geringeren Teil von Undichtheiten her, wonach man den „Abkühlungsverlust" und den „Dampflässigkeitsverlust" zu unterscheiden hat.

Die rechnungsmäfsige Bestimmung der Dampfverluste bildet den schwierigsten Punkt der ganzen Dampfmaschinen-Theorie und wird streng theoretisch wohl niemals bewältigt werden.

Eine halbwegs wissenschaftliche Ableitung der Formel für den Abkühlungs-Verlust (C''_i f. d. indiz. PS u. Std.) als den Hauptverlust, ist an dieser Stelle wegen ihrer Weitläufigkeit ausgeschlossen. Sofern man sich für die gewöhnlichen Fälle der Anwendung mit einer ungefähren Beurteilung begnügen will*), können (als

*) Genaueres hierüber (sowie über alle Teile der Dampfmaschinen-Berechnung) findet man in der neu erschienenen 2. Auflage von Hrabáks Hilfsbuch für Dampfmaschinen-Techniker.

ziemlich rohes Durchschnittsergebnis der betreffenden theoretisch-empirischen Betrachtung) Werte des Produktes $\sqrt{c}\, C''_i$ für verschiedene Maschinengattungen angegeben werden (vergl. S. 678), aus denen durch Division mit $\sqrt{c}$ die ungefähre Gröfse von C''_i gefolgert werden kann, welche sodann für das betreffende Hubverhältnis $s:d$ (in ebendaselbst angegebener Weise) zu verbessern ist.

Ueber den Dampflässigkeitsverlust C'''_i s. S. 678.

b. Tafeln.

Tafel I.

Gewöhnliche (mäfsige) Kolbengeschwindigkeiten c (in m i. d. Sek.).

Nach Hrabák.

N PS	Absol. Einstr.-Spannung p in Atm. 3	4	6	8	10
3	0,89	0,99	1,13	1,24	1,35
6	0,97	1,07	1,23	1,35	1,47
10	1,02	1,14	1,31	1,43	1,56
20	1,13	1,24	1,42	1,55	1,67
40	1,25	1,37	1,55	1,69	1,82
70	1,42	1,52	1,68	1,82	1,95
100	1,51	1,62	1,78	1,92	2,05
200	1,70	1,84	2,05	2,18	2,31
300	1,81	1,96	2,20	2,35	2,50
400	1,90	2,06	2,31	2,47	2,63
600	2,02	2,20	2,47	2,66	2,83
1000	2,17	2,37	2,67	2,88	3,12

Verbesserungs-Koefficient für c bei ungewöhnlichem Hubverhältnis $\frac{s}{d}$.

$\frac{s}{d}$	Koefficient.
0,5	0,57
0,75	0,67
1,00	0,75
1,5	0,90
2,0	1,0
2,5	1,1
3	1,2
4	1,3
5	1,4

Die Ansätze sind empirisch; man kann sie abrunden, auch davon aus verschiedenen Gründen überhaupt abweichen. Die Ansätze sind etwa zu benutzen, wenn man für eine erst auszumittelnde Maschine zunächst nichts anderes kennt als (aufser der Einströmungs-Spannung p) ihre Stärke N.

Hat man den Hub einer Maschine festgestellt, so kann man als wohlpassende mittelgrofse Kolbengeschwindigkeit (nach Hrabák) annehmen:

$$c = 0{,}9\sqrt{ps},$$

welche um 20% vermindert ungefähr die obigen „mäfsigen" Geschwindigkeiten, um 25% vermehrt aber die grofsen Kolbengeschwindigkeiten schnellgehender Maschinen liefert.

Gröfse der Kolbengeschwindigkeit nach anderen Quellen.

1. Nach **G. Schmidt:**

$$c = \alpha(10 + \sqrt{N}).$$

Der Koefficient α beträgt für

sehr langsam	langsam	normal	schnell	sehr schnell laufende Maschinen:
$\alpha = 0{,}05$	0,07	0,09	0,11	0,13 bis 0,20.

2. Nach **R. Werner:**

$$c = 4{,}2\sqrt{s} \text{ für Auspuffmaschinen,}$$
$$c = 3{,}0\sqrt{s} \text{ „ Kondensationsmaschinen.}$$

3. Nach **Radinger** ergiebt sich die gröfste zulässige Kolbengeschwindigkeit, wenn $G:10000\,O$ das Gewicht der hin- und hergehenden Massen in kg f. d. qcm Kolbenfläche bedeutet,

für Auspuffmaschinen (mit $G:10000\,O = 0{,}28$ kg f. d. qcm) aus:

$$sn^2 = 5350\,(p - p'),$$

für Kondensationsmaschinen (mit $G:10000\,O = 0{,}33$ kg f. d. qcm) aus:

$$sn^2 = 4500\,(p - p').$$

(Vorausgesetzt Schubstangenlänge: Kurbellänge = 5.)

Bemerkung. Die Füllung darf nicht kleiner werden als:

$$\frac{s_1}{s} = \frac{p'}{p} = \frac{p}{8\,(p - p')}.$$

Tafel II.

Mittlere Werte wirtschaftlich vorteilhaftester Füllungen.

(Von A. Kás.)

Absol. Einströmungs-Spannung p in Atm.	Eincylinder-Auspuff-Maschinen		Kondensations-Maschinen:		
	mit Kulissen-Steuerung.	mit Expansions-Steuerung.	Eincylinder-Maschinen		Zwei-cylinder-Maschinen.
			ohne Hemd.	mit Hemd.	
$p = 3$	0,65—0,60	0,47—0,43	0,26—0,22	0,20—0,18	0,16—0,14
$p = 4$	0,53—0,46	0,39—0,33	0,20—0,17	0,15—0,13	0,12—0,11
$p = 5$	0,46—0,39	0,33—0,28	0,17—0,15	0,13—0,11	0,10—0,09
$p = 6$	0,40—0,31	0,28—0,22	0,15—0,13	0,11—0,09	0,09—0,08
$p = 8$	0,34—0,27	0,22—0,17	0,14—0,12	0,09—0,08	0,07—0,06
$p = 10$	0,29—0,23	0,18—0,13	—	—	—

Anm. Die gröfseren Füllungen gelten für kleinere, die kleineren hingegen für grofse Maschinen. Die normalen Füllungen können etwas kleiner genommen werden bei hohen Brennstoffpreisen und ununterbrochenem Maschinenbetriebe; dagegen können etwas gröfsere Füllungen als normal angenommen werden bei wohlfeilem Brennstoffe oder für stark absätzigen Maschinenbetrieb.

Bei den Zweicylinder-Auspuff-Maschinen darf man auf eine Endspannung von 1,7 bis 1,25 Atm., bei den Dreicylinder-Kondensations-Maschinen auf eine solche von 0,6 bis 0,4 Atm. expandieren.

Tafel III.

Vorläufige Wirkungsgrade η nebst $1:\eta$ bei normalen Füllungen.

$\frac{N_n}{c}$	Auspuff-Maschinen.			Kondensations-Maschinen. Eincylinder-Maschinen.			Kondensations-Maschinen. Zwei- und Dreicylinder-Maschinen.		
	$\frac{N_i}{c}$	η	$\frac{1}{\eta}$	$\frac{N_i}{c}$	η	$\frac{1}{\eta}$	$\frac{N_i}{c}$	η	$\frac{1}{\eta}$
3	4,2	0,708	1,413	—	—	—	—	—	—
4	5,6	0,716	1,397	—	—	—	—	—	—
5	6,9	0,724	1,381	7,4	0,678	1,475	—	—	—
6	8,2	0,730	1,370	8,7	0,685	1,461	—	—	—
8	10,8	0,742	1,349	11,5	0,698	1,433	—	—	—
10	13,3	0,752	1,330	14,1	0,710	1,409	14,6	0,685	1,460
12	15,7	0,761	1,315	16,6	0,721	1,387	17,3	0,693	1,443
14	18,2	0,770	1,299	19,1	0,732	1,366	20,0	0,701	1,427
16	20,6	0,776	1,288	21,6	0,741	1,350	22,6	0,709	1,411
18	23,0	0,781	1,281	24,1	0,746	1,341	25,1	0,716	1,397
20	25,5	0,785	1,274	26,6	0,751	1,332	27,7	0,723	1,383
25	31,5	0,793	1,261	32,9	0,760	1,316	34,0	0,733	1,364
30	37,5	0,800	1,250	39,1	0,768	1,302	40,4	0,742	1,348
35	43,4	0,807	1,239	45,1	0,776	1,289	46,7	0,748	1,337
40	49,1	0,814	1,229	51,1	0,783	1,277	53,0	0,755	1,325
50	60,9	0,821	1,218	63,2	0,791	1,264	65,2	0,767	1,304
60	72,5	0,827	1,210	75,2	0,797	1,255	77,3	0,777	1,291
70	84,0	0,832	1,202	87,1	0,803	1,245	89,4	0,784	1,279
80	95,5	0,837	1,195	98,9	0,809	1,237	101,6	0,787	1,270
90	106,9	0,841	1,189	110,5	0,814	1,229	113,8	0,790	1,265
100	118	0,845	1,183	122	0,819	1,221	126	0,793	1,261
120	141	0,848	1,180	146	0,823	1,215	150	0,799	1,252
140	165	0,851	1,176	169	0,827	1,209	174	0,804	1,243
160	187	0,854	1,172	193	0,830	1,204	198	0,808	1,238
180	210	0,857	1,167	216	0,833	1,200	222	0,810	1,235
200	233	0,860	1,163	239	0,836	1,196	246	0,812	1,232
250	289	0,864	1,157	296	0,842	1,188	307	0,815	1,227
300	346	0,868	1,152	354	0,848	1,179	367	0,818	1,223
350	402	0,870	1,149	411	0,851	1,175	426	0,821	1,218
400	459	0,872	1,147	469	0,853	1,172	486	0,823	1,215
500	574	0,877	1,140	583	0,858	1,166	604	0,828	1,208
600	683	0,881	1,136	696	0,862	1,161	721	0,831	1,203
700	792	0,884	1,131	808	0,865	1,156	838	0,834	1,199
800	902	0,887	1,128	922	0,868	1,153	956	0,837	1,195
1000	1125	0,889	1,125	1149	0,870	1,149	1191	0,840	1,191
1500	1674	0,896	1,116	1711	0,877	1,140	1769	0,848	1,179
2000	2220	0,901	1,110	2268	0,882	1,134	2342	0,854	1,171

Tafel IV.

Werte der Spannungs-Koefficienten f und f' zur Ermittlung der indizierten Spannung $p_i = fp - f'p'$.

1. Für Eincylinder-Maschinen.

Füllung. $\frac{s_1}{s}$	mit Kulissen-Steuerung.*)		mit Expansions-Steuerung (ohne Kompression $f' = 1,024$)			
			Auspuff ($p' = 1,13$)		Kondensation ($p' = 0,21$)	
	f	f'	ohne Hemd.	mit Hemd.	ohne Hemd.	mit Hemd.
			Werte von f.			
0,8	0,937	1,004	0,950	0,954	—	—
0,7	0,893	1,024	0,919	0,925	—	—
0,6	0,839	1,055	0,875	0,883	0,867	0,883
0,5	0,773	1,095	0,816	0,827	0,807	0,827
0,4	0,693	1,146	0,740	0,753	0,731	0,753
0,333	0,629	1,185	0,678	0,692	0,668	0,692
0,3	0,593	1,206	0,643	0,658	0,633	0,658
0,25	0,535	1,239	0,584	0,600	0,575	0,600
0,20	0,468	1,270	0,517	0,535	0,508	0,535
0,15	0,391	1,275	0,440	0,460	0,432	0,460
0,125	—	—	0,397	0,418	0,390	0,418
0,10	—	—	0,351	0,373	0,344	0,373
0,07	—	—	—	—	0,283	0,314
0,05	—	—	—	—	0,239	0,270

Werte von f' bei Eincylinder-Maschinen mit Expansions-Steuerung bei ansehnlicher Kompression des Vorderdampfes (bis nahe zur Gegendampfspannung).

Absol. Einstr.-Spann. p	f' für Auspuff.	f' für Kond.
$2\frac{1}{2}$	—	1,39
3	—	1,51
4	1,07	1,79
5	1,13	2,08
6	1,19	2,40
7	1,25	2,74
8	1,33	3,08
9	1,40	3,43
10	1,49	—
wenn $m =$	0,05	0,025

2. Für Zweicylinder-Maschinen mit Doppelsteuerung und mit Dampfhemd mindestens am Hochdruck-Cylinder.

Schädlicher Raum des Expansions-Cylinders mit 3% (höchstens) angenommen.

Füllung $\frac{s_1}{s}$ (reduz.)	Maschinen ohne (geheizten) Aufnehmer.				Aufnehmer-Maschinen (mit Heizung auch des Niederdruck-Cylinders).				
	Ungefähres Verhältnis $v : V$ der Cylinder-Inhalte.								
	0,40	0,333	0,29	0,25	0,55	0,50	0,45	0,40	0,333
	Werte von f.								
0,25	0,548	0,543	0,534	0,524	0,576	0,572	0,568	0,563	0,560
0,20	0,484	0,479	0,472	0,464	0,512	0,507	0,503	0,499	0,495
0,15	0,408	0,404	0,398	0,301	0,437	0,432	0,428	0,424	0,420
0,125	0,365	0,361	0,356	0,350	0,395	0,390	0,386	0,382	0,377
0,10	0,318	0,314	0,309	0,304	0,349	0,344	0,340	0,335	0,330
0,07	0,254	0,250	0,245	0,241	0,288	0,283	0,278	0,273	0,267
0,05	0,205	0,201	0,197	0,193	0,242	0,237	0,232	0,227	0,220
0,04	0,179	0,175	0,171	0,167	0,218	0,213	0,207	0,202	0,195

*) Bei den Auspuff-Maschinen mit Kulissen-Steuerung setze man:

für								
$p =$	3	4	5	6	7	8	9	10
$p' =$	1,14	1,17	1,20	1,23	1,26	1,29	1,32	1,35

Gegen den Nullpunkt der Kulisse nimmt überdies p', wenn $p < 5$, entsprechend ab und, wenn $p > 6$, entsprechend zu, so dafs am Nullpunkt $fp = f'p'$ wird.

Mit Kondensation auch hier $p' = 0{,}21$; ohne (namhafte) Kompression $f' = 1{,}024$, also $f'p' = 0{,}22$. Bei ansehnlicher Kompression bis nahe zur Gegendampfspannung hat man je nach der absoluten Einströmungs-Spannung im Durchschnitt:

für $p =$	3	4	5	6	7	8	9
$f' =$	1,34	1,47	1,60	1,72	1,82	1,91	1,96

Bei den Zweicylinder-Auspuff-Maschinen ist $p' = 1{,}13$ und ohne (namhafte) Kompression $f' = 1{,}024$; bei der Kompression bis nahe zur Gegendampfspannung ist f' nicht ansehnlich gröfser.

3. Für Dreicylinder-Maschinen mit dreimaliger Expansion und mit Dampfhemd mindestens am Hochdruck-Cylinder.

Füllung $\frac{s_1}{s}$ (reduz.)	Maschinen ohne Heizung der beiden Aufnehmer.			Maschinen mit Heizung beider Aufnehmer und aller Dampfcylinder.		
	Ungefähres Inhalts-Verhältnis $\frac{v_1}{V}$ (des Hochdruckcylinders zum Niederdruckcylinder).					
	0,17	0,135	0,11	0,17	0,135	0,11
0,15	0,369	0,361	0,352	0,401	0,395	0,389
0,125	0,330	0,323	0,316	0,361	0,354	0,348
0,10	0,287	0,281	0,275	0,316	0,310	0,303
0,08	0,250	0,244	0,237	0,278	0,271	0,264
0,07	0,230	0,224	0,218	0,257	0,250	0,243
0,06	0,208	0,203	0,197	0,235	0,228	0,221
0,05	0,185	0,179	0,173	0,212	0,204	0,197
0,04	0,161	0,155	0,149	0,188	0,180	0,172
0,035	0,148	0,142	0,135	0,175	0,166	0,159
0,03	0,135	0,128	0,122	0,161	0,153	0,144
0,025	0,121	0,114	0,107	0,148	0,139	0,130
0,02	0,106	0,099	0,092	0,134	0,125	0,115

Mit Kondensation hier gleichfalls $f'p' = 0{,}22$ und bei Kompression in allen drei Cylindern bis nahe zur Gegendampfspannung je nach deren Gröfse $f'p' = 0{,}28$ bis 0,35.

Tafel V.

Leergangs-Widerstandsspannung r (kg f. d. qcm oder Atm.) und Koefficient μ der zusätzlichen Reibung.

Für Eincylinder-Auspuff:

$$r = r' + r'' \quad \ldots \quad \left(r' = 0{,}042\sqrt{p};\ r'' = \frac{0{,}025}{d}\right).$$

Für Eincylinder-Kondensation:

$$r = r'_c + r''_c \quad \ldots \quad \left(r'_c = 0{,}025 + 0{,}05\sqrt{p};\ r''_c = \frac{0{,}045}{d}\right).$$

Hierin ist durch $0{,}042\sqrt{p}$ bezw. $0{,}05\sqrt{p}$ der Stärke des Baues der Maschine Rechnung getragen.

Die Maschine ist gebaut:	leicht.		mittelstark.			sehr kräftig.			
für eine Spannung $p =$	3	4	5	6	7	8	10	12	14
„ Auspuff $r' =$	0,073	0,084	0,094	0,103	0,111	0,119	0,133	0,146	0,157
„ Kondens. $r'_c =$	0,112	0,125	0,137	0,148	0,157	0,166	0,183	0,198	0,212

Kolben-Durchmesser d m	Auspuff. r''	Kondens. r''_c	Für alle Maschinen. μ	$\frac{1}{1+\mu}$	Kolben-Durchmesser d m	Auspuff. r''	Kondens. r''_c	Für alle Maschinen. μ	$\frac{1}{1+\mu}$
0,12	0,208	—	0,212	0,825	0,60	0,042	0,075	0,112	0,900
0,14	0,179	—	0,204	0,831	0,70	0,036	0,064	0,101	0,908
0,16	0,156	0,281	0,197	0,836	0,80	0,031	0,056	0,092	0,916
0,18	0,139	0,250	0,190	0,841	0,90	0,028	0,050	0,086	0,921
0,20	0,125	0,225	0,183	0,845	1,00	0,025	0,045	0,079	0,927
0,25	0,100	0,180	0,170	0,855	1,20	0,021	0,038	0,077	0,928
0,30	0,083	0,150	0,157	0,864	1,40	0,018	0,032	0,075	0,930
0,35	0,072	0,129	0,147	0,872	1,60	0,016	0,028	0,073	0,932
0,40	0,063	0,113	0,138	0,879	1,80	0,014	0,025	0,071	0,933
0,45	0,056	0,100	0,130	0,885	2,00	0,013	0,023	0,070	0,935
0,50	0,050	0,090	0,122	0,891	2,50	0,010	0,018	0,066	0,938
0,55	0,046	0,082	0,117	0,895	3,00	0,008	0,015	0,063	0,941

Für die Zweicylinder-Auspuff-Maschinen ist r'' um 50% zu vergröfsern. Für die Zweicylinder-Kondensations-Maschinen ist r''_c um 25% und für die Dreicylinder-Kondensations-Maschinen um 40% gröfser als die obigen Ansätze anzunehmen.

Bem. Der Koefficient μ ergiebt sich bei guten Maschinen bedeutend kleiner; in seiner höheren Schätzung liegt die Sicherheit der Berechnung. Wenn hier μ selbst um 30% überschätzt ist, so ist $\frac{1}{1+\mu}$ (bezw. auch der Wirkungsgrad) doch nur um 4 bis 2% unterschätzt.

Nutzbarer Dampfverbrauch C'_i

für 1 indizierte Pferdestärke und Stunde in kg.

Tafel VI *A*.

A. Bei den Eincylinder-Auspuff-Maschinen.

1. Mit Kulissen-Steuerung.

Bem. Bei genauen Maschinen kann C'_i durchschnittlich um 0,8 kg kleiner ausfallen.

Füll. $\frac{s_1}{s}$ =	0,7	0,6	0,5	0,4	0,333	0,3	0,25	0,20	0,15
$p = 2\frac{1}{2}$	22,6	22,0	22,3	—	—	—	—	—	—
3	19,6	18,6	18,0	18,2	—	—	—	—	—
$3\frac{1}{2}$	17,7	16,8	15,9	15,4	15,5	—	—	—	—
4	16,7	15,6	14,7	14,0	13,7	13,7	—	—	—
$4\frac{1}{2}$	15,9	14,8	13,9	13,0	12,6	12,4	—	—	—
$p = 5$	15,3	14,2	13,3	12,4	11,9	11,6	11,3	—	—
$5\frac{1}{2}$	14,9	13,8	12,8	12,0	11,4	11,1	10,8	—	—
6	14,4	13,4	12,4	11,5	10,9	10,6	10,2	9,8	—
$6\frac{1}{2}$	14,1	13,1	12,1	11,2	10,6	10,4	9,9	9,5	—
$p = 7$	13,9	12,8	11,9	10,9	10,3	10,2	9,6	9,2	8,8
8	13,5	12,5	11,5	10,6	10,0	9,6	9,2	8,8	8,5
9	13,1	12,1	11,2	10,3	9,7	9,4	8,9	8,5	8,2
10	12,9	11,9	11,0	10,1	9,4	9,1	8,7	8,3	8,0

2. Mit Expansions-Steuerung.

Bem. Bei genauen Maschinen kann C'_i durchschnittlich um 0,7 kg kleiner ausfallen.

Füll. $\frac{s_1}{s}$ =	0,7	0,6	0,5	0,4	0,333	0,3	0,25	0,20	0,15	0,125	0,10
$p = 2\frac{1}{2}$	21,7	20,4	19,5	19,5	20,4	21,5	—	—	—	—	—
3	18,6	17,3	16,3	15,6	15,6	15,8	16,6	—	—	—	—
$3\frac{1}{2}$	16,9	15,6	14,5	13,7	13,3	13,5	14,3	17,0	—	—	—
4	15,8	14,6	13,5	12,7	12,1	11,9	11,9	12,1	13,3	—	—
$4\frac{1}{2}$	15,0	13,8	12,7	11,8	11,3	11,1	10,8	10,9	11,4	12,2	—
$p = 5$	14,5	13,3	12,2	11,2	10,7	10,4	10,2	10,0	10,3	10,7	11,6
$5\frac{1}{2}$	14,1	12,9	11,8	10,8	10,3	10,0	9,7	9,5	9,6	9,9	10,5
6	13,7	12,5	11,4	10,4	9,9	9,6	9,3	9,0	9,0	9,1	9,4
$6\frac{1}{2}$	13,4	12,2	11,2	10,2	9,6	9,4	9,0	8,7	8,6	8,7	8,9
$p = 7$	13,1	12,0	10,9	9,9	9,4	9,1	8,7	8,4	8,2	8,2	8,4
8	12,7	11,6	10,6	9,6	9,0	8,7	8,3	8,0	7,7	7,7	8,0
9	12,4	11,3	10,3	9,3	8,7	8,5	8,1	7,7	7,4	7,3	7,3
10	12,1	11,1	10,1	9,1	8,5	8,2	7,8	7,5	7,1	7,0	6,9

Bei den Zweicylinder-Auspuff-Maschinen mit Kompression in beiden Cylindern bis zur Gegendampfspannung ist mindestens:

$$C'_i = 27\,\gamma\,\frac{s_1}{s}\,\frac{1}{p_i}$$

(hierin γ das zu p gehörige Dampfgewicht in kg f. d. cbm nach Fliegners Tafel, S. 258 u. 259).

Tafel VI *B*.

B. Bei den Kondensations-Maschinen.

1. Eincylinder-Maschinen (mit Dampfhemd.)

Bem. Bei den Eincylinder-Kondens.-Maschinen ohne Dampfhemd ist C'_i um die in der untersten Zeile angegebenen Beträge gröfser, bei genauen Dampfhemd-Maschinen hingegen beinahe um ebensoviel kleiner, bei genauen Maschinen ohne Hemd durchschnittlich um 0,2 bis 0,4 kg kleiner zu nehmen.

Füll. $\frac{s_1}{s}$ =	0,5	0,4	0,333	0,3	0,25	0,20	0,15	0,125	0,10	0,07	0,05
$p = 2\frac{1}{2}$	10,6	9,6	9,0	8,7	8,2	7,8	7,3	7,2	7,1	—	—
3	10,3	9,3	8,7	8,4	7,9	7,5	7,1	6,9	6,7	6,6	—
$3\frac{1}{2}$	10,1	9,1	8,5	8,2	7,8	7,3	6,9	6,7	6,5	6,3	6,3
4	10,0	9,0	8,4	8,1	7,6	7,2	6,7	6,5	6,3	6,1	6,1
$4\frac{1}{2}$	9,8	8,9	8,2	7,9	7,5	7,0	6,6	6,4	6,2	6,0	5,9
$p = 5$	9,7	8,8	8,1	7,8	7,4	6,9	6,5	6,3	6,1	5,9	5,8
$5\frac{1}{2}$	9,6	8,7	8,1	7,8	7,3	6,9	6,4	6,2	6,0	5,8	5,7
6	9,5	8,6	8,0	7,7	7,2	6,8	6,4	6,2	5,9	5,7	5,6
$6\frac{1}{2}$	9,5	8,5	7,9	7,6	7,2	6,8	6,3	6,1	5,9	5,7	5,5
$p = 7$	9,4	8,5	7,9	7,6	7,1	6,7	6,2	6,0	5,8	5,6	5,5
8	9,3	8,4	7,8	7,5	7,0	6,6	6,2	5,9	5,7	5,5	5,4
9	9,2	8,3	7,7	7,4	6,9	6,5	6,1	5,9	5,7	5,4	5,3
10	9,1	8,2	7,6	7,3	6,9	6,5	6,0	5,8	5,6	5,4	5,2
o. H. plus	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9

2. Zweicylinder-Maschinen (mit Dampfhemd mindestens am Hochdruck-Cylinder).

Bem. Die Tafelangaben von C_i gelten für gute Maschinen ohne geheizten Aufnehmer, jedoch bei rechtzeitiger Absperrung; bei genauen Aufnehmer-Maschinen kann C'_i bei den kleineren Füllungen um 0,5 bis 0,7 kg kleiner ausfallen.

Füll. $\frac{s_1}{s}$ = (reduz.)	0,25	0,20	0,15	0,125	0,10	0,07	0,05	0,04
$p = 3$	7,7	7,2	6,7	6,5	6,4	6,5	6,7	—
$3\frac{1}{2}$	7,5	7,0	6,5	6,3	6,1	6,1	6,3	—
4	7,3	6,8	6,3	6,0	5,9	5,8	5,9	6,0
$4\frac{1}{2}$	7,2	6,7	6,2	5,9	5,7	5,6	5,6	5,7
$p = 5$	7,1	6,6	6,0	5,8	5,6	5,4	5,4	5,4
$5\frac{1}{2}$	7,1	6,5	6,0	5,7	5,5	5,3	5,2	5,3
6	7,0	6,5	5,9	5,6	5,4	5,2	5,1	5,1
$6\frac{1}{2}$	7,0	6,4	5,8	5,6	5,3	5,0	4,9	5,0
$p = 7$	6,9	6,3	5,8	5,5	5,2	4,9	4,8	4,8
8	6,9	6,3	5,7	5,4	5,1	4,8	4,7	4,7
9	6,8	6,2	5,6	5,4	5,0	4,7	4,6	4,5
10	6,7	6,2	5,6	5,3	5,0	4,6	4,4	4,4

Bei den Dreicylinder-Kondensations-Maschinen mit Kompression in allen drei Cylindern bis zur Gegendampfspannung ist mindestens

$$C'_i = 27\,\gamma\,\frac{s_1}{s}\,\frac{1}{p_i}$$

(hierin γ das zu p gehörige Dampfgewicht in kg f. d. cbm nach Fliegners Tafel, S. 258 u. 259).

c. Bezeichnungen.

Die Spannungen sind überall in (neuen) Atmosphären zu 1 kg f. d. qcm ausgedrückt.

N_i = indizierte Leistung in PS (am Kolben);

N_n = Nutzleistung in PS (an der Welle);

$\eta = \frac{N_n}{N_i}$, der „indizierte" Wirkungsgrad;

p = mittlere absolute Einströmungs-Spannung;

p' = mittlere absolute Ausströmungs-Spannung;

f und f' = Spannungs-Koefficienten für p und p';

$p_i = fp - f'p'$ = indizierte Spannung, d. i. der mittlere Spannungsunterschied hinter und vor dem Kolben (bei den Zwei- und Dreicylinder-Maschinen der auf den Expansions- (Niederdruck-) Cylinder reduzierte, gesamte Spannungsunterschied beider Kolben);

r = auf den Kolben reduzierte Leergangswiderstands-Spannung, bei Kondensations-Maschinen mit Einschlufs des Pumpenwiderstandes (Luft- und Kaltwasser-Pumpe);

μ = Koefficient der zusätzlichen Reibung;

$p_n = \frac{1}{1+\mu}(p_i - r)$ = Nutzspannung;

d = Kolbendurchmesser in m;

O = wirksame Kolbenfläche (mit Berücksichtigung des Kolbenstangenquerschnittes) in qm; (bei den Zwei- und Dreicylinder-Maschinen die wirksame Kolbenfläche des Niederdruck-Cylinders);

s = Kolbenhub in m,

s_1 = Kolbenweg bis zur Absperrung in m, mithin

$s_1 : s$ = Füllungsverhältnis (Füllung), bei den Zwei- und Dreicylinder-Maschinen bezogen auf den Expansions-Cylinder (reduzierte Füllung),

$s : s_1$ = nomineller Expansionsgrad (bei den Zwei- und Dreicylinder-Maschinen der nominelle gesamte Expansionsgrad);

$s'_1 : s'$ = Füllung des Hochdruck-Cylinders } bei den Zwei- und Drei-
$S_1 : S$ = „ „ Niederdruck- „ } cylinder-Maschinen;

m = Koefficient für den schädlichen Raum, dessen Gröfse $= mOs$;

n = Anzahl der Umdrehungen (Doppelhübe) i. d. Min.,

c = mittlere Kolbengeschwindigkeit in m i. d. Sek., u. zw. ist stets $ns = 30c$;

ν bei den Zweicylinder-Maschinen das Inhaltsverhältnis beider Cylinder, u. zw. $\nu = \frac{v}{V} < 1$.

(Für die Dreicylinder-Maschinen folgen a. S. 676 einige besondere Bezeichnungen.)

C'_i = nutzbarer Dampfverbrauch, } in kg f. d. indiz. PS u. Std.,
C''_i = Anteil des Dampfverlustes, hauptsächlich von der Abkühlung herrührend, }

C'''_i = Anteil des Dampfverlustes, hauptsächlich von der Dampflässigkeit (des Kolbens u. s. w.) herrührend, } in kg f. d. indiz. PS u. Std.,

$C_i = C'_i + C''_i + C'''_i$ der Gesamt-Dampfverbrauch

$C_n = C_i \frac{1}{\eta} = C_i \frac{N_i}{N_n}$ der Gesamt-Dampfverbrauch { in kg f. d. Nutz-PS u. Std.

d. Rechnungsvorgang.

1. Vorläufige Ausmittlung für eine herzustellende Dampfmaschine von bestimmter Stärke.

Hauptgleichung: $N_i = \frac{10000}{75} p_i O c.$

Gegeben N_n und die absolute Kesselspannung p_0. Man nehme für die Berechnung ungefähr $p = 0{,}9\,p_0 - 0{,}5$, bei Fördermaschinen jedoch $p = 0{,}8\,p_0 - 0{,}5$ (für Lokomotiven s. Neunter Abschnitt, Eisenbahnwesen, II. Betriebsmittel) und setze (mittelst Tafel II) $\frac{s_1}{s}$, sowie (mittelst Tafel I) c fest;

(hiermit ist zugleich: $ns = 30\,c$ zahlenmäfsig festgesetzt).

Man berechne ferner $\frac{N_n}{c}$ und entnehme hierzu (aus Tafel III)

$$\frac{N_i}{c} = \frac{1}{\eta} \frac{N_n}{c};$$

bestimme alsdann mittelst Taf. IV:

$$p_i = fp - f'p'.$$

Mittelst der Hauptgleichung ergiebt sich sofort:

$$O = \frac{75}{10000} \frac{N_i}{c} \frac{1}{p_i}.$$

Mit einem Zuschlage von 1,5 bis 3% für den Kolbenstangenquerschnitt hat man:

$$\frac{\pi d^2}{4} = 1{,}015 \text{ bis } 1{,}03\,O,$$

wodurch sich d (vorläufig) mittelst Tafel S. 1 u. f. ergiebt; aus $ns = 30\,c$ bestimmt man s und n.

Beispiel: Für eine Eincylinder-Kondensations-Maschine mit Dampfhemd von $N_n = 50$ und $p_0 = 5$ wird:

$p = 4$; $\frac{s_1}{s} = 0{,}15$ (Taf. II); $c = 1{,}5$ (Taf. I); $ns = 45$; $\frac{N_n}{c} = 33{,}3$; $\eta = 0{,}773$; $\frac{1}{\eta} = 1{,}294$ (Taf. III); $\frac{N_i}{c} = 43{,}1$; $p_i = 1{,}620$; $O = \frac{75}{10000}\,43{,}1\,\frac{1}{1{,}620} = 0{,}1996$;

$\frac{\pi d^2}{4} = 1{,}03\, O = 0{,}2056$; $d = 0{,}512$ m; $s = 1$ m angenommen, folgt

$$n = \frac{30\, c}{s} = 45;\quad N_i = 64{,}7.$$

Sollte N_i (anstatt N_n) gegeben sein, so hat man unmittelbar:

$$O = \frac{75}{10000} \frac{N_i}{c} \frac{1}{p_i}.$$

2. Ausmittlung für vorhandene (oder vorhanden gedachte) Dampfmaschinen.

(Zugleich endgültige Bestimmung für vorläufig ausgemittelte Maschinen.)

Hauptgleichung:

$$N_n = \frac{10000}{75} p_n\, O\, c = \frac{10000}{75} \frac{1}{1+\mu} (p_i - r)\, O\, c$$

$$\left(\text{nebst } N_i = \frac{10000}{75} p_i\, O c\right).$$

Gegeben: d, O, s, n, c, p, $\frac{s_1}{s}$.

Man bestimme mittelst Taf. IV $p_i = fp - f'p'$ und entnehme aus Taf. V $r = r' + r''$ (für Auspuff) oder $r = r'_c + r''_c$ (für Kondensation) nebst $\frac{1}{1+\mu}$; dann ergiebt sich mittelst der Hauptgleichung N_n (nebst N_i).

Für eine vorläufig ausgemittelte Maschine ergiebt sich aus der Hauptgleichung, da N_n gegeben ist, O und d verbessert.

Beispiel. Für die vorhin vorläufig auf $d = 0{,}512$ m ausgemittelte Kondensations-Maschine giebt Taf. V zu diesem d und zu $p = 4$ gehörig (wenn nämlich die Maschine leicht gebaut ist):

$$r = r'_c + r''_c = 0{,}125 + 0{,}088 = 0{,}213,$$

$$\text{und} \frac{1}{1+\mu} = 0{,}892;$$

man hat somit gemäfs der Hauptgleichung:

$$50 = \frac{10000}{75} \cdot 0{,}892\, (1{,}620 - 0{,}213)\, O \cdot 1{,}5,$$

woraus verbessert (von dem Vorläufigen hier sehr wenig abweichend):

$$O = 0{,}1992;\quad \frac{\pi d^2}{4} = 1{,}03\, O = 0{,}2052$$

und $d = 0{,}511$ m folgt. — Um die Leistung dieser Maschine (mit $d = 0{,}512$, $O = 0{,}200$, $c = 1{,}5$, $p = 4$ bestehend gedacht) für $\frac{1}{3}$ Füllung zu ermitteln (also $\frac{s_1}{s} = 0{,}333$), hat man nach Taf. IV $p_i = 2{,}548$ und sodann mittelst der Hauptgleichung:

$$N_i = 102 \quad N_n = 83{,}2 \text{ PS}.$$

c. Besondere Angaben für Verbund-Maschinen.

1. Zweicylinder-Maschinen mit Kondensation.

Das **Inhaltsverhältnis** $v : V$ bei herzustellenden Maschinen ist je nach der reduzierten Füllung (zu der Eintrittsspannung p gehörig) einzurichten wie folgt:

a) bei den Verbund-Maschinen (mit Kurbeln unter 90°), wenn man den Aufnehmer- (Receiver-) Inhalt gröfser als den Inhalt v des Hochdruck-Cylinders macht, und:

α) wenn hierbei die gleiche Arbeitsverteilung auf beide Cylinder beabsichtigt wird, oder

β) wenn die gleiche Arbeitsverteilung auf die vier Quadranten gewünscht wird, oder

γ) wenn die Arbeitsverteilung nach α und β in gleichem Mafse berücksichtigt wird:

für eine Gesamtexpansion bis zu einer Endspannung

von 0,6 Atm.				von 0,5 Atm.			
$p =$ 5	6	8	10	$p =$ 5	6	8	10
$s_1 : s =$ 0,12	0,10	0,075	0,06	$s_1 : s =$ 0,10	0,083	0,063	0,05
α) $v : V =$ 0,60	0,54	0,47	0,42	α) $v : V =$ 0,52	0,48	0,41	0,36
β) $v : V =$ 0,48	0,44	0,38	0,34	β) $v : V =$ 0,42	0,39	0,34	0,30
γ) $v : V =$ 0,54	0,49	0,43	0,38	γ) $v : V =$ 0,47	0,43	0,37	0,33

Die Füllung des Hochdruck-Cylinders $\frac{s'_1}{s'} = \frac{s_1}{s} : \frac{v}{V}$; die Füllung des Expansions-Cylinders $\frac{S_1}{S} = \frac{v}{V}$ (solange $\frac{v}{V} < 0,5$).

b) Bei den genauen Woolf-Maschinen (mit gleichsinniger oder entgegengesetzter Kolbenbewegung bei möglichst geringem Spannungsabfall, mit kleinem Aufnehmer (Receiver), bezw. mit einfachem Verbindungsrohre) für nahe gleiche Arbeitsverteilung auf beide Cylinder, wenn man bis zu einer Endspannung (insgesamt) expandiert:

von 0,6 Atm.				von 0,5 Atm.			
$p =$ 5	6	8	10	$p =$ 5	6	8	10
$s_1 : s =$ 0,12	0,10	0,075	0,06	$s_1 : s =$ 0,10	0,083	0,063	0,05
$v : V =$ 0,40	0,35	0,30	0,27	$v : V =$ 0,35	0,31	0,26	0,23

Die Füllung des Hochdruck-Cylinders ist auch hier $\frac{s'_1}{s'} = \frac{s_1}{s} : \frac{v}{V}$; die Füllung $S_1 : S$ des Expansions-Cylinders zur Vermeidung eines (ansehnlicheren) Spannungsabfalles ist aufser von $v : V$ auch von der

(relativen) Gröfse des Verbindungsraumes (Receivers) abhängig; wenn dieser (als einfaches Verbindungsrohr) etwa die Gröfse 0,2 V besitzt, so hat man:

für $v : V = 0{,}4$	0,333	0,3	0,25
$S_1 : S = 0{,}65$	0,55	0,49	0,41.

2. Zweicylinder-Maschinen mit Auspuff.*)

(Mit eigentlicher Expansions-Steuerung gedacht.)

a) Verbund-Maschinen (mit Kurbeln unter 90°); wenn man bis zu einer Endspannung von (etwa) 1,5 Atm. (insgesamt) expandiert und eine Arbeitsverteilung wie unter α, β und γ bei den vorangehenden Verbund-Maschinen mit Kondensation wünscht, so mache man (den Aufnehmer-Inhalt ungefähr gleich dem Inhalte V des grofsen Cylinders angenommen):

$p = 8$	9	10	12
$s_1 : s = 0{,}20$	0,17	0,15	0,125
α) $v : V = 0{,}56$	0,53	0,49	0,46

β) $v : V = 0{,}47$	0,44	0,40	0,37
γ) $v : V = 0{,}51$	0,48	0,44	0,41.

b) Genaue Woolf-Maschinen (mit einem Aufnehmer-Inhalt nahe gleich dem Inhalte v des Hochdruck-Cylinders) für nahezu gleiche Arbeitsverteilung auf beide Cylinder, wenn man bis zu einer Endspannung von 1,5 Atm. (insgesamt) expandiert:

$p = 8$	9	10	12
$s_1 : s = 0{,}20$	0,17	0,15	0,125

$v : V = 0{,}44$	0,40	0,36	0,33
$S_1 : S = 0{,}61$	0,57	0,53	0,49.

3. Dreicylinder-Maschinen mit Kondensation und mit dreimaliger Expansion.**)

(Mit eigentlicher Expansions-Steuerung gedacht.)

Bezeichnungen:

v_1 Inhalt und $s'_1 : s'$ Füllung des Hochdruck-Cylinders;
v_2 „ „ $s''_1 : s''$ „ „ Mitteldruck- „ ;
V „ „ $S_1 : S$ „ „ Niederdruck- „ ;
$s_1 : s$ reduzierte Füllung der Gesamt-Expansion entsprechend wie zuvor.

a) Maschinen mit drei unter 120° verstellten Kurbeln.

r_1 Inhalt des ersten Aufnehmers (zwischen v_1 und v_2);
r_2 „ „ zweiten „ („ v_2 „ V).

*) Die nachfolgenden Angaben, sowie jene über die Dreicylinder-Maschinen sind einer Abhandlung von A. Káš (Ueber Compound-Maschinen mit hohem Dampfdruck, Oesterr. Zeitschr. für Berg- und Hüttenwesen 1888 Nr. 11 u. f.) mit Einwilligung des Verfassers entnommen.

**) In bezug auf die Dreicylinder-Maschinen mit zweimaliger Expansion (ein Hochdruck-Cylinder und zwei Niederdruck-Cylinder) wird auf die obengenannte Abhandlung von A. Káš verwiesen.

α. Für die gleiche Arbeitsverteilung auf alle drei einzelnen Cylinder.

Annahmen: $r_1 \sim v_1$; $r_2 \sim v_2$;

Expansions-Endspannung (insgesamt) 0,5 Atm.

1. Die Kurbel des Mitteldruck-Cylinders eilt der Hochdruck-Kurbel vor:

$p =$ 9	10	12	14 Atm.	$v_1 : v_2 =$ 0,27	0,26	0,25	0,245
$s_1 : s =$ 0,056	0,050	0,042	0,036	$s'_1 : s' =$ 0,31	0,30	0,28	0,26
$v_1 : V =$ 0,18	0,17	0,15	0,14	$s''_1 : s'' =$ 0,32	0,31	0,30	0,29
$v_2 : V =$ 0,67	0,65	0,60	0,57	$S_1 : S =$ 0,67	0,66	0,61	0,59.

2. Die Kurbel des Mitteldruck-Cylinders eilt der Hochdruck-Kurbel nach:

$p =$ 9	10	12	14 Atm.	$v_1 : v_2 =$ 0,36	0,35	0,33	0,32
$s_1 : s =$ 0,056	0,050	0,042	0,036	$s'_1 : s' =$ 0,27	0,26	0,24	0,22
$v_1 : V =$ 0,21	0,19	0,18	0,16	$s''_1 : s'' =$ 0,42	0,40	0,38	0,35
$v_2 : V =$ 0,57	0,55	0,53	0,51	$S_1 : S =$ 0,71	0,68	0,65	0,63.

β. Für die gleiche Arbeitsverteilung in den Sextanten bei sehr grofsen Aufnehmern (Receivern) und bei einer Expansions-Endspannung von 0,5 Atm., bei beliebiger Kurbelfolge:

$p =$ 9	10	12	14 Atm.	$v_1 : v_2 =$ 0,38	0,37	0,35	0,33
$s_1 : s =$ 0,056	0,050	0,042	0,036	$s'_1 : s' =$ 0,38	0,37	0,35	0,33
$v_1 : V =$ 0,146	0,135	0,120	0,108	$s''_1 : s'' =$ 0,38	0,37	0,35	0,33
$v_2 : V =$ 0,38	0,37	0,35	0,33	$S_1 : S =$ 0,38	0,37	0,35	0,33.

d. h. die Füllung ist auf alle drei Cylinder gleichförmig verteilt.

Für die Anwendung sind die Inhaltsverhältnisse nach α entschieden zu grofs, jene nach β etwas zu klein; es empfiehlt sich, Mittelwerte von α und β (jedoch näher an β) zu gebrauchen.

b) Maschinen mit zwei unter 90° verstellten Kurbeln.

(Hochdruck- und Mitteldruck-Cylinder haben eine gemeinschaftliche Kurbel.)

Arbeitsverteilung: Arbeit des Hochdruck-Cylinders = Arbeit des Mitteldruck-Cylinders.

Summe dieser beiden Arbeiten = Arbeit des Niederdruck-Cylinders.

Annahmen: $r_1 \sim v_1$; $r_2 \sim v_2$; Expansions-Endspannung (insgesamt) 0,5 Atm.

$p =$ 8	9	10	12	14 Atm.
$s_1 : s =$ 0,063	0,056	0,050	0,042	0,036
$v_1 : V =$ 0,12	0,11	0,10	0,086	0,076
$v_2 : V =$ 0,43	0,40	0,38	0,34	0,31
$v_1 : v_2 =$ 0,28	0,27	0,26	0,25	0,25
$s'_1 : s' =$ 0,53	0,52	0,50	0,49	0,47
$s''_1 : s'' =$ 0,43	0.42	0,41	0,40	0,40
$S_1 : S =$ 0,43	0,41	0,39	0,35	0,32.

f. Ermittlung des Dampf-Verbrauchs C_i und C_n.

C'_i (nutzbar) ist aus Taf. VI *A* oder *B* unmittelbar zu entnehmen.

C''_i (Abkühlungs-Verlust) ergiebt sich, wenn ungefähr $s = 2\,d$ ist, bei den gebräuchlichen Füllungen aus den folgenden annähernden Durchschnittswerten des Produktes $\cdot \sqrt{c}\,C''_i$ (durch Division mit $\sqrt{c}$):

bei den Maschinen mit Kulissen-Steuerung		$\sqrt{c}\,C''_i = 7{,}0$ bis 6,5
bei den Auspuff-Maschinen mit Expansions-Steuerung		$\sqrt{c}\,C''_i = 6{,}0$ „ 5,5
bei den Eincylinder-Kondensations-Maschinen	ohne Hemd	$\sqrt{c}\,C''_i = 5{,}5$ „ 5,0
	mit „	$\sqrt{c}\,C''_i = 4{,}5$ „ 4,0
bei den Zweicylinder-Kondensations-Maschinen		$\sqrt{c}\,C''_i = 4{,}0$ „ 3,5
bei den Dreicylinder-Kondensations-Maschinen		$\sqrt{c}\,C''_i = 3{,}5$ „ 3,0
bei den Zweicylinder-Auspuff-Maschinen		$\sqrt{c}\,C''_i = 4{,}5$ „ 4,0

(Die kleineren Zahlen gelten für vollkommene Maschinen.)

Bei den Zwei- und Dreicylinder-Maschinen wird hierbei ein Dampfhemd jedenfalls am Hochdruck-Cylinder vorausgesetzt; alles andere ist hier gleichgültig.

Wenn $s : d$ von 2 bedeutend verschieden ist, so ist C''_i zu verbessern durch die folgenden Koefficienten:

$s : d =$	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5
Koeff. =	0,82	0,87	0,91	1	1,08	1,15	1,29	1,41

C'''_i (Dampflässigkeits-Verlust) kann bei gewöhnlichem, noch leidlich befriedigendem Betriebszustande gerechnet (oder vielmehr geschätzt) werden mittelst:

$$C'''_i = \frac{8{,}8}{\sqrt{N_i\,c}} + \frac{1}{2c} \text{ für Eincylinder-Maschinen.}$$

Für Zweicylinder-Maschinen ist der Koefficient 0,8 und für die Dreicylinder-Maschinen 0,64 der Formel vorzusetzen.

Bei vorzüglichen Maschinen kann C'''_i auf die Hälfte (und noch bedeutend weniger) beschränkt, bei sichtlich dampflässigen jedoch auf das Doppelte (und noch mehr) gesteigert werden.

Der hier nicht einbegriffene Verlust in der Dampfleitung samt dem aus dem Kessel etwa mitgerissenen Wasser kann auf 4 bis 10% des Gesamt-Verbrauchs $C_i = C'_i + C''_i + C'''_i$ veranschlagt werden.

Beispiel. Für die a. S. 673 berechnete Kondensations-Maschine mit Hemd von $N_n = 50$, $N_i = 64{,}7$, bei $\frac{s_1}{s} = 0{,}15$, $p = 4$, $p_1 = 1{,}620$, $c = 1{,}5$ giebt erstlich Taf. VI *B* $C'_i = 6{,}7$ (genau 6,2); $\sqrt{c}\,C''_i = 4{,}5$ (genau 4,0); wegen $\sqrt{c} = 1{,}225$ folgt $C''_i = 3{,}7$

(genau 3,3); somit für eine gewöhnliche Maschine $C_i = C'_i + C''_i + C'''_i = 6{,}7 + 3{,}7 + 1{,}1 = 11{,}5$ kg, für eine genaue Maschine dagegen $C_i = 6{,}2 + 3{,}3 + 0{,}6 = 10{,}1$ kg. Für eine gröfsere Spannung als von 4 Atm. (absolut) ergiebt sich der Dampfverbrauch entsprechend kleiner.

II. Dampfdiagramme und deren Benutzung zur Berechnung der Dampfmaschinen.

Bezeichnungen s. S. 672. Abweichend hiervon ist in folgendem die Endspannung mit p_1 (statt p'), die relative Gröfse des schädlichen Raumes mit s_0 (statt m) bezeichnet.

a. Eincylindermaschinen.

Für doppeltwirkende eincylindrige Dampfmaschinen gilt allgemein (Bezeichnungen s. S. 672):

$$N_i = \frac{10000}{75} p_i\, O\, c \text{ oder}$$

$$N_n = \eta \frac{10000}{75} p_i\, O c = \eta \frac{10000}{75} p_i\, O \frac{s n}{30} = 4{,}44\, \eta p_i\, O s n.$$

Daraus folgt der **Cylinderquerschnitt:**

$$O = \frac{0{,}225\, N_n}{\eta p_i s n} = \frac{9}{40} \frac{N_n}{\eta p_i s n}.$$

Die mittlere indizierte Spannung p_i kann auch, statt rechnungsmäfsig, durch Aufzeichnung des Dampfdiagramms ermittelt werden (Kolbenwege als Abscissen, Dampfspannungen als Ordinaten).

Dabei ist nachstehendes zu beachten:

Die Einströmungsspannung p in der Maschine ist nach Mafsgabe der Reibungs- und Drosselungs-Verluste in der Dampfleitung kleiner als die Kesselspannung zu nehmen (bei kurzen weiten Leitungen und Dampfkesseln mit grofsem Dampf- und Wasserinhalt um etwa 0,25 Atm., sonst um 0,5 bis 1 Atm., je nach besonderen Betriebsverhältnissen); vergl. S. 673.

Die Volldrucklinie (bis $Ex.$, Abbild. 540 a. f. S.) ist je nach der Dampfgeschwindigkeit in den Steuerungskanälen mehr oder weniger abfallend zu zeichnen.

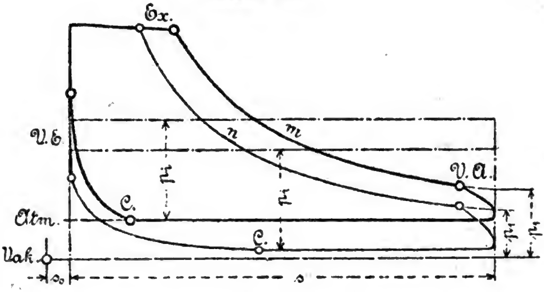
Die Expansionslinie ($Ex.—V.A.$) wird, ebenso wie die Kompressionslinie ($C.—V.E.$) unter Zugrundelegung isothermischer Zustandsänderung als Mariottesche Linie, d. i. gleichseitige Hyperbel, verzeichnet (Konstruktion s. u.). Hierbei ist der schädliche Raum s_0, auf den Cylinderquerschnitt reduziert, zu berücksichtigen (für Flachschieber und Ventile etwa 7%, für Rundschieber 2 bis 3%, für Kolbenschieber bis zu 10%).

Die Kurve der Vorausströmung (von $V.A.$ ab) ist, ebenso wie die Kurve der Voreinströmung (von OE ab) nach Schätzung einzutragen, oder es ist bei genauen Ermittlungen die

Spannungsänderung nach den Dampfgeschwindigkeiten, dem thatsächlichen Verlauf der Kanaleröffnung entsprechend, zu berechnen.

Der Gegendruck bei der Ausströmung kann als konstant angenommen werden; bei Auspuffmaschinen mit genügend bemessenen Kanal- und Rohrquerschnitten fällt er mit der atmosphärischen, bei Kondensationsmaschinen mit der Kondensator-Spannung zusammen; anderenfalls ist er höher und je nach den Dampfgeschwindigkeiten und Widerständen in den Kanälen und Rohrleitungen schätzungsweise anzunehmen oder zu berechnen. Die Kondensatorspannung kann für vorläufige Rechnungen bei normalen Temperaturen des Einspritzwassers mit 0,2 Atm. absol. angenommen werden.

Abbild. 540.



Der Expansionsbeginn *Ex.* richtet sich bei Maschinen mit geringstem Dampfverbrauch nach dem günstigsten Füllungsgrade (s. S. 665), bei anderen Maschinen nach der Gesamt-Expansion, die unter Berücksichtigung der Anlage- und Betriebskosten sowie besonderer Betriebsbedingungen festzusetzen ist. Die Endspannung p_1 soll den mittleren indizierten Druck der Leergangs-Arbeit der Maschine nicht unterschreiten; man findet nach Festsetzung der Endspannung p_1 den Expansionsbeginn, indem man von p_1 aus die Expansionslinie rückwärts konstruiert.

Der Kompressionsbeginn *C* wird am besten durch Rückwärts-Konstruieren der Kompressionslinie von *V.E.* aus ermittelt. Vor Hubende mufs eine Spannung erreicht werden, die unter der Einströmungspannung bleibt und, soweit möglich, mit Rücksicht auf Kolbengeschwindigkeit und hin- und hergehende Triebwerkmassen genügende Kompressionsarbeit giebt. Bei wechselnder Ausströmungsspannung (Hochdruckcylinder von Verbundmaschinen mit veränderlicher Füllung sowie Maschinen mit abwechselndem Auspuff- und Kondensationsbetrieb) sind die Kompressionsdrücke auch für den wechselnden Gegendruck bei der Ausströmung zu prüfen.

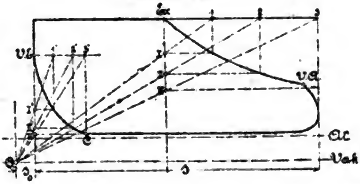
Der Beginn der Vorausströmung $V.A.$ ist so zu wählen, dafs durch die Ausströmung bis zum Hubwechsel der Druck des Arbeitsdampfes auf die Auspuffspannung sinken kann, daher um so früher, je rascher die Maschine läuft.

Der Beginn der Voreinströmung $V.E.$ ist derart festzusetzen, dafs bis zum Hubwechsel die Dampfspannung im schädlichen Raume bis zur Eintrittsspannung ansteigen kann. Die Voreinströmung mufs daher um so früher erfolgen, je rascher die Maschine läuft, je gröfser die schädlichen Räume sind und je weniger komprimiert der sie ausfüllende Dampf ist.

Allgemein gültige Zahlenangaben sind unmöglich, weil jeder Verwendungszweck und jede Betriebsart eine andere Dampfverteilung fordert.

Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel (Abbild. 541):

Abbild. 541.



a) für die Expansion: Von dem durch Abtragen des schädlichen Raumes s_0 gefundenen Punkte O aus Strahlen nach den beliebigen Punkten 1, 2, 3; die Schnittpunkte der Lotrechten aus 1, 2, 3 mit den Wagerechten aus I, II, III geben Punkte der Hyperbel;

b) für die Kompression: Aus O die Strahlen nach 1′, 2′, 3′; die Lotrechten aus 1′, 2′, 3′, mit den Wagerechten aus I′, II′, III′ geschnitten, geben Hyperbelpunkte.

Ueber die gegenseitige Abhängigkeit der einzelnen Abschnitte der Dampfverteilung s. S. 691.

Beispiel für das Diagramm einer Auspuffmaschine Abbild. 540, Kurve m, für dasjenige einer Kondensationsmaschine Kurve n.

Aus dem so verzeichneten Dampfdiagramm ergiebt sich dessen mittlere Höhe nach Simpsons Regel (s. S. 129) oder mit Hülfe des Planimeters als Höhe des Rechtecks, welches auf einer ebenso grofsen Grundlinie errichtet ist und mit ihm gleichen Flächeninhalt besitzt, oder auch unmittelbar als arithmetisches Mittel aus den mittleren mit dem Zirkel zu summierenden Höhen der sämtlichen (etwa 10 oder 20) Trapeze, in welche das Diagramm durch gleich weit abstehende lotrechte Linien geteilt wird.

Aus der mittleren Höhe des theoretischen Diagramms folgt dann die thatsächlich zu erwartende **indizierte mittlere Spannung** p_i durch Multiplikation mit dem Völligkeitsgrad, einer Zahl < 1, durch welche den Verlusten an Diagramm-Inhalt Rechnung getragen wird. Der Völligkeitsgrad kann bei Eincylinder- (und Zwillings-) Maschinen im Mittel $= 0{,}9$ gesetzt werden.

b. Zwei- und Mehrcylindermaschinen.

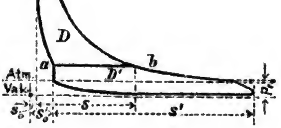
In gleicher Weise ergeben sich die Cylinder-Abmessungen der Zwillings- und Drillingsmaschinen, der Woolfschen Maschinen (Zweifachexpansionsmaschinen ohne Aufnehmer [Receiver]), der Verbundmaschinen (Kompoundmaschinen, Zweifachexpansionsmaschinen mit Aufnehmer) und der Mehrcylinder-Verbundmaschinen (mit Expansion in mehr als zwei Cylindern hintereinander) aus den Diagrammen für die einzelnen Cylinder, deren nach dem obigen zu bestimmende indizierte Arbeiten zusammen gleich dem verlangten N_i sein müssen.

Bei den Maschinen mit zwei- oder mehrfacher Expansion werden jedoch die Abmessungen des gröfsten (Niederdruck-) Cylinders am einfachsten aus dem Gesamtinhalt der Einzel-Diagramme ermittelt, wenn diese so dargestellt sind, dafs die Diagrammlängen sich wie die Cylinderinhalte verhalten (s. z. B. Abbild. 544 bis 546). Es ist dann die mittlere Spannung dieses aus den Einzeldiagrammen zusammengesetzten Gesamtdiagramms durch Division seines Inhalts durch die Länge des Niederdruckdiagramms festzustellen und hiermit, wie oben, ein Cylinder so zu berechnen, dafs er allein die Gesamtarbeit leisten würde. Dem Niederdruck-Cylinder sind dann dieselben Abmessungen zu geben wie diesem einen Cylinder. Als Völligkeitsgrad ist hierbei im Mittel für Zweifachexpansionsmaschinen 0,8, für Dreifachexpansionsmaschinen 0,7 zu setzen.

Zur Berechnung einer solchen Maschine empfiehlt sich zunächst eine **annähernde Ermittlung** des Gesamt-Diagramms unter Voraussetzung unendlich grofsen Aufnehmerinhalts. Dann weichen die Diagramme für verschiedene Kurbelversetzungen (s. z. B. Abbild. 544 und 545) nicht mehr von einander ab, und es ergeben sich als Trennungslinien der Einzel-Diagramme wagerechte gerade Linien.

Die Verzeichnung ist so vorzunehmen, dafs die aus dem einen Cylinder austretende Dampfmenge der in den folgenden eintretenden gleich gemacht wird (wobei der Einfachheit wegen die zur völligen Ausfüllung des schädlichen Raumes erforderliche Menge des einströmenden Dampfes vernachlässigt werden kann).

Abbild. 542.

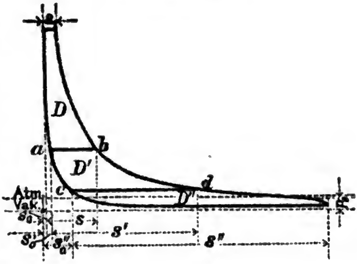


Vorläufiges Diagramm für eine Zweifachexpansionsmaschine s. Abbild. 542, für eine Dreifachexpansionsmaschine Abbild. 543. Die Gesamtfüllung $s_1 : s'$ (bezw. $s_1 : s''$ in Abbild. 543) wird aus der Endspannung p_e ermittelt durch Rückwärtskonstruktion der gemeinsamen Expansionslinie, wobei der schädliche Raum s_0 des Hochdruck-

cylinders (Rauminhalt $= s$) von der lotrechten Anfangslinie des Diagramms aus abgetragen wird. Hierauf werden die Kompressionslinien, die wagerechte Teilungslinie *ab* (und *cd*) nach Gutdünken (s. u.), sowie von dem Schnittpunkt aus die senkrechte Begrenzungslinie des (Mittel- und) Niederdruckdiagramms gezogen.

Dann stellen D, D' (und D'') annähernd die Diagramme der verschiedenen Cylinder dar, aus welchen die Arbeitsgröfsen, die Kolbenkräfte und die Steuerungsabmessungen für jeden Cylinder vorläufig bestimmt werden können. Ferner verhalten sich die Diagrammlängen s, s' (und s'') wie die Rauminhalte der betr. Cylinder.

Abbild. 543.



Die Lage der wagerechten Teilungslinien wird am besten so gewählt, dafs die sich hiernach ergebenden Arbeitsgröfsen (gleich den Diagrammflächen) und andererseits die gröfsten Kolbenkräfte für die verschiedenen Cylinder unter einander möglichst wenig abweichen. Bei stark wechselnder Füllung sind hierbei auch die Diagramme für die Füllungsgrenzen in betracht zu ziehen.

Im allgemeinen fallen die lotrechten Begrenzungslinien der Diagramme hierbei so, dafs die hierdurch bestimmte Länge s_0' (und s_0'') in ihrem Verhältnis zu s' (und s'') dem thatsächlich auszuführenden schädlichen Raume des betr. Cylinders in einem für den vorläufigen Zweck genügenden Mafse nahe kommt. Im anderen Falle wären die Expansions- und Kompressionslinien für die verschiedenen Cylinder von verschiedenen Punkten auf der Vakuumlinie aus zu konstruieren.

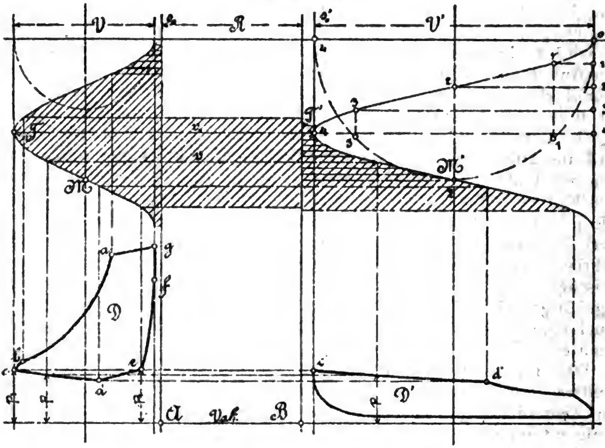
Gebräuchlich ist für Zweifachexpansionsmaschinen $V : V' = 1 : 2$ bis $1 : 3$. Man erhält hierbei im allgemeinen eine Arbeitsverteilung, die von der gleichmäfsigen Verteilung auf beide Cylinder nicht erheblich abweicht.

Der Inhalt R des Aufnehmers wird meist so gewählt, dafs $V \leq R \leq V'$ ist.

Zur **genaueren Ermittlung** des Dampfdiagramms von Zwei- oder Mehrfachexpansionsmaschinen ist die Aufstellung des Raumdiagramms durch Verzeichnung der Kolbenweglinien vorzunehmen, z. B. in der Weise, dafs die Zeiten (proportional den Kurbelwegen) als Ordinaten und die Kolbenwege als Abscissen auf-

getragen werden (Abbild. 544 u. f.)*). Hierbei werden die Cylinderinhalte V, V' (und V'') als Hublängen, die schädlichen Räume s_0, s_0' (und s_0'') und die Aufnehmerinhalte R (und R') in der aus den Abbild. zu ersehenden Weise abgetragen. Aus diesem Raumdiagramm ergiebt sich dann der bei einer bestimmten Stellung der Kurbeln an dem Vorgange teilnehmende Dampfinhalt, indem man in der betr. Höhe eine Wagerechte zieht und deren Erstreckung innerhalb der gestrichelten Fläche in der Zeichnung abmifst.

Abbild. 544.



Werden die Dampfdiagramme D, D' (und D'') auf den Grundlinien V, V' (und V'') und mit gleichem Mafsstab der Dampfspannungen verzeichnet, so sind die Diagramme nach demselben Arbeits-Mafsstabe zu beurteilen.

Verbunddiagramm für Kurbeln unter 0° oder 180° (Abbild. 544, wobei Kondensation vorausgesetzt). Die Kolbenweglinien sind so zu verzeichnen, dafs die der Totlage entsprechenden Punkte T und T' in gleicher Höhe liegen. Füllungsgrad des Hochdruckcylinders nach der Ermittlung im vorläufigen Diagramm ($s_1 : s$ in Abbild. 542). Expansionskurve ab. Ueberströmung in den Aufnehmer (Kurve bc) vorteilhaft mit geringem Spannungsabfall. Von c ab Expansion in dem sich verkleinernden Raum im Hochdruckcylinder, dem Aufnehmer

*) Eine andere Darstellung des Raumdiagramms s. Proell, Ueber Indikatordiagramme und graphische Beziehungen zwischen Druck, Volumen und Temperatur; Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, S. 988 u. f.

(nebst den beiden schädlichen Räumen) und dem sich vergröfsernden Raum im Niederdruckcylinder (s. gestrichelte Fläche im Raumdiagramm). Bestimmung der Kurve etwa durch Berechnung des p für jedes v aus der Gleichung $p\,v = p_1\,v_1$ (s. Abbild.; die v sind aus dem Raumdiagramm zu entnehmen). In d (Ermittlung s. u.) Absperrung des Niederdruckcylinders vom Aufnehmer und von hier ab Kompression in Aufnehmer und Hochdruckcylinder bis zum Punkt e. Hier Absperrung des Hochdruckcylinders vom Aufnehmer; im ersteren Kompression (ef) und Voreinströmung (fg). e soll in gleicher Höhe mit c liegen, damit der dann neuerdings aus dem Hochdruckcylinder ausströmende Dampf (Punkt c) wieder die Spannung p_1 im Aufnehmer vorfindet. Nach Aufzeichnung von cd wird zunächst ef von dem gewählten Endpunkt f aus rückwärts konstruiert bis zum Schnitt e mit der Wagerechten durch c und hierauf de rückwärts von e aus, und zwar als Mariottesche Linie mit bezug auf den Punkt B. Der Durchschnitt von cd und de ergiebt den Punkt d. Die Linie des gemeinsamen Vorganges cd wird ins Diagramm des Niederdruckcylinders übertragen ($c'd'$), indem mit Hülfe der Kolbenweglinien die zu gleicher Zeit stattfindenden Kolbenstellungen für beide Cylinder ermittelt werden (s. Abbild.). Ein etwaiger Spannungsabfall beim Ueberströmen kann hierbei (sowie bei den noch zu besprechenden Diagrammen) berücksichtigt werden, indem die Ordinaten des Niederdruckdiagramms zwischen c' und d' entsprechend kleiner gemacht werden als die zugehörigen des Hochdruckdiagramms. Im übrigen ist das Niederdruckdiagramm ganz wie dasjenige einer Eincylindermaschine zu ermitteln.

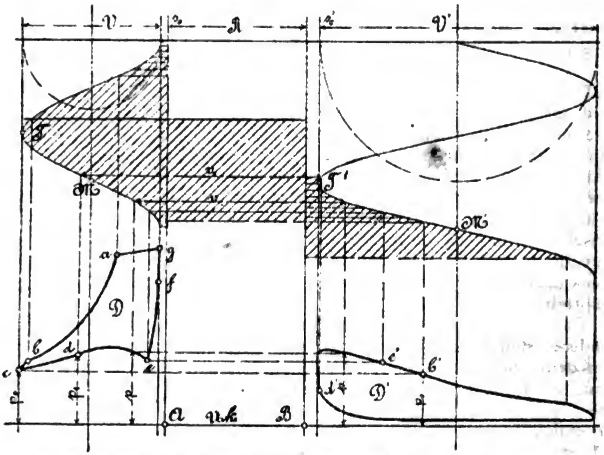
Das Diagramm einer Woolfschen Maschine ohne besondere Steuerung für den Niederdruckcylinder unterscheidet sich von dem obigen nur dadurch, dafs die Expansion (entsprechend der Linie cd im vorigen) wegen des fehlenden Aufnehmers nur in Hoch- und Niederdruckcylinder vor sich geht und sich unter Fortfall der im Niederdruckcylinder allein stattfindenden Expansion über den ganzen Hub ausdehnt. Der Spannungsabfall bei der Ueberströmung ist bedeutend gröfser als bei Aufnehmermaschinen.

Verbund-Diagramm für Kurbeln unter 90° (Abbild. 545). Die Kolbenweglinien sind versetzt zu zeichnen, so dafs T' mit M in gleicher Höhe liegt. Von $gabc$ im Hochdruckdiagramm gilt dasselbe wie oben. Von c ab zunächst Kompression im Hochdruckcylinder (nebst schädlichem Raum) und im Aufnehmer. Daher cd als Mariottesche Linie mit bezug auf Punkt B zu konstruieren. In d Eröffnung des Niederdruckcylinders. Von d bis e gemeinsamer Vorgang in beiden Cylindern und im Aufnehmer. Bestimmung der Kurve rechnungsmäfsig ($p\,v = p_1\,v_1$), wie oben. Rückwärts-Konstruktion von ef und Ermittlung des Punktes der Absperrung für den Hochdruckcylinder, e, als Durchschnittspunkt. Uebertragung der Linie des gemeinsamen Vorganges in das Nieder-

druckdiagramm ($d'e'$) mit Hülfe der Kolbenweglinien. Von e' ab Expansion in Aufnehmer und Niederdruckcylinder allein. Daher Konstruktion von $e'h'$ als Mariottesche Linie in bezug auf Punkt A. Der Abschlufs des Niederdruckcylinders mufs so erfolgen, dafs im Aufnehmer die Spannung p_0 zurückbleibt. Daher Bestimmung des Punktes der Expansion h' durch wagerechtes Projizieren von c aus. Im übrigen wie beim Eincylinder-Diagramm.

Für Mehrfachexpansionsmaschinen ergiebt sich die Ermittlung der genauen Diagramme bei einer Versetzung der Kurbeln unter 90° oder 0° bezw. 180° aus dem vorigen.

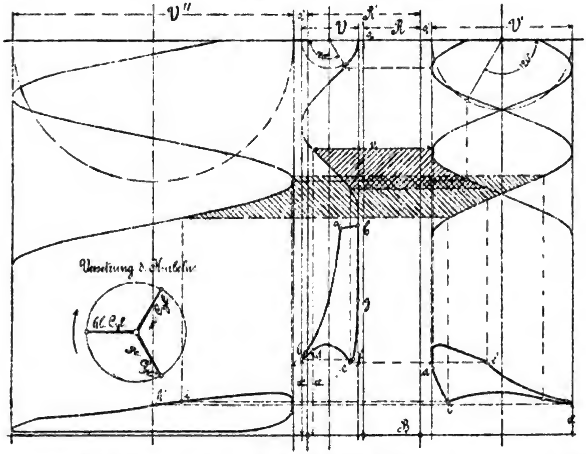
Abbild. 545.



Dreifachexpansions-Diagramm für Kurbeln unter 120° und die in der Abbild. angedeutete Reihenfolge derselben (Abbild. 546). Versetzung der Kolbenweglinien gegen einander entsprechend der Kurbelversetzung s. Abbild. abc Expansion und Vorausströmung im kleinen Cylinder. cd Kompression im kleinen Cylinder und ersten Aufnehmer (Mariottesche Linie mit Bezug auf B). de bezw. $d'e'$ gemeinsamer Vorgang mit dem mittleren Cylinder (zu rechnen aus $pv = p_1 v_1$). ef Kompression im kleinen Cylinder und ersten Aufnehmer. fgh Kompression und Voreinströmung im kleinen Cylinder. Von e' ab Expansion im mittleren Cylinder allein. Rückwärts-Konstruktion von fg (f in gleicher Höhe mit c, Spannung p_2) und ef (Punkt B) zur Bestimmung von e als Schnittpunkt mit de. — Obiger Vorgang wiederholt sich hierauf für den mittleren und grofsen

Cylinder, nur erfolgt in dem Beispiele die Absperrung des mittleren Cylinders vom zweiten Aufnehmer (in i'') früher als die des grofsen Cylinders (in k''), daher Expansion $i''k''$ im grofsen Cylinder und im zweiten Aufnehmer (Punkt B) bis zur Spannung p_3.

Abbild 546.



Eine **Regelung der Verbundmaschinen** ist nur innerhalb enger Grenzen möglich, weil sonst die Arbeitsverteilung eine zu ungünstige und die Kolbenkräfte zu verschieden werden. Z. B. bei Vergröfserung der Füllung im Hochdruckcylinder einer Zweifachexpansionsmaschine steigt die Aufnehmerspannung derart, dafs sich hauptsächlich die Arbeit des Niederdruckcylinders vermehrt, diejenige des Hochdruckcylinders anfangs nur unbedeutend zunimmt und dann wieder abnimmt.

B. Steuerungen.*)

I. Steuerungskanäle.

Kanal- und Eröffnungsquerschnitte sind so zu wählen, dafs der Dampf in ihnen keine Geschwindigkeit annimmt, die einen empfindlichen Spannungsabfall verursacht. Nach Ermittlungen aus Indikator-Diagrammen entsteht merkliche Drosselung während der Einströmungs-

---

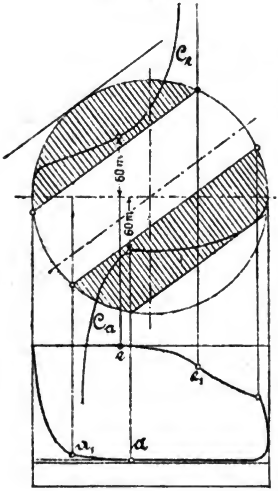
*) Nach Riedler.

dauer bei Durchschnittsgeschwindigkeiten $w' = 50$ bis 60 m i. d. Sek. und während der Ausströmungsdauer bei solchen von 80 bis 100 m i. d. Sek., je nachdem der Dampf Atmosphären- oder Kondensatorspannung besitzt.

Für Berechnung der Kanalquerschnitte f zweckmäfsig Dampfgeschwindigkeiten $w_{max} = 30$ bis 40 m i. d. Sek. bei gröfster Kolbengeschwindigkeit c_{max} zu grunde zu legen. Bezeichnet O den Kolbenquerschnitt in qm, so ist der Kanalquerschnitt (in qm)

$$f = O\,\frac{c_{max}}{w_{max}}.$$

Abbild. 547.



Normale Steuerungsverhältnisse ermöglichen alsdann Querschnitte in der Steuerung, welche beim Abschlufs eine zu frühzeitige Ueberschreitung der angegebenen gröfsten Durchtrittsgeschwindigkeiten w_{max} und damit eine zu frühzeitige Drosselung vermeiden. Da stets die Beziehung für die Dampfgeschwindigkeit w besteht:

$$w = \frac{O}{f'}\,c,$$

wenn c die veränderliche Kolbengeschwindigkeit, f' den veränderlichen Querschnitt in der Steuerung bedeutet, so kann durch Konstruktion des letzteren Ausdrucks eine genaue Prüfung der Steuerung am übersichtlichsten erfolgen. In Abbild. 547, welcher das Müllersche Schieberdiagramm zu grunde gelegt ist (s. u.), stellen die Ordinaten der beiden Kurven C_e und C_a (von dem Durchmesser nach oben bezw. unten gemessen), die theoretischen Dampfgeschwindigkeiten w während der Ein- und Ausströmungsdauer dar; die Abscissen bedeuten die zugehörigen Kolbenwege. In e und a überschreitet die Dampfgeschwindigkeit den Wert 60 m i. d. Sek., in e_1 und a_1 findet Kanalschlufs statt.

Bei Schiebersteuerungen sind die Kanäle im Schieberspiegel im allgemeinen möglichst breit auszuführen, weil die Kanalweite, welche für die Abmessungen der ganzen Steuerung mafsgebend ist, dann klein ausfällt; zu geringe Kanalweite verursacht andererseits Kontraktionsverluste. Der Auslafskanal erhält bei gleicher Breite gröfsere Weite, u. zw. ist diese so zu bemessen, dafs bei äufserster Schieberstellung noch genügender Ausströmungsquerschnitt bleibt.

II. Einfache Schieber-Steuerungen.

a. Schieber ohne Ueberdeckung.

Schieber in der Mittellage m (Abbild. 548) bei Totlage der Maschinenkurbel (K_0); Excenter E unter 90^0 gegen K_0 versetzt. Hierbei Dampfverteilung (Abbild. 549) mit unvollständigem Auspuff (hohem Gegendruck) und verspäteter Einströmung.

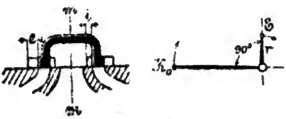
Daher zur Erzielung brauchbarer Dampfverteilung erforderlich:

b. Schieber mit Ueberdeckungen.

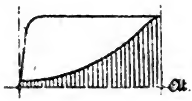
Bezeichnungen:

r = Excentricität, $2r$ = ganzer Schieberhub,
δ = Voreilungswinkel, a = Kanalweite,
ξ = Schieberweg von der Mittellage aus gerechnet (Abbild. 552), unter Voraussetzung, dafs die Länge der Excenterstange $l = \infty$,
e = Eintritts- (äufsere) Deckung (Abbild. 548),
i = Austritts- (innere) „

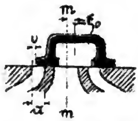
Abbild. 548.



Abbild. 549.

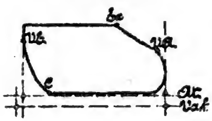


Abbild. 550.

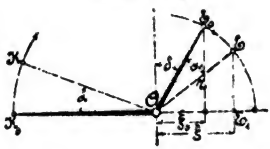


Der Schieber ist in der Totlage der Maschinenkurbel (K_0) um ξ_0 aus der Mittellage zu verschieben (Abbild. 550), aufserdem der Eintrittskanal um v (lineares Voreilen) zu öffnen. Hierdurch regelrechte Dampfverteilung Abbild. 551. Antriebs-Excenter unter $90^0 + \delta$ zur Kurbel (Abbild. 552).

Abbild. 551.



Abbild. 552.



Schieberweg bei Totlage der Kurbel:

$$\xi_0 = r \sin \delta = e + v,$$

bei beliebiger Drehung um den Winkel α aus der Totlage:

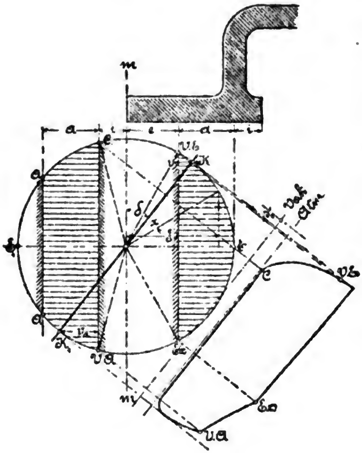
$$\xi = r \sin (\alpha + \delta).$$

Gröfster Schieberweg nach Drehung um $90^0 - \delta$:

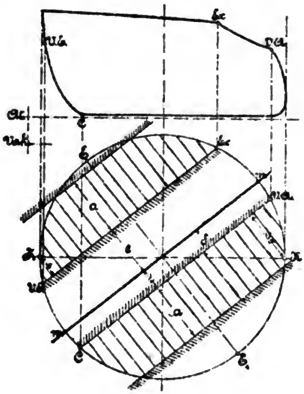
$$\xi_1 = r \overline{\overline{>}} e + a.$$

Geometrische Darstellung der Schieberwege unter Voraussetzung unendlicher Schubstangen- und Excenterstangen-Längen.

Abbild. 553.



Abbild. 554.



1. Schieberdiagramm von Müller (Abbild. 553). Der benutzte Kreis ist zugleich Excenterkreis (Mittellage des Excenters $m\,m$, Hubwechsel in E und E_1) und Kurbelkreis (Totlagen K und K_1). Auf $K K_1$ sind die Kolbenwege, auf $E E_1$ die Schieberwege zu projizieren. (Für die gegenseitige Lage beider Linien s. Winkel δ i. d. Abbild.)

Voreinströmung beginnt bei VE; lineares Voreilen $= v$ bei der Totlage K.

Schieberweg bei beliebiger Kurbeldrehung um α $\xi = r \sin(\alpha + \delta)$, wie oben. Eröffnung des Eintrittskanals $= \xi - e$.

Gröfste Kanalöffnung in E, Schlufs der Kanalöffnung (Beginn der Expansion) in Ex.

Beginn der Vorausströmung in VA, lineare Vorausströmung in der Totlage $K_1 = v_a$.

Gröfste Eröffnung des Auspuffkanales von A bis A_1, in C Schlufs des Auspuffs, d. i. Beginn der Kompression.

Die entscheidenden Wechsel der Dampfverteilung sind durch dieses Schieberdiagramm bestimmt. Das Dampfdiagramm ist senkrecht auf die Kolbenweg-Linie KK_1 herauszuzeichnen und die Dampfverteilung für gegebene Fälle zu beurteilen.

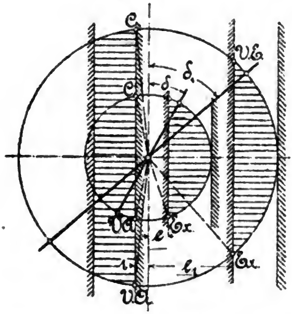
2. **Schieber-Diagramm von Reuleaux** (Abbild. 554), das vorige um $90^{0} + \delta$ verdreht, ist das geeignetste für den Entwurf von Steuerungen, wenn man von der beabsichtigten Dampfverteilung ausgeht.

Es wird hierbei das für einen bestimmten Verwendungszweck der Maschine erforderliche Dampfdiagramm verzeichnet, dann der Kurbel- bezw. Excenterkreis und die Wechsel der Dampfverteilung im Schieberkreis durch Projektion aus dem Dampfdiagramm dargestellt und beurteilt. Dampf- und Schieberdiagramm sind hierbei an keinen bestimmten Mafsstab gebunden. Die Dampfverteilung hängt nur vom Voreilungswinkel δ und vom Verhältnis der Abmessungen e, i und a ab.

Die (nach S. 688 zu bestimmende) Kanalweite, verglichen mit der Gröfse a im Schieberdiagramm, ergiebt für eine bestimmte Ausführung den Mafsstab des Schieberdiagramms, nach welchem die einzelnen Gröfsen e, i und r abzumessen sind.

Die einzelnen Abschnitte der Dampfverteilung stehen in gegenseitigem **Abhängigkeitsverhältnis**, vergl. Abbild. 555 (nach Mafsgabe von Abbild. 553 zu beurteilen), sodafs, wenn drei Punkte angenommen sind, dadurch der vierte bestimmt ist.

Abbild. 555.



Mit der Eintritts-Ueberdeckung e wachsen bei gleicher Kanalweite: die Excentricität r, (der Schieberweg), der Voreilungswinkel δ, die Dauer von Expansion, Kompression und Vorausströmung; Eröffnung und Abschlufs der Einströmung werden schleichender.

Mit der Austritts-Deckung i wächst die Kompression und nimmt die Vorausströmung ab.

Am zweckmäfsigsten wird für den **Entwurf der Dampfverteilung** die für den bestimmten Zweck notwendige Voreinströmung und Vorausströmung angenommen, weil diese durch die früher erwähnten Anforderungen eng begrenzt sind; alsdann werden die übrigen Gröfsen durch das Schieberdiagramm ermittelt und beurteilt, s. S. 680 u. 681. Hierbei ist jedoch für Kondensationsmaschinen im allgemeinen von der Forderung eines beträchtlichen Kompressions-Enddruckes abzugehen, weil dieser einen frühzeitigeren Kompressionsbeginn verlangen würde, als nach dem obigen Abhängigkeitsverhältnis für die Steuerung erwünscht ist.

Expansion kann nach Gesagtem mit einfachem Schieber nur soweit erzielt werden, als dies der Zusammenhang mit der notwendigen Kompression, Voreinströmung und Vorausströmung, sowie die Rücksicht auf nicht zu grofse Steuerungs-Abmessungen zuläfst.

3. Schieberdiagramm von Zeuner ergiebt sich aus dem Dreieck EOE_1 (Abbild. 552), wenn δ von der Senkrechten nach entgegengesetzter Richtung abgetragen und der rechte Winkel als Winkel im Halbkreis dargestellt wird (Abbild. 556). Dann ist $\Delta\, OEE_1$ dasselbe wie in Abbild. 552, daher:

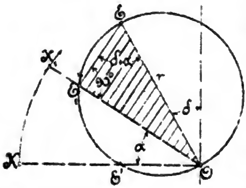
$$OE = r,$$
$$OE_1 = \xi = r \sin(\delta + \alpha) = r \sin \delta \cos \alpha + r \cos \delta \sin \alpha;$$
$$\xi = A \cos \alpha + B \sin \alpha. \text{ (Polargleichung des Schieberkreises.)}$$

Zeuner erhält diese Gleichung für endliche Länge der Excenterstange l:

$$\xi = r \sin(\alpha + \delta) + \frac{r^2}{2\,l}[\cos^2 \delta - \cos^2(\alpha + \delta)] = r \sin(\alpha + \delta) + F,$$

und setzt $F = 0$, was gleichbedeutend ist mit der Annahme unendlich langer Excenterstange ($l = \infty$).

Abbild. 556.



Durch den Schieberkreis ergeben sich die Schieberwege als Sehnenabschnitte auf den jeweiligen Kurbelstellungen (Abbild. 556).

Totlage in K: Schieberweg $\xi_0 = OE' = e + v$;

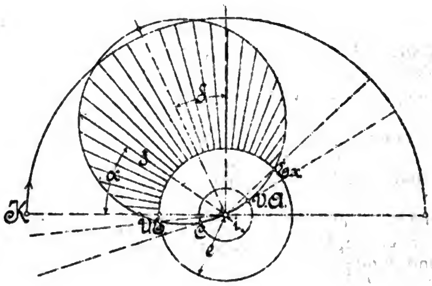
beliebige Kurbelstellung OK_1: Schieberweg $\xi = OE_1$;

gröfster Schieberweg $OE = r \gtreqless e + a$;

Kanaleröffnungen $= \xi - e$,

daher für Eintritt e konstant von ξ abzuziehen (Kreis aus O mit Halbmesser e; Abbild 557), für Auslafs i abzuziehen.

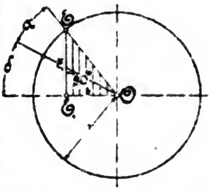
Abbild. 557.



Schieber-Ellipsen geben den Schieberweg ξ als Ordinate auf der jeweiligen Kolbenstellung, je nach dem Sinne des Ausschlages nach oben oder unten gemessen. Zu deren Konstruktion wird

Winkel δ von der Wagerechten abgetragen (Abbild. 558); dann ist für beliebige Kurbeldrehung α die Senkrechte $= r \sin(\delta + \alpha) = \xi$. Diese Schieberwege sind in einen zweiten Kreis (Kurbelkreis) als Ordinaten auf die einzelnen Kolbenstellungen zu übertragen, am einfachsten durch gleichmäfsige Einteilung der beiden Kreise, ganz entsprechend wie in Abbild. 561. Auch im übrigen wie dort.

Abbild. 558.



Einflufs der endlichen Stangenlängen.

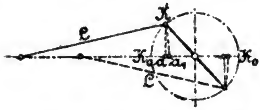
Schubstange: Stangenlänge $= L$, Kurbelhalbmesser $= R$ (Bezeichn. abweichend von S. 497). Die Kolbenstellung für $L = \infty$ ergiebt sich in der senkrechten Projektion der Kurbelstellung in a (Abbild. 559), die wirkliche Kolbenlage aber in der Bogenprojektion (mit L) in a_1.

Der Kolben eilt beim Hingang vor, Füllung und Dampfarbeit werden gröfser; der Kolben bleibt beim Rückgang zurück, Füllung und Dampfarbeit werden kleiner.

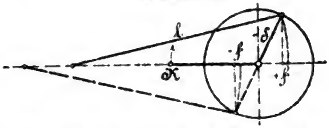
Excenter: Stangenlänge $= l$, Excentricität $= r$. Der Schieber eilt beim Hingang vor und bleibt beim Rückgang zurück (Abbild. 560). Der Unterschied f gegenüber $l = \infty$ ist am gröfsten in der Mittellage des Schiebers:

$$f_{max} = l - \sqrt{l^2 - r^2}.$$

Abbild. 559.



Abbild. 560.



Im Hubwechsel der Kurbel K (Excenter unter $90^0 + \delta$) ist f erheblich, daher bei symmetrisch eingestelltem Schieber das lineare Voreilen ungleich u. zw.: für den Hingang $v = \xi_0 - e + f$,
für den Rückgang $v_1 = \xi_0 - e - f$.

Die Steuerung mufs meist für gleiches lineares Voreilen eingestellt werden; daher mufs der Schieber um f ungleich befestigt werden, so dafs die Ueberdeckung für den Hingang $e + f$,
für den Rückgang $e - f$ wird.

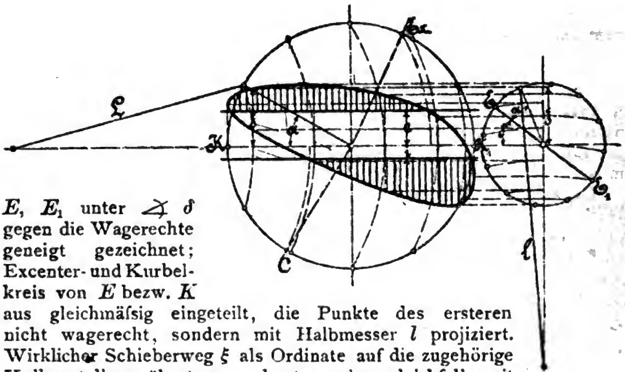
Dies giebt gleiche Einlafs-Voreröffnung und nahezu gleiche Expansion, aber ungleiche Kanaleröffnung und ungleiche Vorausströmung und Kompression.

Es ist für $\frac{L}{R}$ oder $\frac{l}{r}$ =	3	3,5	4	4,5	5	10	20	30
$\frac{f_{max}}{2R}$ bezw. $\frac{f_{max}}{2r}$ =	0,085	0,072	0,063	0,056	0,050	0,025	0,012	0,008

Bei Lokomotiven nimmt man $l : r \geqq 25$.

Schieberdiagramm von Schorch (Abbild. 561) giebt die Schieberwege unter Berücksichtigung der endlichen Gröfse von l und L auf gleicher Grundlage wie die Schieber-Ellipsen, aber mit Bogenprojektion (mit dem Halbmesser l bezw. L). Totlagen des Excenters

Abbild. 561.



E, E_1 unter $\measuredangle\ \delta$ gegen die Wagerechte geneigt gezeichnet; Excenter- und Kurbelkreis von E bezw. K aus gleichmäfsig eingeteilt, die Punkte des ersteren nicht wagerecht, sondern mit Halbmesser l projiziert. Wirklicher Schieberweg ξ als Ordinate auf die zugehörige Kolbenstellung übertragen, letztere aber gleichfalls mit Halbmesser L im Bogen von der zugehörigen Kurbelstellung projiziert. Werden von den Ordinaten der unregelmäfsig eiförmigen Kurve die Einlafs- und Auslafsdeckung (e und i) konstant abgezogen, so ergeben sich die Kanaleröffnungen und die Abschnitte der Dampfverteilung, wie die Abbildung zeigt.

c. Veränderungen des Schieberantriebes.

1. Wird der Schieber nicht parallel zur Achse des Dampfcylinders, sondern zu dieser um ω **geneigt angetrieben**, so ist das Excenter nicht unter $90^0 + \delta$, sondern um $90^0 + \delta_1$ zu befestigen, wobei

$$\delta_1 = \delta \pm \omega,$$

derart, dafs es bei der Kurbeltotlage mit der Antriebsrichtung den Winkel $90^0 + \delta$ einschliefst.

2. Erfolgt die **Uebertragung durch Hebel**, so ist die Hebelübersetzung für die Schieberwege zu berücksichtigen. Wird durch Hebel oder dergl. die Bewegungsrichtung umgekehrt, so ist das Excenter diametral entgegengesetzt, also unter $270^0 + \delta$ voreilend aufzukeilen.

3. Erfolgt der Antrieb statt durch Excenter mittelst eines gleichseitigen **Bogendreiecks**, das sich um einen Eckpunkt dreht (Bogen

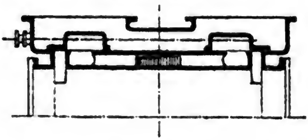
aus den Eckpunkten beschrieben), dann bleibt der Schieber während 60° Drehung ruhig und macht während der folgenden 120° den Schieberhub. — Die Bewegung erfolgt genau, wie bei Excenterantrieb für $l = \infty$.

Im Schieberdiagramm ist für 60° Kurbeldrehung gleichbleibende Kanaleröffnung zu zeichnen und daran das halbe einfache Diagramm für Excenterantrieb anzuschliefsen.

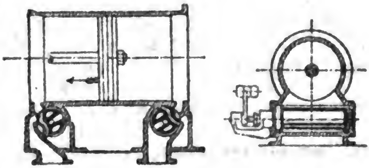
Dreiecksteuerungen ergeben raschere Kanaleröffnung, aber geringe Expansion und ungünstige Abnutzungsverhältnisse.

d. Abänderungen des einfachen Schiebers.

Abbild. 562.



Abbild. 563.



1. Der **geteilte Schieber** (Abbild. 562) verringert den schädlichen Raum.

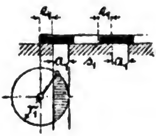
2. Der **schwingende Schieber** (Abbild. 563) gestattet den Schieberspiegel möglichst nahe an den Cylinder, den Antrieb vom Excenter durch einen Hebel in eine beliebige Ebene zu legen.

3. Der **Spalt-Schieber** (Abbild. 564, für eine einfache Schieberplatte gezeichnet unter Voraussetzung, dafs Ein- und Auslafs durch getrennte Schieberplatten gesteuert werden), verringert entsprechend der Spaltenzahl n die Kanalbreite, die Ueberdeckung und infolge dessen die Excentricität und den Schieberweg:

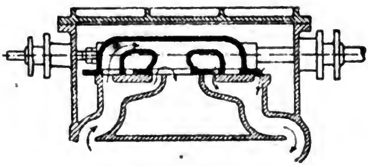
$$r_1 = e_1 + a_1 = \frac{e}{n} + \frac{a}{n} = \frac{r}{n};$$

$$\xi_1 = \frac{\xi}{n},$$

Abbild. 564.



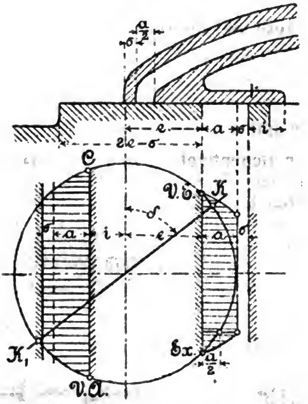
Abbild. 565.



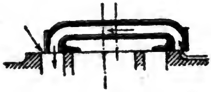
worin a, e, r und ξ die Werte für einen einfachen Schieber für gleiche Dampfverteilung. Schieberkreis wie früher, aber nur für einen Spalt bei dem geänderten Maſsstabe durchzuführen.

Abbild 565: zweispaltiger Muschelschieber.

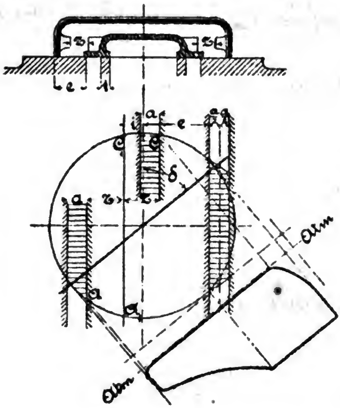
Abbild. 566.



Abbild. 567.



Abbild. 568 und 569.



4. Der **Kanalschieber** (Schieber von Trick) giebt doppelte Eröffnung durch einen in die Einlaſsdeckung gelegten Hülfskanal und Dampfzuströmung von der anderen Seite her (Abbild. 567, sowie Abteil. II, S. 340, dort auch als Kolbenschieber). Steg $\sigma = 1$ bis 2 cm, (Abbild. 566),

Kanalweite im Spiegel $= a + \sigma$,

Kanalweite im Schieber $= 0{,}5\,a$,

Spiegellänge auſserhalb des Kanals $= 2\,e - \sigma$.

V e r d o p p e l u n g der Einströmung von Beginn des Voröffnens bis zum Schieberweg $\xi = e + 0{,}5\,a$; dann ist die Kanaleröffnung $0{,}5\,a$ auf jeder Seite. Für $\xi > e + 0{,}5\,a$ bleibt die Kanaleröffnung konstant. Schieberdiagramm (Abbild. 566) wie für einfachen Schieber; von Voreinströmung bis zur Kanaleröffnung $0{,}5\,a$ sind die Eröffnungen über den Schieberkreis hinaus noch einmal aufzutragen.

5. **Schieber mit verschleppter Ausströmung** (Schieber von Ehrhardt) ver-

meiden zu hohe Kompression bei grofsem δ. Als Trickscher Schieber ausgebildet wie oben, der innere Teil ist jedoch unabhängig beweglich (Abbild. 568). Infolge der Verschleppung z auf jeder Seite verspätet sich die Ausströmung von dem dem normalen Schieber entsprechenden Punkt a_1 bis a, die Kompression von dem normalen Punkt c_1 bis c. (Abbild. 569.)

e. Entlastete Schieber.

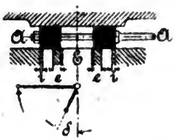
Sie verhüten oder vermindern den vollen Dampfdruck auf die Schieberfläche und verringern so die Schieberreibung.

Beispiele.

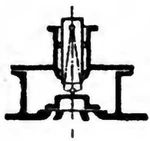
1. Schieber mit **entlastender Gegenfläche** durch einen Deckring mit dichtender Schleiffläche auf dem Deckel. Der Entlastungsraum wird mit dem Kondensator verbunden.

2. **Offener Schieber,** zwischen Schieberspiegel und Gegenplatte schleifend (Abbild. 570). Die Entlastung ist vollständig und bleibt auch bei Undichtheit erhalten. In der Abbild. mit innerer Einströmung von E aus; Ausströmung erfolgt nach A. Das Excenter mufs um $90^0 - \delta$ nacheilen.

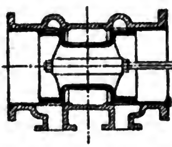
Abbild. 570.



Abbild. 571.



Abbild. 572.



3. Schieber mit **entlastendem Gegenkolben** (Abbild. 571) und Verbindung durch Zugstange; erfordert zuverlässige Kolbenführung und lange Zugstange.

4. **Kolbenschieber** (Abbild. 572). Vielfach angewandt. Geben vollständige Ausgleichung des Dampfdruckes. Dampfkanäle am ganzen Umfang des cylindrischen Schieberspiegels, mit Schlitzen; Summe der Stegbreiten zwischen den Schlitzen $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{6}$ des Umfangs. Berechnung der Schlitz- und Kanalquerschnitte nach den zulässigen gröfsten Dampfgeschwindigkeiten.

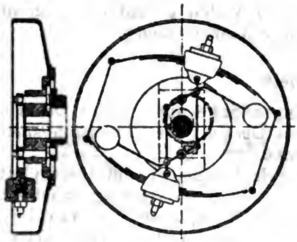
III. Expansionssteuerungen.

a. Einfache Schiebersteuerungen.

Die einfache Schiebersteuerung giebt bei **Veränderung des Schieberhubs allein** oder **des Voreilungswinkels allein** in engen

Grenzen veränderliche Expansion, hierbei aber auch veränderliches lineares Voreilen. Gröfsere Veränderlichkeit der Expansion wird bei einfacher Schiebersteuerung nur mit **Veränderung von Schieberhub und Voreilungswinkel,** z. B. durch Verdrehung des Excenters auf einer zweiten excentrischen Scheibe oder durch geradlinige Verschiebung des Excenters (vergl. S. 704, Abbild. 587), erzielt. Beides kann durch Federregulatoren bewirkt werden, welche unmittelbar auf der Excenterwelle befestigt sind (Abbild. 573).

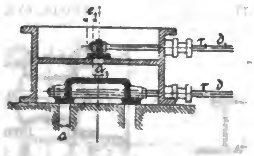
Abbild. 573.



Veränderlicher Excenterhub und veränderlicher Voreilungswinkel kann auch erreicht werden mit einfachem Schieber durch Verbindung mit Kulissensteuerung, wobei aber nur die Hälfte der Kulisse benutzt wird. Wirkungsweise so wie bei Kulissensteuerungen.

b. Doppelschiebersteuerungen.

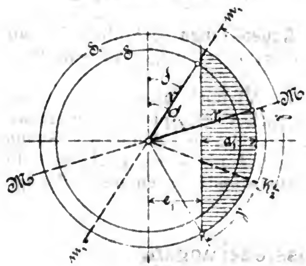
Abbild. 574.



1. Expansionsschieber in einer besonderen Kammer auf festem Schieberspiegel (Abbild. 574).

Der Inhalt des Grundschieberkastens wirkt während eines Teiles der Expansion als schädlicher Raum mit.

Abbild. 574 a.



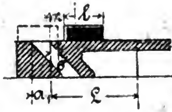
Bestimmung der Dampfverteilung wie bei einfachen Schiebersteuerungen. Es ist das Diagramm des Grundschiebers (Excentricität r, Voreilungswinkel δ) zu verzeichnen (Kreis S, Abbild. 574 a) und damit alle Punkte aufser der Expansion festzustellen. Für die letztere wird das Diagramm des Expansionsschiebers (Excentricität r_1, Voreilungswinkel δ_1, äufsere Ueberdeckung e_1, Kanalweite a_1) verzeichnet (Kreis S_1). Dies ergiebt den Winkel γ zwischen der Totlage M und der Kurbelstellung bei Beginn der Expansion. Durch Zurücktragen von γ von m_1 aus folgt die Kurbelstellung beim Expansionsbeginn K_2, bezogen auf die dem Grundschieberdiagramm entsprechende

Totlage m_1. — Geringe Füllungen ergeben grofse Ueberdeckungen e_1, grofsen Expansionsschieberweg und schleichenden Kanalabschlufs. Wird der Expansionsschieber als Gitterschieber mit n Oeffnungen ausgeführt, so kann die Ueberdeckung $= \frac{e_1}{n}$ und die Excentricität $= \frac{r_1}{n}$ gemacht oder es kann rascherer Abschlufs erzielt werden.

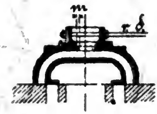
2. Expansionsschieber auf dem Rücken des Verteilungsschiebers.

(Bei der Anordnung Abbild. 575 steuert die Aufsenkante, bei Abbild. 575a die Innenkante.) Veränderung der Füllung kann erzielt werden durch gleichzeitige Veränderung von r_1 und δ_1, wie oben, oder einfacher durch Veränderung von m (Entfernung der steuernden Kante von der Kanalkante für die symmetrische Stellung der Schieber zu einander). Um den schädlichen Raum in den Durchgangskanälen des Grundschiebers zu verringern, kann der Durchgangskanal geteilt (Abbild. 575) und über jede der beiden Oeffnungen eine Expansionsplatte mit steuernder Innen- oder Aufsenkante gelegt werden. Die Veränderung von m kann durch Verschiebung der beiden Expansionsplatten mittelst rechts- und linksgängiger Schraube erfolgen, **Meyersche Steuerung** (Abbild. 578 a. S. 701).

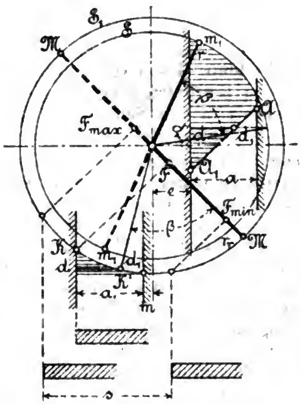
Abbild. 575.



Abbild. 575a.



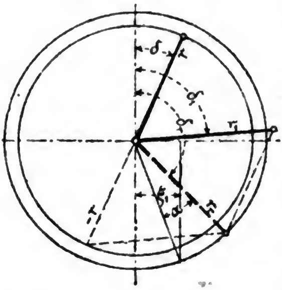
Abbild. 576.



Schieberdiagramm einer Meyerschen Steuerung s. Abbild. 576 (wobei die Aufsenkante des Expansionsschiebers steuernd angenommen ist). Für den Grundschieber Excentricität r, Voreilungswinkel δ, äufsere Ueberdeckung e, innere Ueberdeckung i, Kanalweite a; für den Expansionsschieber r_1, δ_1, e_1, a_1 (meist $a_1 = a$). Für die Expansion ist mafsgebend die Relativbewegung zwischen Grund- und Expansionsschieber, die dargestellt werden kann, indem man sich das Ganze noch durch ein Excenter $-r$ (d. h. Excentricität $= r$,

Voreilungswinkel $= \delta + 180^0$) bewegt denkt. Dann befindet sich der Grundschieber in Ruhe, und für den Expansionsschieber ergiebt sich eine solche (Relativ-) Bewegung, als ob er allein von dem „Relativ-Excenter“ (r_r, δ_r) angetrieben würde, das aus dem Parallelogramm gefunden wird (Abbild. 577). Unter Zugrundelegung des Relativ-Excenters kann nun die Bewegung nach dem früheren Verfahren für ruhenden Spiegel bestimmt werden.

Abbild. 577.



Nach Feststellung des Diagramms des Grundschiebers (Schieberkreis S, Hubwechsel $m_1 m_1$ in Abbild. 576), das hier nur für Voreinströmung, Vorausströmung und Kompression, nicht aber für die Expansion maſsgebend ist, wird mit dem Halbmesser r_r der relative Schieberkreis S_1 verzeichnet (Hubwechsel MM). Soll der Expansionsschieber bei einer bestimmten Füllung F abschlieſsen, so ist die Hublänge MM dieser Füllung entsprechend einzuteilen. Ein Lot auf MM in diesem Punkte ergiebt durch den Schnitt mit dem Schieberkreise S_1 die Kurbelstellung K für den Abschluſs des Expansionsschiebers. Für unmittelbar vorausgegangene Kurbelstellungen ergiebt sich die Eröffnung des Durchgangskanals in den Sehnenabschnitten, z. B. für die Kurbelstellung K' die Eröffnung dd_1. —

Die Eröffnung der Kanäle am Schieberspiegel (durch den Grundschieber) und der Durchgangskanäle (durch den Expansionsschieber) wird zusammenhängend dargestellt durch Eintragen der Schlieſsungskurve AA_1 für die vorliegende Füllung. Dies geschieht durch Uebertragung der einzelnen Kurbelstellungen samt zugehörigen Eröffnungen des Durchgangskanals in den Grundschieberkreis, indem der Winkel β zwischen Kurbelstellung K' und Totlage M von der Totlage m_1 aus abgetragen wird. Für die Beurteilung der Dampfverteilung ist maſsgebend die Raschheit des Dampfabschlusses für die am häufigsten benutzten Füllungen. Rascher Abschluſs wird erhalten durch groſses Relativexcenter und Relativbewegung der Schieber mit der gröſsten Geschwindigkeit im Augenblicke des Abschlusses.

Die Gröſse m für eine bestimmte Füllung F wird, wie die Abbild. zeigt, in der Entfernung der rechten Kanalkante von der Mittellinie gefunden.

Die Gröſse der Verschraubung s der beiden Expansionsplatten, durch welche die Aenderung von m hervorgebracht wird,

ergiebt sich aus den gewünschten Füllungsgrenzen F_{min} und F_{max} in der aus Abbild. 576 ersichtlichen Weise (gröfste Füllung durch den Expansionsschieber $\gtreqless$ derjenigen durch den Grundschieber).

Die Länge der Expansionsplatten l (Abbild. 575) ist zu bestimmen für den kleinsten Wert von m und den gröfsten relativen Schieberausschlag r_r; hierbei darf der Durchgangskanal auf der Innenseite nicht geöffnet werden. Das ergiebt die Lappenlänge

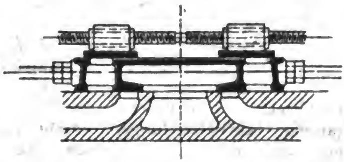
$$l = r_r - m_{min} + \sigma,$$

wobei σ die zur Dichtheit nötige Ueberdeckungsgröfse bedeutet und m_{min} mit negativem Vorzeichen einzusetzen ist, wenn es sich im Schieberdiagramm von der Mittellinie nach rechts erstreckt.

Die Ausladung der Durchgangskanäle L ist zu bestimmen für den gröfsten Wert von m, d. i. ganz zusammengeschobene Schieberplatten, bei welcher Stellung letztere noch um z von einander abstehen sollen. Dies ergiebt:

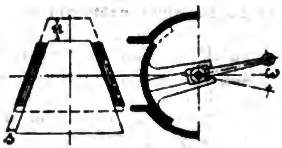
$$L = m_{max} + l + 0{,}5\, z.$$

Abbild. 578.



Beispiel einer konstruktiven Ausführung s. Abbild. 578. — Die Bewegungsschraube ist rechts- und linksgängig, die Mutter in der Expansionsplatte vielfach zweiteilig. Die Stellung der Expansionsplatten für die verschiedenen Füllungsgrade ist aufserhalb des Schieberkastens durch Zeiger und Skala anzuzeigen. Zur Entlastung des Expansionsschiebers ist der Rücken des Verteilungsschiebers mit schrägen Vertiefungen zu versehen. Selbstthätige Einwirkung des Regulators ist bei Schraubenübertragung umständlich.

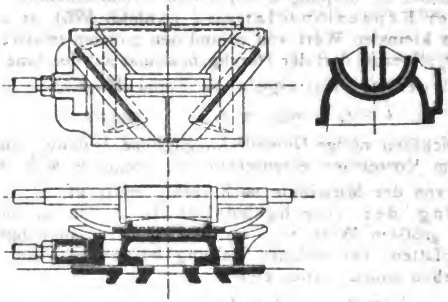
Abbild. 579.



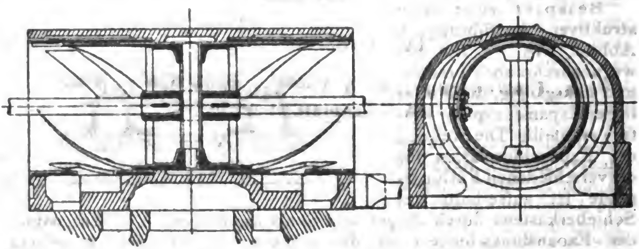
Rider-Steuerung. Diese Steuerung ist hinsichtlich der Dampfverteilung mit der Meyerschen übereinstimmend; die Verstellung der steuernden Kanten am Expansionsschieber erfolgt durch Querverschiebung bezw. Verdrehung (Abbild. 579). Die Durchgangskanäle des Grundschiebers werden schräg gestellt; die trapezförmige Schieberplatte giebt bei einer Querverschiebung u eine Längsverschiebung s der steuernden Kante. Die Querverschiebung wird in eine Drehung verwandelt, indem der Rücken des Verteilungsschiebers und der Expansionsschieber cylindrisch ausgeführt werden. Der Verschiebung u entspricht ein Drehungswinkel ω. An

dem Drehhebel kann selbstthätig ein Regulator angreifen. Der Drehwinkel ω ist $= 30^0$ bis 60^0 auszuführen. Kleines u und daher kleines ω wird erreicht durch sehr schräge Lage der Durchgangskanäle. Um hierdurch keine zu grofse Länge der Schieber zu erhalten, wird vielfach eine Teilung des einen Trapezes in mehrere (zusammenhängende) vorgenommen.

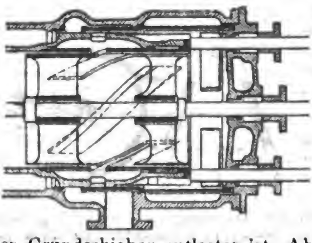
Abbild. 580.



Abbild. 581.



Abbild. 582.

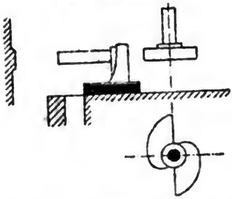


An die Stelle der obigen Bestimmung von l und L tritt beim Rider-Schieber die Rücksicht, dafs bei den äufsersten Verdrehungen und Verschiebungen keine Eröffnung des linken Kanals durch die rechte Kante und umgekehrt stattfindet.

Ausführung der Rider-Schiebersteuerung s. Abbild. 580. Entlasteter cylindrischer Rider-Schieber Abbild. 581. Rider-Kolbensteuerung, wobei auch der Grundschieber entlastet ist, Abbild. 582. — Der Hebel für den Regulator-Antrieb mufs mit der Schieberstange auf Verdrehung verbunden sein, wird aber vielfach so angeordnet, dafs er an deren Längsverschiebung nicht teilnimmt.

Schleppschiebersteuerung (Farcot) (Abbild. 583). Auf dem Rücken des Verteilungschiebers liegt eine Expansionsplatte. Diese wird durch Reibung mitgenommen, bis die Platte an einen feststehenden Daumen anstöfst und den Durchgangskanal überschleift. Veränderliche Füllungen durch veränderliche Stellung des excentrischen Daumens. Rückbewegung der Expansionsplatte in die ursprüngliche Lage erfolgt durch einen festen Anschlag am Schieberkasten. Die Steuerung kann nur veränderliche Füllungen geben innerhalb des Drehwinkels $90^0 - \delta$ vom Hubwechsel ab, so lange nämlich der Grundschieber in **einem** Bewegungssinne läuft.

Abbild. 583.



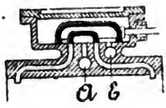
Bei richtiger Ausführung des Grundschiebers für genügende Vorausströmung und Kompression ist daher die veränderliche Expansion nur innerhalb 60 bis 65° Kurbeldrehung, entsprechend 0,25 bis 0,3 Füllung, möglich.

IV. Umsteuerungen.

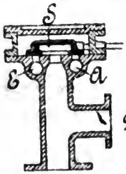
a. Umsteuerung durch Vertauschung der Ein- und Ausströmungskanäle.

In die Dampfleitung für den Cylinder (Abbild. 584) ist die Umsteuerungsvorrichtung (Abbild. 584a) eingeschaltet. Der Dampf tritt in den Schieberkasten der Umsteuerung ein, an den Stutzen D ist die Ausströmung angeschlossen. Einstellung des Schiebers S so, dafs der Dampf beim Vorwärtsgang durch Kanal E, beim Rückwärtsgang durch A zum Cylinder gelangt. Abheben des Steuerschiebers bei innerer Einströmung (durch A) mufs durch Dampfdruck im Schieberkasten (Abbild. 584) verhütet werden. Die Steuerung läfst keinen Voreilungswinkel und keine Ueberdeckung, daher keine Expansion, Kompression u. s. w. zu. Bei Anwendung von Ueberdeckung kann eine Gangart auf Kosten der anderen verbessert werden.

Abbild. 584.



Abbild. 584a.

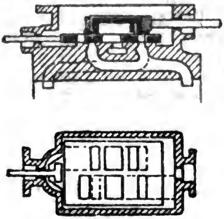


b. Umsteuerung durch bewegliche Schieberspiegel.

Konstruktion folgt aus Abbild. 585. Voreilungswinkel und Ueberdeckung unzulässig. Grofse Abmessungen des Schieberkastens.

c. Umsteuerung durch Umkehrungshebel.

Abbild. 585.

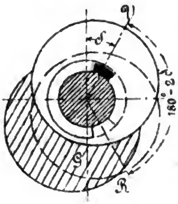


Schieberstange mit dem einen oder anderen Ende des Umkehrungshebels verbunden, wodurch Umkehrung der Bewegungsrichtung. Voreilungswinkel und Ueberdeckung unzulässig.

d. Umsteuerung mit losem Excenter,

welches aus der Stellung des Vorwärtsganges V (Abbild. 586) durch Drehung um $180^0 - 2\,\delta$ in die des Rückwärtsganges R gebracht wird. Excenter durch Gegengewicht G ausbalanciert. Umlegen des Excenters bei kleinen Maschinen mittelst Handrad, bei grofsen (Schiffsmaschinen) in Verbindung mit auslösbaren Excenterstangen. Dampfverteilung regelrecht.

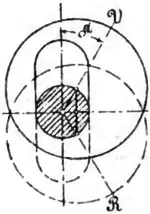
Abbild. 586.



e. Umsteuerung durch ein verschiebbares Excenter.

Verschiebung in einem Schlitz des Excenters, so dafs der Excentermittelpunkt in einer Senkrechten zur Kurbel seine Lage ändert (Abbild. 587). Dadurch wird Hub und Voreilungswinkel des Excenters und damit auch die Expansion verändert, während das lineare Voreilen konstant bleibt. Bei weiterer Verschiebung Umsteuerung, in der Endlage ganz entsprechend der Umsteuerung mit losem Excenter. Dampfverteilung regelrecht. Schieber und Dampfdiagramm für die verschiedenen Lagen des Excenters wie für den einfachen Schieber zu bestimmen. —

Abbild. 587.



Solche Verschiebung des Excenters ist während des Ganges schwierig ausführbar, die Wirkung der Verschiebung läfst sich durch andere Konstruktionen (Kulissen) ersetzen.

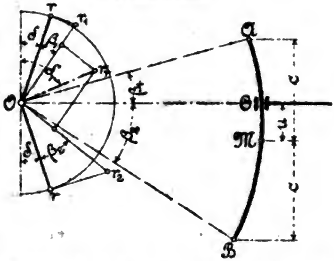
f. Kulissensteuerungen.

1. Allgemeine Theorie.

Vorausgesetzt wird, dafs die Kulissen-Endpunkte in **geraden Linien** parallel zur Steuerungsachse verschoben werden, ferner dafs das Verhältnis Excenterstangenlänge l: Excentricität $r = \infty$ ist. Die Excenterbewegung ist unter Berücksichtigung des Winkels β, unter

dem die Uebertragung schräg zur Steuerachse erfolgt, auf die Kulissen-Endpunkte zu übertragen, nach der der jeweiligen Kulissenstellung entsprechenden Hebelübersetzung zu reduzieren und beide auf das Gleitstück einwirkende Bewegungen zu einer gemeinsamen Excenterbewegung zusammenzusetzen. Das giebt folgendes **allgemeine Verfahren** (Abbild. 588):

Abbild. 588.



Ein vorhandenes Excenter r mit dem Voreilungswinkel δ treibt den Endpunkt A der Kulisse schräg unter dem Winkel β_1 an. Dieses hat gleiche Wirkung wie der unmittelbare gerade Antrieb durch das Excenter

$$r_1 = \frac{r}{\cos \beta_1},$$

welches bei offenen Excenterstangen unter dem Voreilwinkel $\delta + \beta_1$, bei gekreuzten unter $\delta - \beta_1$ aufgekeilt ist.*) Konstruktion dieses Excenters (für offene Stangen) s. Abbild. 588. Bei beliebiger Kulissenstellung u und der Kulissenlänge $2c$ reduziert sich dieses Excenter nach der Hebelübersetzung auf:

$$r'_1 = r_1 \frac{c + u}{2c}.$$

Dieses Excenter kann als unmittelbarer Antrieb des Gleitbackens C angesehen werden.

In derselben Weise ist das Rücklauf-Excenter zu behandeln. Es ergiebt sich das reduzierte Excenter:

$$r'_2 = r_2 \frac{c - u}{2c}, \quad \text{worin } r_2 = \frac{r}{\cos \beta_2},$$

u. zw. unter dem Winkel $\delta + \beta_2$ gegen die Lotrechte aufgekeilt.

Beide reduzierten Excenter sind zu dem resultierenden Excenter r_r mit dem Voreilungswinkel δ_r nach dem Parallelogramm zusammenzusetzen (s. Abbild.). Dies Excenter, für welches Schieber- und Dampfdiagramm nach den Regeln über einfache Schiebersteuerungen zu entwerfen sind, hat dieselbe Wirkung wie die Kulissensteuerung bei der betrachteten Stellung des Gleitstücks.

Der geometrische Ort des Endpunktes des resultierenden Excenters r_r für die verschiedenen Gleitstückstellungen einer Steuerung heifst die **Scheitelkurve.**

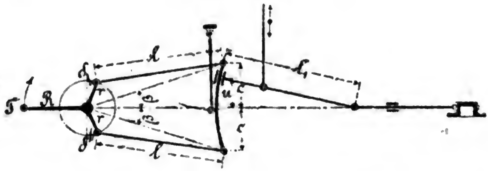
---

*) Für die Bezeichnung „offene oder gekreuzte Stangen" ist die Lage der Excenterstangen bei der in den Abbild. 589 u. f. gezeichneten Kurbeltotlage mafsgebend.

2. Umsteuerung von Gooch (Abbild. 589 für offene Stangen).

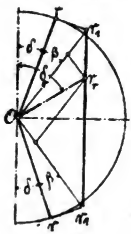
Die Kulisse ist fest aufgehängt oder gerade geführt. β ist konstant. Die Schieberschubstange mit dem Gleitstein wird verschoben. Krümmungshalbmesser der Kulisse l_1 = Länge der Schieberschubstange.

Abbild. 589.



Die Endpunkte der resultierenden Excenter für verschiedene Stellungen des Gleitbackens liegen auf einer **Geraden** (Abbild. 590). Die Koordinaten der Endpunkte der resultierenden Excenter bestimmen sich aus den Gleichungen:

Abbild. 590.



$$x = r\left(\sin\delta \pm \frac{c}{l}\cos\delta\right);$$

$$y = \frac{ru}{c}\left(\cos\delta \mp \frac{c}{l}\sin\delta\right),$$

wenn l die Länge der Excenterstangen bedeutet.

Das lineare Voreilen ist konstant.

Der Schieberweg für einen beliebigen Drehwinkel α der Maschinenkurbel ist:

$$\xi = r\left(\sin\delta \pm \frac{c}{l}\cos\delta\right)\cos\alpha$$

$$\pm\frac{ur}{c}\left(\cos\delta \mp \frac{c}{l}\sin\delta\right)\sin\alpha.$$

Bei Lokomotiven wird diese Steuerung durch das Federspiel der Triebachse um so mehr beeinflufst, je höher der Füllungsgrad ist; noch stärker ist der Einflufs bei geneigter Anordnung (vergl. unter 3.).

3. Umsteuerung von Stephenson (Abbild. 591 für offene Stangen).

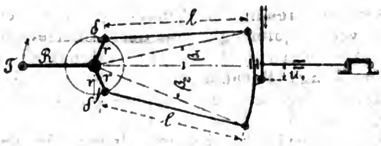
Die Kulisse ist verschiebbar. Krümmungshalbmesser der Kulisse l = Länge der Excenterstange.*) Die Excenter arbeiten je nach der Höhenlage der Kulisse unter den veränderlichen Winkeln β_1 und β_2. Bei ganz ausgelegter Kulisse ist einer der Winkel = 0, das

*) Ueber eine wünschenswerte Berichtigung der Länge l vergl. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1891, S. 476.

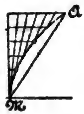
entsprechende Excenter überträgt dann seine Bewegung unmittelbar auf den Schieber. Für die Mittelstellung der Kulisse ist $\beta_1 = \beta_2 \; (= \beta)$ und Excenter $r_1 = r_2 = \frac{r}{\cos\beta} \; (= r_0)$.

Die Endpunkte der resultierenden Excenter liegen auf einer **Parabel** mit dem Scheitel auf der Verbindungsgeraden der Endpunkte der Excenter $r_0 = \frac{r}{\cos\beta}$.

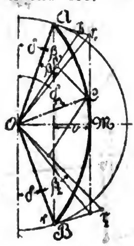
Abbild. 591.



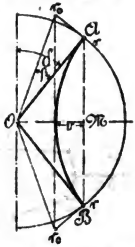
Abbild. 592.



Abbild. 593.



Abbild. 594.



Die Parabel erstreckt sich von A bis B (Excenter r, Abbild. 593 für offene Stangen). Konstruktion der Parabel zeigt Abbild. 592. (Gleichmäßige Einteilung der wagerechten und der lotrechten Linie.)

Bei gekreuzten Excenterstangen ist β negativ (Abbild. 594). Die Parabel verläuft mit umgekehrter Krümmung wieder von den Endpunkten A und B der Excenter r zum Scheitel M auf der Geraden für die Excenter r_0.

Die Koordinaten der Endpunkte der resultierenden Excenter sind:

$$x = r\left(\sin\delta \pm \frac{c^2 - u_1^{\,2}}{cl}\cos\delta\right), \qquad y = \frac{u_1}{c}\, r\cos\delta.$$

Das **lineare Voreilen** ist um den Betrag v **veränderlich**, zunehmend mit Annäherung an die Mittelstellung bei offenen Excenterstangen, abnehmend bei gekreuzten. Durch unsymmetrische Stellung der Kurbel zu den Excentern läſst sich das lineare Voreilen für einen bestimmten Teil der Kulissenstellungen, etwa für den Vorwärtsgang, näherungsweise konstant halten (entsprechender Parabelast möglichst lotrecht), jedoch bei entsprechender Verschlechterung für den Rückwärtsgang. —

Der Schieberweg für einen beliebigen Drehwinkel α ist:

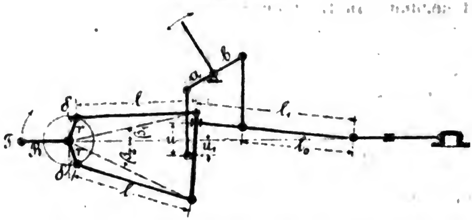
$$\xi = r\left(\sin\delta \pm \frac{c^2 - u_1^{\,2}}{cl}\cos\delta\right)\cos\alpha \pm \frac{u_1}{c}\, r\cos\delta\sin\alpha.$$

Bei wagerechter Anordnung wird diese Steuerung bei Lokomotiven durch das Federspiel der Triebachse nur sehr wenig beeinflufst, bei geneigter Anordnung (Aufsensteuerung, Schieberkasten über Cylinder) hat hier und bei den folgenden Steuerungen das Heben der Triebachse ein Vorwärtsschieben, das Senken ein Zurückziehen des Schiebers zur Folge.

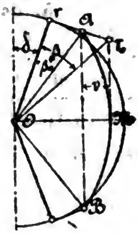
4. Umsteuerung von Allan (Abbild. 595 mit offenen Stangen).

Gerade Kulisse, Schieberstange und Kulisse durch einen Doppelhebel gleichzeitig gegeneinander verstellt. In der Mittelstellung arbeiten beide Excenter unter dem Winkel β $\left(\text{Excenter } r_0 = \frac{r}{\cos\beta}\right)$, bei ganz ausgelegter Kulisse erreicht der Winkel für das betreffende Excenter einen Mindestwert β', abhängig von der Uebersetzung des Umsteuerungshebels. Die Endpunkte der resultierenden Excenter liegen auf einer **Parabel** mit dem Scheitel M (Abbild. 596) für die Mittelstellung und den Endpunkten A und B für die ganz ausgelegte Kulisse. Das lineare Voreilen ist um die Höhe v der Parabel veränderlich. Es ist kleiner als bei der Stephensonschen Kulisse.

Abbild. 595.



Abbild. 596.



Wenn die Entfernung des Schieberschwingungsmittels vom Wellenmittel konstant, d. h. unabhängig von u und u_1 sein soll, so mufs sein:

$$\frac{u}{u_1} = 1 + \frac{b}{a}\,\frac{l_1}{l_0} = 1 + \frac{l_1}{l}\left[1 \pm \sqrt{\frac{l}{l_1}}\right],$$

woraus das Hebelverhältnis $a:b$ zu bestimmen ist.

Hinsichtlich des Einflusses des Federspiels der Triebachse bei Lokomotiven steht die Allan-Steuerung zwischen der Gooch- und Stephenson-Steuerung.

Aufhängung der Kulisse und Schieberschubstange

bei den Umsteuerungen von Gooch, Stephenson und Allan.

Da die Kulisse gewöhnlich nicht gerade geführt, sondern aufgehängt ist, so beschreibt der Aufhängepunkt einen Kreisbogen, jeder andere Kulissenpunkt aber eine ∞- oder ⊖-förmige Kurve,

die um so bauchiger ist, je weiter der Punkt vom Aufhängungspunkt der Kulisse entfernt und je kürzer die Hängestange ist. Diese Relativbewegung der Kulisse gegen den Stein heifst das **Springen (Würgen) des Steines.** Um die damit verbundene Abnutzung von Kulisse und Stein möglichst gering zu halten, benutzt man gewöhnlich den Kulissenmittelpunkt als Aufhängungspunkt, da dieser den geringsten seitlichen Ausschlag macht; dabei thunlichst lange Hängestangen.

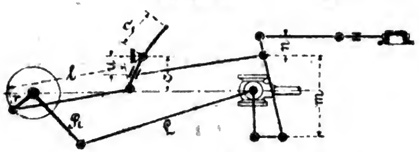
Soll **eine** Drehrichtung der Maschine besonders berücksichtigt werden (z. B. Lokomotive mit Schlepptender), so hängt man die Kulisse an dem dieser Drehrichtung entsprechenden Ende auf. Die entgegengesetzte Drehrichtung hat dann eine um so unvollkommenere Führung der Kulisse. Aufhängung erfolgt so, dafs die Sehne des von dem Aufhängepunkt beschriebenen Bogens parallel zur Schieberschubrichtung liegt (Mittellage der Hängestange senkrecht zur Schieberschubrichtung) und dafs der Bogenpfeil durch letztere halbiert wird. Entsprechendes gilt von der Aufhängung der **Schieberschubstange.**

Bei Umsteuerungen mit zwei Excentern ist der Einflufs des toten Ganges (infolge Abnutzung der Gelenke) gering; dabei gekreuzte Stangen besser als offene. Bei geringer verfügbarer Höhe ist die Gooch-Steuerung am vorteilhaftesten, die Stephenson-Steuerung beansprucht am meisten Höhe, dagegen die geringste Längenausdehnung bei gleicher Länge der Excenterstangen.

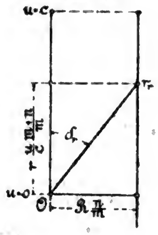
5. Umsteuerung von Heusinger (Abbild. 597).

Auf den einen Endpunkt der festgelagerten Kulisse arbeitet ein Excenter r mit dem Voreilungswinkel $\delta = 0$. Zwischen Kulisse und Schieber ist ein Hebel eingeschaltet, dessen unterer Endpunkt vom Kreuzkopf der Maschine bewegt wird. Die durch die Kulisse und den Hebel übersetzte Excenterbewegung entspricht einem Excenter $r_1 = r \frac{u}{c} \frac{m+n}{m}$ mit dem Voreilungswinkel $\delta_1 = 0$.

Abbild. 597.



Abbild. 598.



Die vom Kreuzkopf abgeleitete konstant übersetzte Bewegung des Schiebers ist gleich derjenigen durch ein Excenter $R \frac{n}{m}$ (R = Kurbelhalbmesser), das unter $\delta_0 = 90^0$ Voreilung aufgekeilt ist (wegen der Bewegungsumkehr durch den Hebel). Dies konstante Excenter ist mit dem ersteren zusammenzusetzen (Abbild. 598), wodurch sich das **resultierende Excenter** r_r ergiebt.

Die Endpunkte der resultierenden Excenter liegen auf einer **Geraden**, die Steuerung hat daher konstantes lineares Voreilen. Schieberweg für einen Drehwinkel α:

$$\xi = R \frac{n}{m} \cos \alpha + r \frac{u}{c} \frac{m+n}{m} \sin \alpha.$$

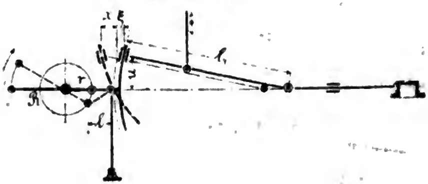
Kleine Reibungsarbeit, empfindlicherer Einfluſs des toten Ganges (s. S. 709), geringe Ausladung, treibt ohne geneigte Lage der Excenterstange und geneigte Schieberflächen eine zum Kolbenschub parallele Schieberstange, daher für Auſsensteuerung bei Lokomotiven vorteilhaft.

Die aus der endlichen Länge L der Kolbenschubstange entstehenden Fehler kann man ausgleichen, indem man die kurze untere Schubstange (an m angreifend) parallel der Kolbenschubrichtung und so lang macht, daſs in den Endlagen ihre wagerechte Projektion um $L(1-\cos\beta)$ kürzer ist, als ihre eigene Länge. — Die durch zu kurze (am Kulissenstein angreifende) Schubstange entstehende Verschiedenheit des Voreilens auf beiden Seiten gleicht sich aus, wenn der Angriffspunkt der Excenterstange an der Kulisse für beide Kurbeltotpunkte dieselbe Lage hat. — Kulissendrehpunkt lotrecht über der mittleren Lage dieses Punktes.

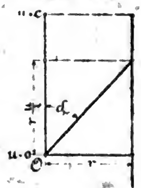
6. Umsteuerung von Pius Fink (Abbild. 599).

Das mit einem Voreilungswinkel $\delta = 90^{\circ}$ aufgekeilte Excenter r treibt eine Kulisse, welche mit der sehr kurzen Excenterstange l aus einem Stück hergestellt ist. Die geradlinige Verschiebung ξ des Gleitbackens durch das Excenter r wird infolge der gleichzeitigen Schrägstellung des Schleifbogens um χ vergröſsert. Für den Drehwinkel α ist $\chi = r \frac{u}{l} \sin \alpha$. Diese Bewegung kann an-

Abbild. 599.



Abbild. 600.



gesehen werden als hervorgebracht durch ein Excenter $r_1 = r \frac{u}{l}$, welches den Voreilungswinkel $\delta = 0$ besitzt.

Die Zusammensetzung mit dem konstanten Excenter r $(\delta = 90^{\circ})$ ergiebt das resultierende Excenter r_r nach Abbild. 600.

Die Endpunkte der resultierenden Excenter liegen auf einer **Geraden**, das lineare Voreilen ist daher konstant.

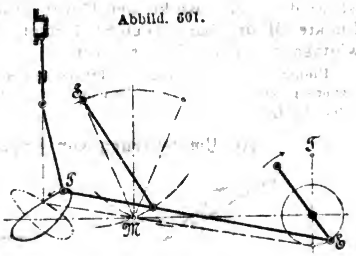
Der Schieberweg ist $\xi = r \cos \alpha + \frac{r u}{l} \sin \alpha$.

Für Lokomotiven schlecht anwendbar, da durch das Federspiel das Lager des Kulissenlenkers seine Lage zur Triebachse fortwährend ändert und dadurch un-

richtige Dampfverteilung bewirkt; auch wird für grofse Füllungen (0,7) die Kulisse sehr lang. Durch die Lage des Steins aufserhalb des Kulissenstützpunktes entstehen starke Pressungen an Führung und Excenter.

7. Umsteuerung von Klug (Abbild. 601).

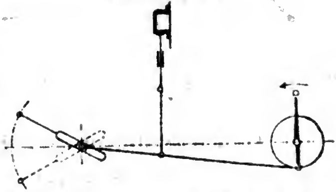
Abbild. 601.



Das mit der Kurbel in gerader Linie liegende Excenter ($\delta = 90^0$) bewegt den Schieber ohne Kulisse durch Vermittlung des Gelenks P, wobei ein Punkt der Excenterstange durch eine Schwinge im Kreisbogen geführt wird. Der Drehpunkt S der Schwinge ist in einem Rahmen um M drehbar, wodurch Aenderung des Füllungsgrades und Umsteuerung erzielt wird. Das lineare Voreilen ist konstant.

8. Umsteuerung von Marshall (Abbild. 601 a).

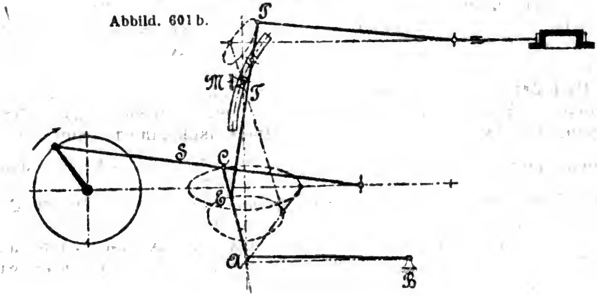
Abbild. 601 a.



Der vorigen ähnlich. Angriffspunkt der Schieberstange liegt hier zwischen Kurbel und Schwinge. — Dieselbe Anordnung besitzt die Hackworth-Steuerung, aus welcher die vorigen hervorgegangen; nur ist bei letzterer die Schwinge durch Geradführung ersetzt (Abbild. 601 a). Geringere Kräftewirkung an der Schwinge bezw. am Schleifbogen. Das lineare Voreilen ist konstant.

9. Umsteuerung von Joy (Abbild. 601 b).

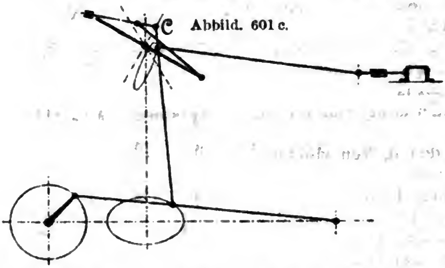
Abbild. 601 b.



Die Schieberbewegung wird von der Maschinen-Schubstange S abgeleitet durch Vermittlung eines Ellipsenlenkers CAB, dessen Bewegung im Punkte E durch die in einer Kulisse geführte Stange T und das Gelenk P auf den Schieber übertragen wird. Die Kulisse ist wieder zum Zwecke der Umsteuerung und Füllungsänderung im Punkte M drehbar. Gleiche Dampfverteilung für Vor- und Rückwärtsgang. Das lineare Voreilen ist konstant.

Einflufs des Federspiels der Triebachse bei Lokomotiven in der Mittellage der Steuerung verschwindend, mit wachsender Füllung zunehmend (bis 10% Füllungsunterschied).

10. Umsteuerung von Brown (Abbild. 601c).



Abbild. 601 c.

Die verstellbare geradlinige Bahn des Punktes C wird durch einen Konchoidenlenker (vergl. S. 512) hervorgebracht. Für eine bestimmte Drehrichtung gute Dampfverteilung möglich; für entgegengesetzte Drehrichtung um so ungünstiger, je vollkommener in der ersten.

Einflufs des Federspiels wie bei 9.

C. Einzelheiten der Dampfmaschinen.

a. Dampfcylinder.

Beispiele von Dampfcylindern s. Abbild. 602 bis 606.

Gröfsere Cylinder erhalten Verrippung gegen Formänderung beim Aufspannen auf die Bohrbank.

Cylinderwandstärke s s. S. 469, Wandstärke der Flanschen = 1,3 s bis 1,4 s. **Innenfläche** des Cylinders mit Absatz zu versehen, welchen der Kolben überschleift. Der Absatz mufs konisch verlaufen, um das Einbringen des Kolbens zu erleichtern.

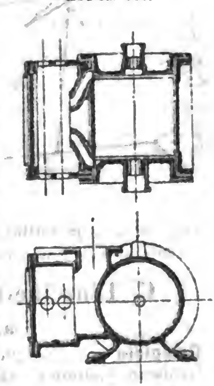
Cylinderdeckel behufs Centrierung stets in den Cylinder eingreifend; genügende Festigkeit gröfserer Deckel erreicht durch Verrippung oder Wölbung. Anzahl der **Deckelschrauben,** wenn d den Cylinderdurchmesser in cm bezeichnet: $i = \frac{d}{8} + 4$, höchstens aber Schraubenentfernung 15 cm, behufs Erzielung gleichmäfsigen Dichtungsdruckes, u. zw. um so kleiner, je geringer die Flanschenstärke. Dichtung durch Gummiringe, Metallsiebe oder Asbest, bei bester Ausführung nur durch geschliffene Flächen. Kerndurchmesser

der Deckelschrauben zu berechnen nach dem gröfsten Dampfdruck auf den Deckel, wegen des Dichtungsdruckes und wegen wiederholter Lösung solcher Schrauben nur für eine Beanspruchung k_z bis 300 kg f. d. qcm. — **Spielraum** zwischen Deckel und Kolben je nach Ausführung 0,5 bis 1 cm, mit Rücksicht auf nachherige Wärmeausdehnung bei Aufstellung ungleich auf beide Cylinderseiten verteilt.



Abbild. 602.

Anordnung der Cylinder stets mit Rücksicht auf freie Ausdehnung durch die Erwärmung und gute Zugänglichkeit aller Teile. Cylinder, Schieberkasten und Deckel mit einer die Wärme schlecht leitenden Masse zu umgeben; zu gleichem Zweck durch Blechverkleidung eine Luftschicht abzuschliefsen.



Abbild. 603.

Heizung der Cylinder erfolgt durch Dampfmäntel (Abbild. 602, 604 bis 606). Dampfcylinder entweder in den Aufsencylinder eingepafst, u. zw. am besten ohne Dichtungsmaterial in diesen unter hohem Druck oder bei Erwärmung des Mantels eingeprefst (Abbild. 602) oder mit ihm zusammengegossen (Abbild. 604). Hierbei Kernöffnungen an den Stirnseiten, durch den Cylinderdeckel überdeckt, oder in der äufseren Cylinderwand. — **Ausrüstung der Heizung:** Zuleitungsrohre (vor dem Dampfzulafsventil abzuzweigen), Ventile für Einlafs, Hähne zur Entlüftung des Mantels, Entwässerungsrohre, zu Automaten führend; (Entwässerungen von einander unabhängig).

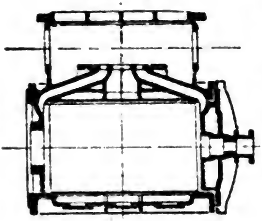
Sonstige **Ausrüstung der Cylinder:** Cylinderschmierung (wenn nicht Schmierung des Dampfes), Indikator-Stutzen, Entwässerungshähne, nötigenfalls Sicherheitsventile gegen Wasserschlag.

b. Steuerung.

Anordnung des Schieberkastens möglichst derart, dafs das Abfliefsen des Kondensationswassers aus dem Cylinder erleichtert ist; daher seitliche Anordnung des Schieberkastens vorzuziehen. — Schieberkasten mit dem Cylinder entweder durch Gufs oder durch Verschraubung vereinigt; im letzteren Falle Bearbeitung des Schieberspiegels erleichtert, was auch durch schiefe Lage der Trennungsfläche zwischen Schieberkasten und Deckel erreicht wird. — Anordnung des Schieber- bezw. Ventilkastens s. Abbild. 603, 604, 605 sowie Abbild. 606, auch als Beispiel für die Anordnung des Aufnehmers.

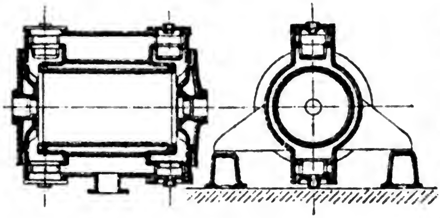
Anordnung der Dampfkanäle bei Schiebersteuerungen Abbild. 603 und 604, bei Ventilsteuerungen Abbild. 605.

Abbild. 604.



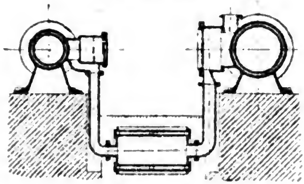
Schieber und Schieberkasten sind mit besonderen Führungsleisten zu versehen. — Die Auflagerflächen des durch den vollen Dampfdruck belasteten Schiebers zu berechnen für einen Auflagerdruck < 20 kg f. d. qcm. — Zuweilen Federn zum Anpressen des Schiebers bei hoher Kompressionsspannung oder zeitweilig leerlaufender Maschine. — Beispiele von Schiebern s. S. 694 u. f.

Abbild. 605.



Die Verbindung der Flachschieber mit den Schieberstangen mufs ein Nachdrücken des Schiebers auf den Spiegel durch den Dampfdruck ermöglichen. **Antrieb der Schiebersteuerungen,** wenn möglich, in gerader Linie vom Excenter. Bei nicht zusammenfallenden Mittellinien besonders ausgebildete Schieberstangenführung erforderlich, bei gröfserer Abweichung der Mittellinien Anordnung einer Schwinge notwendig. Auflagerdruck in den Gelenkbolzen < 10 kg f. d. qcm, ebenso wie Festigkeits-Abmessungen für den vollen Dampfdruck auf die Schieberfläche (Reibungskoefficient $\mu = 0{,}1$) und bei raschlaufenden Maschinen auch für den Beschleunigungsdruck der Schiebermasse zu berechnen.

Abbild. 606.

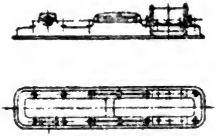


c. Maschinenrahmen.

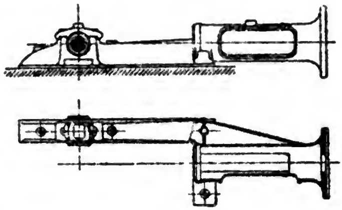
Der Rahmen mufs die auftretenden Kräfte unmittelbar aufnehmen, Beanspruchungen des Fundaments thunlichst zu vermeiden. — Die Hebelarme der Kräfte auf das kleinste Mafs zu beschränken; Höhe der Cylindermitte über dem Rahmen daher möglichst klein. Kolbendruck thunlichst centrisch in der Maschinenachse aufzunehmen, daher starre Rundführungen mit centrischer Cylinderbefestigung empfehlenswert. Der Rahmen mufs dem Cylinder nach einer Seite freie Ausdehnung gestatten.

Beispiele: Rahmen für liegende Maschinen Abbild. 607 bis 611. Abbild. 607 flacher Rahmen mit aufgesetzter Gleisführung. Abbild. 608 Rahmen mit Rundführung. Führung und einseitiger Balken, bei älteren Maschinen freitragend, sollen unmittelbar vor dem Dampfcylinder und

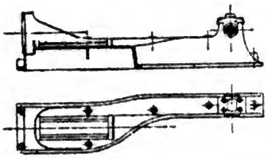
Abbild. 607.



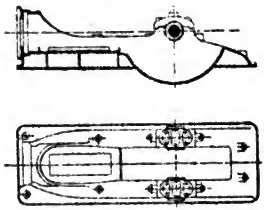
Abbild. 608.



Abbild. 609.

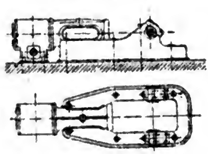


Abbild. 610.



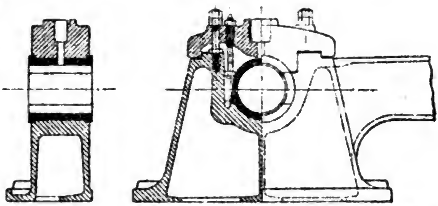
bei grofsen Maschinen auch unterhalb der Rundführung unterstützt und auf dem Fundament befestigt werden. Besser auf der ganzen Länge vom Kurbellager bis Führung und bei gröfseren Maschinen auch bis zum Dampfcylinder auf dem Fundament aufliegend. Abbild. 609 einseitiger Rahmen mit flacher Kreuzkopfführung, Abbild. 610 Gabelrahmen für gekröpfte Welle, Abbild. 611 Gabelrahmen mit Rundführung. — Vorteil der Rundführung: Centrierung von Cylinder und Führung durch die Bearbeitung, von der Aufstellung unabhängig.

Abbild. 611.



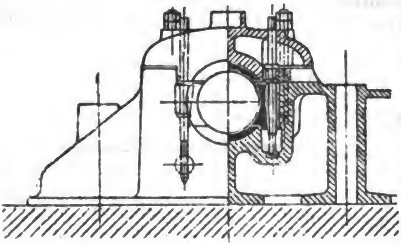
Ausbildung des Rahmens meist in Hohlgufs. Es sind breite Auflagerflächen auszuführen, besonders darf unter dem Kurbellager der Auflagerdruck auf das Fundament durch Gewichte und Kräfte 2 kg f. d. qcm nicht überschreiten. Genaues Aufliegen mufs durch genaue Bearbeitung der Hausteine oder durch Untergiefsen mit Cement erreicht werden. — Druck der Fundamentschrauben im Rahmen durch lotrechte Verrippung oder eingegossene Hülsen aufzunehmen. — Verbindung der Rahmenteile durch Keile oder Schrumpfringe, am zuverlässigsten durch Schrauben.

Abbild. 612.

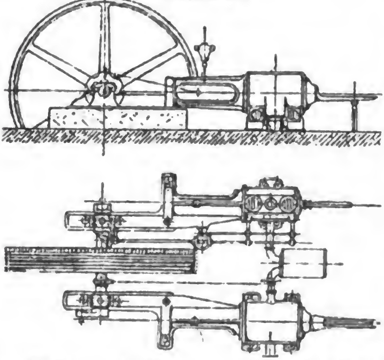


Beispiel eines **Kurbellagers** einer liegenden Dampfmaschine mit

Abbild. 613.



Abbild. 614.



vierfach geteilter Lagerschale und Nachstellbarkeit einer Seitenschale durch Keil Abbild. 612 v. S. Schweres Kurbellager mit Nachstellbarkeit beider Seitenschalen unabhängig vom Deckel, Abbild. 613 (links Abänderung der Konstruktion). Statt vierfacher Teilung der Lagerschale bei kleineren liegenden Dampfmaschinen auch schräge Anordnung des Deckels (wie in Abbild. 611).

Beispiel der **ganzen Anordnung** einer Verbunddampfmaschine mit Rundführung s. Abbild. 614.

d. Dampfzuleitung und -Ableitung.

Dampfzuleitungsrohr vom Kessel zur Maschine möglichst kurz; mit Wärmeschutzmasse zu umhüllen. Gefälle gegen den Kessel. Absperrventil am Kessel und an der Maschine.

Bei gröfseren Leitungslängen besondere **Wasserabscheidung** (mit selbstthätiger Entwässerung) vor der Maschine (durch Querschnittsvergröfserung und infolge dessen Geschwindigkeitsverminderung oder durch Schleuderwirkung bei plötzlicher Richtungsveränderung).

Rohrweite so zu bemessen, dafs die mittlere Dampfgeschwindigkeit $v < 25$ m i. d. Sek. wird (vergl. S. 273). Bei veränderlicher oder plötzlich erfolgender Dampfentnahme ist die Aufstellung eines **Dampfsammlers** (zugleich Wasserabscheiders) vor der Maschine erforderlich, damit der Dampf in den Zuleitungsrohren an den veränderlichen Geschwindigkeiten möglichst wenig Anteil nimmt.

Bei längeren Leitungen **Ausgleich der Wärmeausdehnung** erforderlich (Rohrkniee aus Kupfer oder Schweifseisen, gebogene Kupferrohre in die gerade Leitung eingeschaltet, Stopfbüchsen, Gelenkrohre). Bei den Ausgleichern ist auf den Längenschub durch den Dampfdruck Rücksicht zu nehmen.

Für die **Berechnung langer Dampfleitungen** vergl. S. 273.

Lichtweite des **Dampfableitungsrohres** für eine mittlere Dampfgeschwindigkeit < 15 m i. d. Sek. zu berechnen.

Benutzung des Abdampfes bei Auspuff zu Heizungszwecken unter Berücksichtigung der Erhöhung des Gegendruckes, zur Vorwärmung des Speisewassers u. s. w.

e. Kondensation.

α. Systeme der Kondensatoren.

1. Unvollständige Kondensatoren (ohne Luftpumpe).

Der Kondensator wird durch den einströmenden Abdampf selbst entleert (Letoret), erfordert daher Dampfüberdruck; die unregelmäfsige und unvollständige Luftleere ist nur bei langsam laufenden Maschinen (Wasserhaltungen) auszunutzen. — Ein Strahl unter Druck einströmenden Wassers entfernt den Dampf teils mechanisch, teils durch Kondensation (Strahlkondensatoren, z. B. von Körting). Höhere Luftleere erfordert entsprechenden Ueberdruck des Aufschlagwassers. — Kondensation des Dampfes im Saugrohr einer vorhandenen Pumpe durch Düsen-Apparate ist unsicher und läfst keine höhere Luftleere erzielen, als der Saughöhe der Pumpe entspricht.

2. Oberflächen-Kondensatoren.

Dampf und Kühlwasser getrennt; das Wasser läuft durch ein Rohrsystem, welches vom Dampf umspült wird. — **Hebung des Kühlwassers** gewöhnlich durch Kreiselpumpen. **Entfernung der Kondensationsprodukte** durch eine Luftpumpe (oder durch zwei getrennte Pumpen für Wasser einerseits und Luft und Dampf andererseits). Luftpumpen-Inhalt (wegen Undichtheiten) im Mittel halb so grofs als für Misch-Kondensation (s. S. 720). — Für mittlere Verhältnisse für 1 kg Dampf i. d. Std. 0,02 bis 0,03 qm Kühlfläche und 50 kg Kühlwasser erforderlich. — **Kühlrohre** aus Messing, Durchmesser 20 bis 25 mm, Wandstärke möglichst gering, Entfernung der Rohrmitten von einander 30 bis 35 mm. Kondensationswasser wieder zur Speisung verwendbar.

3. Misch-Kondensatoren mit Parallelstrom.

Unmittelbare Mischung des Dampfes mit dem eingespritzten Kühlwasser, derart, dafs beide in gleicher Richtung sich nach der Abflufsöffnung hin bewegen; die Kondensatorspannung entspricht der gemeinsamen Endtemperatur der Kondensationsprodukte.

Hebung des Kühlwassers möglichst durch unmittelbares Ansaugen durch die Luftleere im Kondensator; bei Saughöhen über durchschnittlich 7 m (unter Einrechnung des Widerstandes längerer Leitungen) ist Zuheben des Einspritzwassers durch besondere Kaltwasserpumpen erforderlich. Bei Hubhöhen über durchschnittlich 15 bis 20 m ist wegen des Arbeitsbedarfs der Kaltwasserpumpe die Kondensation nicht mehr vorteilhaft.

Entleerung des Kondensators durch eine Luftpumpe (s. unten).

Ausschaltung des Kondensators, wenn die Maschine mit Auspuff arbeiten soll, durch Wechselventile. Aber Auspuffbetrieb, wenn

möglich, ganz zu vermeiden, weil beide Betriebsarten verschiedenen Kompressionsbeginn erfordern. Die Steuerung kann dann nur für mittlere Verhältnisse und auch hierfür nur unvollkommen konstruiert werden. — Der Kondensator wird beim Anlassen der Maschine in Thätigkeit gesetzt durch Einleiten von Dampf durch ein kleines Ventil.

Der **Inhalt des Kondensators** wird meist angegeben $\leqq$ Inhalt der (einfach wirkenden) Luftpumpe.

Die **Einspritzwassermenge** von x kg für 1 kg Dampf ergiebt sich näherungsweise unter der Annahme, dafs die Wärmemenge vor und nach der Mischung die gleiche ist, aus $630 + tx = T(1 + x)$ zu

$$x = \frac{630 - T}{T - t},$$

worin t die Temperatur des Einspritzwassers, T die gemeinsame Endtemperatur, 630 der durchschnittliche Betrag der Gesamtwärme von 1 kg Dampf ist. Es ergiebt sich für mittlere Verhältnisse

$x = 25$ bis 30 kg Kühlwasser auf 1 kg Dampf.

Die Kaltwasserpumpe mufs einen Ueberschufs liefern, etwa 30 bis 35 kg Wasser auf 1 kg Dampf. Ueberschufs von wirklich eingespritztem Wasser erhöht die Luftpumpenarbeit und bringt gröfsere Luftmengen in den Kondensator, ist daher unvorteilhaft. Die vorteilhafteste Luftleere ist durch möglichst niedrige Temperatur des Einspritzwassers, feine Verteilung des letzteren, Dichtheit aller Teile und gute Fortschaffung der Kondensationsprodukte anzustreben. — Regelung der Einspritzwassermenge (und Absperrung) durch einen Hahn oder Kegelventil, Zerstäubung im ersteren Falle durch ein Sieb, im letzteren Falle wirksamer durch das Ventil selbst. — Geschwindigkeit des Einspritzwassers im Rohr 1 bis 2, im Ventil 4 bis 5 m i. d. Sek.

4. Misch-Kondensatoren mit Gegenstrom. (F. J. Weifs.)

Unmittelbare Mischung des Dampfes mit dem Kühlwasser, derart, dafs beide in entgegengesetzter Richtung sich bewegen; das Wasser fliefst vom unteren Raume des Kondensators ab, davon getrennt wird Luft- und Dampfgemisch aus dem oberen Kondensatorraum abgezogen. Die Kondensatorspannung entspricht nahezu der Eintrittstemperatur des Kühlwassers.

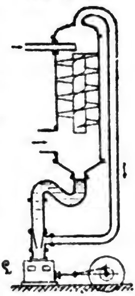
Hebung des Kühlwassers. 1. Durch unmittelbares Ansaugen durch die Luftleere im Kondensator (Abbild. 615); die Kondensationsprodukte werden gemeinsam mitteist nasser Luftpumpe L fortgeschafft. 2. Durch besondere Kaltwasserpumpe P (Abbild. 615a), wenn der Kondensator über die dem Atmosphärendrucke entsprechende Wassersäulenhöhe H gelegt werden kann; das Kondensationswasser fliefst durch Fallrohr F frei ab, Luft- und Dampfgemisch wird durch trockene Luftpumpe L' abgezogen. Etwas bessere Luftleere als bei 1 erreichbar.

Kondensatorraum mit wagerechten Zwischenwänden (Abbild. 615a) oder Schraubenflächen (Abbild. 615) behufs Verminderung der Fallgeschwindigkeit des Kühlwassers zu versehen.

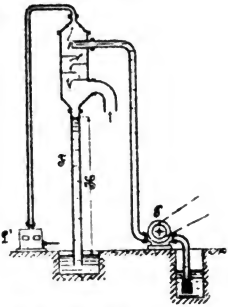
Die **Kühlwassermenge** x für 1 kg Dampf ergiebt sich etwa $= \frac{1}{2}$ derjenigen für Parallelstrom-Kondensation bei gleicher Luftleere, d. i. für mittlere Verhältnisse $x = 15$ bis 20 kg Kühlwasser auf 1 kg Dampf. Demzufolge geringere Leistung der Kondensatorpumpen als bei Parallelstrom erforderlich.

Im übrigen s. **8**.

Abbild 615.



Abbild. 615a.



β. Kondensation mit künstlicher Wasserkühlung.

Ist Wasserbeschaffung für Misch- oder Oberflächenkondensation unzureichend oder zu kostspielig, oder kann das Mischwasser nicht einfach abgeleitet werden, dann läfst sich der Vorteil der Kondensation häufig durch künstliche Wasserkühlung noch erreichen. Letztere kann bewirkt werden durch:

1. **Kühlteiche.** Luftpumpe giefst unmittelbar in den Teich aus, die Kaltwasserpumpe saugt aus diesem wieder an. Einfache Anlage; grofse Flächenausdehnung erforderlich, daher bei Betonierung kostspielig; geringe Kühlwirkung namentlich im Sommer. Für 1 PS 3 qm Kühlfläche.

2. **Gradierwerke mit natürlichem Luftzug** (aus Reisig, Latten, Eisenstäben u. s. w. bestehend). Erforderliche Grundfläche wesentlich kleiner als bei Kühlteichen; grofse Längen- und Höhenausdehnung, dagegen geringe Breite anzunehmen. Höhe $= 8$ bis 10 m. Temperaturerniedrigung abhängig vom Zustand der Atmosphäre und der Kondensationswassermenge. Für 1 PS ungefähr 0,30 qm erforderlich bei 20 bis 30° Abkühlung, 0,10 qm bei 10 bis 15° Abkühlung. Belästigend für die Nachbarschaft ist unter Umständen der sich bildende Dunst und feine Regen.

3. **Gradierwerke mit künstlichem Luftzug** (Klein). Das zu kühlende Wasser fliefst an einer grofsen Zahl lotrechter Bretterwände herunter, wobei Luft durch einen Ventilator entgegengeblasen wird. Notwendige Grundfläche bedeutend vermindert, für 1 PS ungefähr 0,035 qm. Höhe des Gradierwerkes 6 bis 10 m $=$ Druckhöhe für Luft- bezw. Wasserpumpe; künstlicher Zug des Ventilators im Mittel 5 mm Wassersäule. Gesamtarbeitsverbrauch für Wasserhebung und Ventilator 4,5 bis 6% der Dampfmaschinenarbeit.

4. **Drehende Scheiben mit künstlichem Luftzug.** Drehung einer grofsen Zahl parallel auf einer Achse in geringer Entfernung von einander sitzender Metallscheiben, die zu etwa $\frac{1}{3}$ in das zu kühlende Wasser eintauchen; zwischen die Scheiben geblasene Luft erzeugt die für eine wirksame Abkühlung nötige Verdunstung.

In Verbindung mit Mischkondensation wird der Arbeitsaufwand zur Bewegung der Verdunstungstrommel so grofs, dafs Verwendung

der letzteren nicht vorteilhaft (Wassermenge mindestens = 25-fachem Dampfverbrauch der Maschine, auf Einspritztemperatur abzukühlen).

In Verbindung mit Oberflächenkondensation (Theissen) wird der Arbeitsaufwand für Verdunstungstrommel und Ventilator gering, ∾ 2½ % der Dampfmaschinenarbeit. (Wassermenge höchstens = dem einfachen Dampfverbrauch bei konstanter Temperatur für die Abkühlung zu verdunsten).

5. **Streudüsen** (Körting). Bestehen aus einem Kegel, in dessen weitem rückwärtigen Teil eine mehrgängige Schraube steckt, welche unter Druck zugeführtes Wasser während der Ausströmung radial zerschleudert. Düsen in genügend grofser Zahl in einem Behälter anzuordnen, in welchen das abzukühlende Wasser als Sprühregen niederfällt. Notwendige Wasserpressung 15 bis 20 m; stündliche Wasserlieferung einer 15 mm weiten Düse 10,5 bezw. 12,75 cbm, Zerstreuungsfläche 5 bis 7 qm, Abkühlung 30 bis 35°, Wasserlieferung einer 20 mm weiten Düse 14,5 bezw. 18,0 cbm, Zerstreuungsfläche 7 bis 10 qm, Abkühlung 30 bis 38°. Notwendige Grundfläche = der des gewöhnlichen Gradierwerkes mit natürlichem Luftzug, dagegen stärkere Abkühlung. Anlage kostspielig; Pumpenarbeit ungefähr 3 bis 4 % der Dampfmaschinenleistung.

γ. Luftpumpe.

Die nasse Luftpumpe mufs Kondensationswasser, Einspritzwasser, Luft und den entsprechend der Kondensator-Temperatur sich entwickelnden Dampf fortschaffen.

1. Bei Parallelstrom-Kondensation erfordern S kg Dampf im Mittel 25 S kg Einspritzwasser, welches im Mittel auf 1 kg 0,07 l Luft mechanisch gebunden enthält.

Kondensatorspannung besteht aus den Spannungen dieser Luft und des Dampfes im Kondensator, letztere entsprechend der Mischungstemperatur. Bei 0,1 Atm. Kondensatorspannung, 25° Temperatur-Erhöhung und 35° Mischungstemperatur (0,055 Atm. Dampfspannung) ist also an Luft und Dampf fortzuschaffen:

$$0{,}07 \cdot 25\,S \cdot \frac{1}{0{,}1 - 0{,}055} \cdot (1 + 0{,}00367 \cdot 25) \sim 42\,S \text{ l i. d. Sek.};$$

hierzu an Wasser 26 S, also zusammen bei S kg i. d. Sek. Dampfverbrauch rd. 70 S l i. d. Sek.

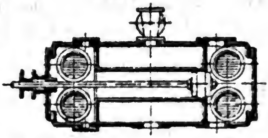
Der Luftpumpendurchmesser D bei dem Hub s (beide in Decimeter) ergiebt sich daher aus $70\,S = i\mu \frac{\pi D^2}{4}\, s\, \frac{n}{60}$, wobei $i = 1$ oder 2, je nachdem einfach- oder doppeltwirkende Pumpe, der Lieferungsgrad $\mu \sim 0{,}7$. — Arbeitsbedarf der Luftpumpe auf etwa 5 % der Maschinenarbeit zu veranschlagen.

2. Bei Gegenstrom-Kondensation erfordern S kg Dampf im Mittel 15 S kg Einspritzwasser. Es vermindert sich mit nasser Luftpumpe die Luft- und Dampfmenge und demnach die gesamte fortzuschaffende Menge sowie der Arbeitsbedarf der Luftpumpe etwa im Verhältnis 3 : 5 (genauer 41 : 68).

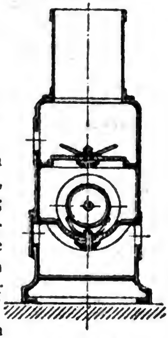
Die trockene Luftpumpe bei Gegenstrom-Kondensation hat nur Luft und Dampf fortzuschaffen.

Bei 20° Absaugetemperatur, 15° Eintrittstemperatur des Kühlwassers (Dampfspannung bei 20° = 0,023 Atm.) $= 0{,}07 \cdot 15\,S \cdot \frac{1}{0{,}1 - 0{,}023}\,(1 + 0{,}00367 \cdot 5) \sim 15\,S$ l i. d. Sek. fortzuschaffende Menge.

Abbild. 616.



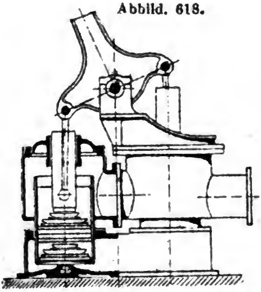
Abbild. 617.



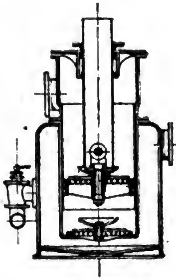
Aufstellung der Luftpumpe bei liegenden Maschinen am einfachsten hinter der Maschine, von der durchgehenden Kolbenstange unmittelbar angetrieben. Sonst Antrieb von der rückwärtigen Kolbenstangenführung aus mit Hebelübertragung, von der Schwungradwelle oder vom Kreuzkopf aus; in diesem Falle ist der Hub des Luftpumpenkolbens möglichst klein auszuführen, um die Beschleunigung zu vermindern und genügenden Kolbenquerschnitt für die Unterbringung der Ventile zu erhalten.

Einzelheiten der nassen Luftpumpen: Wenn liegend, meist mit doppelter, wenn stehend, meist mit einfacher Wirkung. —

Abbild. 618.

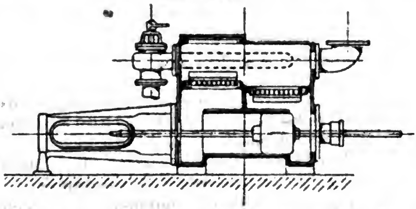


Abbild. 619.



Für gutes Dichthalten ist es vorteilhaft, wenn Kondensator und Luftpumpe von einem Behälter mit dem Kühlwasser umgeben sind.

Abbild. 620.



Ventile meist runde oder viereckige Gummiklappen. Ventilquerschnitt für eine Wassergeschwindigkeit < 2 m i. d. Sek. so zu berechnen, als wäre der ganze Cylinderinhalt mit Wasser ausgefüllt. Anordnung der Ventile vorteilhaft so, daſs das durchtretende Wasser stets der Luft einen Teil des Querschnittes freiläſst, oder besondere Ventile für die Luft. —

Triebwerk auf geringe Zugbeanspruchung (< 300 kg f. d. qcm) und Auflagerdruck der Zapfen (< 20 kg f. d. qcm) zu rechnen.

Beispiele von liegenden doppeltwirkenden Luftpumpen Abbild. 616, 617 und 620. In Abbild. 617 und 620 (Längsschnitt teils durch Saug-, teils durch Druckraum) viereckige Gummiklappen,

in Abbild. 620 Saugklappe hängend, in Abbild. 616 je zwei runde Klappen. Abbild. 619 stehende einfachwirkende Luftpumpe mit runden Gummiklappen und Ventilkolben, Abbild. 618 Vereinigung zweier ebensolcher.

IV. DAMPFKESSEL.

Besondere Angaben über Lokomotivkessel s. Abteil. II. S. 137 u. f., über Schiffskessel s. Abteil. II. Zwölfter Abschnitt, Schiffbau.

Bezeichnungen.

T = Verbrennungstemperatur des Brennstoffes auf dem Rost,

T_1 = Temperatur, mit welcher die Heizgase die Feuerzüge des Kessels verlassen,

t_0 = Temperatur des Speisewassers,

t = Temperatur des Wassers im Kessel,

W = absoluter Heizeffekt des Brennstoffes in WE. f. d. kg. (s. S. 291); hierbei kann der Wärmeverlust durch Abkühlung — für Einzelkessel 5%, für Batteriekessel 8% — von vornherein abgezogen werden,

λ_0 = Wärmemenge in WE., die zur Erzeugung von 1 kg Dampf von t^0 aus Wasser von $t_0{}^0$ erforderlich ist,

R = Gesamt-Rostfläche in qm, R_f = freie Rostfläche in qm,

m = Verhältnis der freien zur gesamten Rostfläche,

H = Heizfläche des Kessels in qm,

B = stündlich von der Kesselanlage verzehrte Brennstoffmenge in kg,

D = stündlich erzeugte Dampfmenge in kg,

L = Luftmenge, die zur Verbrennung von 1 kg des Brennstoffes praktisch erforderlich ist, in kg, s. S. 293 u. f.,

F = Raumbeanspruchung des Kessels f. 1 qm Heizfläche, in qm,

V = verdampfende Oberfläche f. 1 qm Heizfläche, in qm,

J_w = Wasserinhalt des Kessels f. 1 qm Heizfläche, in l,

J_d = Dampfinhalt des Kessels f. 1 qm Heizfläche, in l,

η = Wirkungsgrad der Kesselanlage,

η_1 = 0,8 bis 0,9 der Wirkungsgrad der Feuerung, s. S. 294,

η_2 = Wirkungsgrad der Heizfläche,

c = 0,24 die specifische Wärme der Heizgase bei konstantem Druck, s. S. 286,

σ = 0,2 bis 0,3 das Ausstrahlungsverhältnis, s. S. 294,

v = Geschwindigkeit der durch die Rostspalten ziehenden Luft, in m i. d. Sek.,

k = Wärmedurchgangskoefficient d. i. diejenige Wärmemenge, welche i. d. Std. durch 1 qm Heizfläche und für 1° C Temperaturunterschied zwischen dem Gase und dem Wasser übertragen wird, i. M. $k = 23$.

A. Allgemeine Angaben.

a. Berechnungen.

1. **Verbrennungstemperatur** T auf dem Rost bei 0° Temperatur der Luft im Kesselhause: $T = \eta_1 \dfrac{(1-\sigma)\,W}{(1+L)\,c}$.

2. **Heizfläche** H. Zur ungefähren Bestimmung der erforderlichen Heizfläche der Kesselanlage dienen folgende Angaben:

Bei einer stündlich zu erzeugenden Dampfmenge von D kg (mit 600 WE. Erzeugungswärme entsprechend etwa 50° Speisewasser-Temperatur und 5 Atm. Dampfüberdruck) ist, wenn auf 1 qm der Rostfläche R i. d. Std. 80 kg Steinkohlen von $W = 7500$ absolutem Heizeffekt verbrannt werden:

bei $H:R = 20$	25	30	40	50	60	70
$D:H = 25$	22,5	20	16	14	12	10,

woraus H zu ermitteln.

Genauer ist, wenn gesetzt wird $\dfrac{B(1+L)c}{k} = \Theta$:

	nach Redtenbacher: (Wärmedurchgang proportional dem Temperaturunterschied.)	nach Werner: (Wärmedurchgang proportional dem Quadrate des Temperaturunterschiedes.)
Heizfläche $H =$	$\Theta \ln \dfrac{T-t}{T_1-t}$; ($k = 23$.)	$\Theta \dfrac{T-T_1}{(T_1-t)(T-t)}$. ($k = 0{,}0603$.)
Endtemperatur der Heizgase $T_1 =$	$t + (T-t)\, e^{-\frac{H}{\Theta}}$;	$T - \dfrac{\frac{H}{\Theta}(T-t)^2}{1+\frac{H}{\Theta}(T-t)}$.
Wirkungsgrad der Heizfläche $\eta_2 =$	$1 - e^{-\frac{H}{\Theta}}$;	$1 - \dfrac{1}{1+\frac{H}{\Theta}(T-t)}$.

$$\eta_2 = \sigma + (1-\sigma)(1 - T_1 : T).$$

Für feststehende Kessel wird $\eta_2 = 0{,}61$ bis $0{,}87$,
für Lokomotiven . . . . . . $\eta_2 = 0{,}65$ bis $0{,}75$.
Der Wirkungsgrad der Kesselanlage ist $\eta = \eta_1 \eta_2$.

3. **Anstrengungsgrad der Feuerung** $B:H$. Je kleiner $B:H$, desto besser ist die Ausnutzung der Wärme, d. h. desto gröfser ist der Wirkungsgrad η_2 der Heizfläche (s. u. 2). Er richtet sich daher nach dem Preise des Brennstoffes an der Betriebsstätte und danach, ob eine Steigerung des Betriebes vorauszusetzen ist oder nicht.

Werte von $B:H$.

	Art der Verbrennung: sehr langsam.	langsam.	normal.	lebhaft.
Steinkohlen . . .	1	2	3	5
Beste Braunkohlen	3,33	5,55	8,75	12,85

4. **Leistung des Brennstoffes.** Die von 1 kg Brennstoff erzeugte Dampfmenge (in kg) beträgt mit den Bezeichn. v. S. 722:

$$\frac{D}{B} = \eta_1 \eta_2 \frac{W}{\lambda_0} = \eta \frac{W}{\lambda_0}.$$

Wird $\lambda_0 = 600$ WE. gesetzt, so ergeben sich je nach dem Anstrengungsgrade und dem Heizwerte des Brennstoffes folgende

Werte von $D:B$.

Steinkohle . . .	5,5 bis 10	Holz	2,5 bis 3,5
Koks	4,5 „ 8	Stroh	1,5 „ 2,0
Braunkohle . . .	2,0 „ 4,5	Lohe	1,0 „ 1,1
Torf	1,5 „ 3,0		

Genauer ist $\lambda_0 = \lambda - q_0 + (t - t_0) w$, worin λ die Gesamtwärme (s. S. 255), q_0 die der Speisewasser-Temperatur t_0^0 entsprechende Flüssigkeitswärme, w die mit 1 kg Dampf übergerissene Wassermenge in kg (3 bis 6 $\frac{0}{0}$, bei Lokomotiven 20 $\frac{0}{0}$).

5. **Vorwärmer.** Die Heizfläche H_v eines Vorwärmers, welcher die Heizgas-Temperatur von T_1 auf T_2 ausnutzt und das Speisewasser von t_0 auf t_1 vorwärmt, ergiebt sich aus:

$$\frac{H_v}{D} = \frac{2(t_1 - t_0)}{k(T_1 + T_2 - t_1 - t_0)} \left(\text{genauer} = \Theta \ln \frac{T_1 - t_1}{T_2 - t_1}\right).$$

Hierbei ist der Wärmedurchgangskoefficient $k = 12$ bis 18 für solche Vorwärmer, welche einen untrennbaren Teil des Dampfkessels bilden und gut von innen und aufsen zu reinigen sind, $k = 10$ bis 15 für Greensche Economiser (aus gufseisernen Rohren mit selbstthätigen Schrapern); $k = 5$ für Economiser ohne Schraper.

Vorwärmung des Wassers auf 80 bis 100° (sogar 130°) möglich; dabei durchschnittlich $T_2 = 150°$. Bei wirksamen Vorwärmern sei nach Grove $H_v = \frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{2} H$; der Fassungsraum sei das 0,5- bis 1,25-fache des stündlich erforderlichen Speisewassers.

(Die Rohre der Greenschen Economiser rosten stark am unteren Ende, wo Speisewasser eintritt, namentlich wenn letzteres kalt ist.

Die meistens liegend angeordneten schweifseisernen Vorwärmer von mindestens 500 mm Durchmesser werden im Inneren stark angefressen. Schützend wirkt Beizen der Bleche von Haus aus und gründliches Streichen mit Mennige nach jeder Reinigung.)

6. **Ueberhitzer.** Für die Heizfläche der Ueberhitzer ist aufser der Menge des zu überhitzenden Dampfes dessen Gehalt an mitgerissenem Wasser zu berücksichtigen, welches verdampft werden mufs, wozu für 1 kg (606,5—0,717 t) WE. erforderlich sind. Zur Ueberhitzung des trockenen Dampfes um 1° C 0,475 WE. nötig (s. S. 287).

Nach Hirn ist hier $k = 10$ bis 15 WE. für 1 qm Ueberhitzungsfläche (Gufseisenrohre), f. d. Std. und 1° Temperaturunterschied.

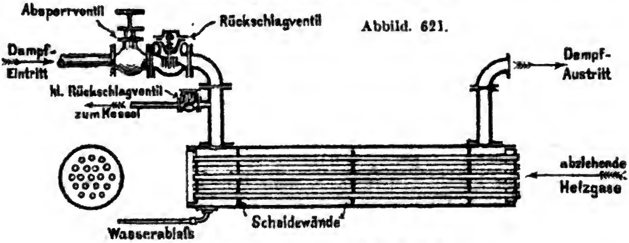
Der Vorteil der Ueberhitzer berechnet sich:

1. aus dem Nachverdampfen des übergerissenen Wassers,
2. aus der Raumvergröfserung des dem Kessel entnommenen und des aus dem übergerissenen Wasser gebildeten Dampfes.

Beim Maschinenbetrieb kommt hierzu die Aufhebung des Niederschlages im Cylinder und die daraus folgende Erhöhung des mittleren Dampfdruckes. — Für Maschinenbetrieb soll die Temperatur des Dampfes nicht über 200° C betragen.

Abbild. 621 zeigt einen neueren Ueberhitzer, Konstruktion Gehre, der liegend und stehend angeordnet werden kann.

Abbild. 621.



b. Feuerung der Dampfkessel.

Die auf 1 qm Rostfläche i. d. Std. verbrannte Brennstoffmenge beträgt: $\frac{B}{R} = \frac{4680\, m v}{L}$ (Bezeichn. s. S. 722).

Die Geschwindigkeit v der durch die Rostspalten ziehenden Luft beträgt für Steinkohlen je nach dem Anstrengungsgrade (oder der Schichtendicke) 0,75 bis 1,6 m, bei künstlichem Luftzuge (Lokomotiven) bis zu 4 m i. d. Sek.

1. Die gewöhnlichen Werte von $B : R$ für Steinkohlenfeuerung s. Tafel a. S. 726. Für Koks rechne man $\frac{2}{3}$, für Braunkohlen das 1,5- bis 2,5-fache, für Holz und Torf das 1,33-fache dieser Werte.

2. Das Verhältnis m der freien zur gesamten Rostfläche sei möglichst grofs; man findet gewöhnlich:

bei Steinkohlen . . $m = \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ | bei Koks . . . . . . $m = \frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$
bei Braunkohlen . . $m = \frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{3}$ | bei Holz, Torf . . . $m = \frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{5}$

3. Höhe des Rostes über Fufsboden Kesselhaus 600 bis 750 mm, Entfernung des Rostes von der Kesselfläche nicht unter 350 mm, im allgemeinen 500 bis 600 mm. Ueber Roststäbe s. S. 780.

Entfernung der Oberkante Feuerbrücke vom Kessel mindestens 250 mm, Feuerbrücke normal zur Rostfläche gerichtet.

c. Heizkanäle.

Gemauerte Heizkanäle müssen so angelegt sein, dafs sie 1) eine lange und innige Berührung der Heizgase mit der Kesselheizfläche und 2) ein Befahren behufs Reinigung und Besichtigung der Kesselwandungen ermöglichen. Zur Erreichung der unter 1) gestellten Forderung ist Einbau von Kulissen in Entfernungen von 1,5 bis 2 m, oder Führung der Heizgase in Schlangenlinien um den Kessel zu empfehlen, s. Abbild. 624, 625 u. 626 a. S. 735.

Die Geschwindigkeit der Heizgase in den gemauerten Feuerzügen soll bei natürlichem Luftzuge nicht über 6 m, besser nur 3 bis 4 m i. d. Sek. betragen; gleiche Geschwindigkeit überall nicht erforderlich.

Dementsprechend ist im allgemeinen, bei Anordnung von drei gemauerten Feuerzügen und bei einer Beanspruchung der Rostfläche von 60 bis 120 kg Kohle i. d. Std. und f. d. qm, der Querschnitt des

(Fortsetzung a. S. 728.)

Tafel über Feuerung und Heizfläche der Dampfkessel. (Steinkohlen-Feuerung.)

Art der Verbrennung.	In 1 Stunde: 1 qm Heizfläche verbraucht Kohle (kg) (Anstrengungsgrad der Feuerung). $B:H$	In 1 Stunde: 1 qm Rostfläche verbrennt Kohle (kg). $B:R$	Verhältnis der Heizfläche / Rostfläche $H:R$	Zugeführte Luftmenge für 1 kg Brennstoff L (kg)	Wirkungsgrad der Feuerung. η_1	Verbrennungstemperatur (in Graden C). T	Temperatur der Heizgase im Fuchs (in Gr. C). T_1	Wirkungsgrad der Heizfläche. η_2	Wirkungsgrad der Kesselanlage. η $(=\eta_1\eta_2)$	Des Kessels Leistung; 1 kg Brennstoff erzeugt Dampf (in kg) $D:B$ ohne Vorwärmer	$D:B$ mit Vorwärmer	Des Kessels Anstrengung; 1 qm Heizfläche erzeugt Dampf (in kg) i. d. Std. $D:H$ ohne Vorwärmer	$D:H$ mit Vorwärmer	Art der Feuerungsanlage.
Feststehende Kessel. — sehr langsam (sehr teuerer Brennstoff; nur ausnahmsweise zu wählen)	1	40 bis 50 (50)	40 bis 50 (50)	22,0	0,90	856	169	0,862	0,776	8,95	10,01	8,95	10,01	Innenfeuerung; $\sigma=0,3$.
						978	170	0,861	0,775	8,94	10,00	8,94	10,00	Unterfeuerung; $\sigma=0,2$.
						1223	174	0,858	0,762	8,79	9,83	8,79	9,83	Vorfeuerung; $\sigma = 0$.
langsam (für neue Anlagen unter gew. Verhältnissen)	2	50 bis 70 (50)	25 bis 35 (25)	20,5	0,85	865	233	0,811	0,689	7,95	8,89	15,90	17,78	desgl. w. o.
						988	246	0,801	0,681	7,86	8,78	15,72	17,56	
						1235	272	0,780	0,663	7,65	8,55	15,30	17,10	
normal	3	70 bis 100 (75)	23 bis 33 (25)	19,0	0,85	930	314	0,764	0,649	7,49	8,37	22,47	25,11	desgl. w. o.
						1062	341	0,743	0,631	7,28	8,14	21,84	24,42	
						1328	394	0,713	0,596	6,88	7,69	20,64	23,07	
lebhaft (gesteigerter Fabrikbetrieb; Lokomobilen)	5	100	20	17,5	0,80	946	434	0,679	0,543	6,27	7,00	31,35	35,00	desgl. w. o.
						1081	482	0,643	0,514	5,93	6,63	29,65	33,15	
						1351	586	0,567	0,454	5,24	5,86	26,20	29,30	

Schiffskessel, nat. Zug	3—3,5	85 bis 95	28	17,5	0,80	946	319 bis 358	0,821 bis 0,770	0,657 bis 0,616	7,17 bis 6,73	—	21,05 bis 24,56	—	$\sigma = 0,3$
Schiffskessel, mäfsiger Unterwind	4	130 „ 140	33				391	0,728	0,582	6,36	—	25,44	—	
Kessel von Gebirgs-Lokomotiven	5—6	350—500 (400)	70 bis 100	15	0,80	1094	374 bis 431	0,76 bis 0,724	0,609 bis 0,579	6,81 bis 6,43	—	34,04 bis 38,57	—	
Kessel von Güterzug- „	6—8		50 bis 70				431 bis 527	0,724 bis 0,663	0,579 bis 0,532	6,43 bis 5,92	—	38,57 bis 47,36	—	
Kessel von Personenzug- „	8—10		35 bis 55				527 bis 591	0,663 bis 0,622	0,532 bis 0,497	5,92 bis 5,46	—	47,36 bis 54,6*)	—	

Bemerkung. Vorstehende Tafel ist berechnet nach den Formeln s. S. 722 u. f. für mittlere westfälische Steinkohle ($0,766\,C + 0,041\,H + 0,163\,H_2O + 0,030$ Asche) mit einem absoluten Heizeffekt $W = 7500$. Die Wärmeverluste der Abkühlungsfläche sind nicht berücksichtigt (5 bis 8 $\frac{0}{0}$). Die theoretisch erforderliche Luftmenge beträgt $L = 10,4$ kg für 1 kg Kohle. Dampftemperatur $t = 158^0$ (bei Schiffskesseln und Lokomotiven $188^0 = 10$ Atm. Ueberdruck). Wassergehalt des Dampfes 5 $\frac{0}{0}$, bei Lokomotiven 20 $\frac{0}{0}$. Speisewassertemperatur $t_0 = 10^0$, bei Vorwärmern 80^0; bei Lokomotiven ist die durch die Wirkung der Injektoren erzeugte Vorwärmung des Speisewassers hier nicht zu berücksichtigen. Temperatur der äufseren Luft $T_0 = 0^0$. Specifische Wärme der Heizgase $c = 0,24$. Wärmedurchgangs-Koefficient $k = 23$, für Lokomotiven $k = 30$. Die eingeklammerten Zahlen sind Mittelwerte.

---

*) Die normalen Personenzug-Lokomotiven der preufs. Staatsbahnen ergaben . . . . $D:H = 54$ bis 58.
Für Schnellzug-Lokomotiven steigt . . . . $D:H$ bis 65.

letzten Zuges = 0,25 der Rostfläche, der erste = 1,5 bis 1,75, der zweite = 1,25 bis 1,5 des letzten Zuges. Ausgenommen sind hiervon diejenigen Stellen, wo auf kurzer Weglänge Verengungen der Querschnitte bis auf $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{10}$ der Rostfläche stattfinden, z. B. an den Feuerbrücken oder eingebauten Kulissen u. s. w., ferner bei den aus engen Heizrohren gebildeten Feuerzügen s. S. 739. Umgekehrt sind die oben angeführten Querschnitte da zu vergröfsern, wo Richtungsänderung der Heizgase erfolgt.

Bezeichnet: $B:R$ die stündlich f. d. qm Rostfläche zur Verbrennung kommende Kohlenmenge in kg,

r den, der zugehörigen Temperatur entsprechenden Raum der aus einem kg Kohle gebildeten Gasmenge, s. S. 293,

a das Verhältnis des Zugquerschnitts zur gesamten Rostfläche, so ist die Geschwindigkeit der Heizgase in den Zügen:

$$v_g = \frac{B}{R}\,\frac{r}{3600\,a}.$$ Ueber Kesselmauerung s. S. 778.

d. Schornsteine.

1. Bezeichnet:

O den lichten Querschnitt der oberen Schornsteinmündung in qm,
d den lichten Durchmesser (bei quadratischem Querschnitt dessen Seite, bei achteckigem den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises) der oberen Schornsteinmündung in m,
h die Höhe der letzteren über dem Rost in m,
R die Rostfläche der Kesselanlage in qm,
B die i. d. Std. von der Kesselanlage verzehrte Brennstoffmenge in kg,

so ist nach von Reiche, unter Berücksichtigung einer etwaigen zukünftigen Betriebsvergröfserung von etwa 30%:

$$d = 0{,}1\left(\frac{B}{R}\cdot R\right)^{0,4} = 0{,}1\,B^{0,4}; \qquad h = 0{,}00277\left(\frac{B}{R}\right)^2 + 6\,d.$$

Die **Druckhöhe**, unter welcher die Luft bei einem solchen Schornstein in die Rostspalten strömt, beträgt in mm Wassersäule:

$$h_\delta = (h - 6\,d)\,\frac{1000}{2{,}93}\left(\frac{1}{273 + T_0} - \frac{1}{273 + T_1}\right),$$

worin T_0 die Temperatur der äufseren Luft ($\sim 0^0$), T_1 die konstant gedachte Schornsteintemperatur = der Fuchstemperatur ($\sim 200^0$).

Schornsteinabmessungen für Steinkohlenfeuerung.

	Für $B:R=$	40	60	80	100
Bei:	$h_\delta =$ mm Wassersäule	2,3	5,3	9,4	14,6
$R=1$	$\dfrac{\text{Schornsteinhöhe}}{\text{Durchm. der Mündung}} = \dfrac{h}{d} =$	16	26	37	50
4		12	17	24	34
20		9	12	16	19
$R=1$	$\dfrac{\text{Rostfläche}}{\text{Querschnitt der Mündung}} = \dfrac{R}{O} =$	6,7	4,8	3,8	3,2
4		8,8	6,3	5,0	4,2
20		12,1	9,4	7,0	5,8

Bei **Ueberschlagsrechnungen** nehme man $h = 25\,d$ (wenn $R \gtreqless$ 15 qm), worin d sich aus folgender Tafel ergiebt:

$B:R=$	40	60	80	100	für westfälische Steinkohle,
$R:O=$	6	5	4	4	
$B:R=$	100	200	300	450	für beste Anhalter Braunkohle,
$R:O=$	7	6	5	4	

oder auch für Steinkohlenfeuerung bei 3 m i. d. Sek. Ausströmungsgeschwindigkeit der Heizgase aus dem Schornstein und einer Temperatur von $\sim 250^0$ C:

$$d = 0{,}06\sqrt{B} \text{ und } h = 25 \text{ bis } 30\,d.$$

Die geringste Schornsteinhöhe sei 16 m. Schornsteine, die ohne Gerüst (von innen) gebaut werden, müssen oben mindestens 0,6 m lichte Weite haben.

Für **gemauerte** Schornsteine sei der untere lichte Durchmesser:

$$d_1 = d + 0{,}02\,h;$$

falls die Standfähigkeit (s. u. **3.**) dann nicht genügt, vergröfsere man d entsprechend, unter Beibehaltung sämtlicher Wandstärken.

2. Obere **Wandstärke** = 12,5 cm, wenn $d < 1$ m, 15 cm, wenn $d > 1$ m, 20 cm, wenn $d > 1{,}5$ m und 25 cm, wenn $d > 2$ m.

Die Wandstärke nimmt bei den runden Schornsteinen (aus Formsteinen) meistens alle 5 m um 5 cm, oder alle 6 m um 6,5 cm zu.

Sind D und D_1 die äufseren Durchmesser der Säule oben und unten, h_s die Höhe der Säule in m, so soll sein:

$$\frac{D_1 - D}{h_s} = 0{,}038 \text{ bis } 0{,}04.$$

Form des Querschnittes. Bei runden Schornsteinen ist der Einflufs des Winddruckes am geringsten, die drehende Rauchbewegung am wenigsten gehindert und wegen des kleinsten Umfanges die verlorene Wärmemenge und das erforderliche Mauerwerk am geringsten; doch sind Formsteine verschiedener Art nötig. Achteckiger Querschnitt steht dem runden kaum nach und ist mit weniger Formsteinen ausführbar, viereckige Form ist nicht zu empfehlen.

Die **Mündung** der Säule darf nur mit leicht ausgekragtem Kapitäl versehen werden; über diesem ist noch ein glattes cylindrisches Rohrstück von 0,5 m Höhe aufzusetzen.

Das **Schornsteinrohr** reiche 0,6 bis 0,8 m unter die Sohle des Fuchses. Münden mehrere Füchse in den Schornstein, so sind sie durch eingemauerte Zungen so zu trennen, dafs die Heizgase bei ihrer Vereinigung gleiche Richtung haben.

Sockel, vier- oder achteckig, nicht höher als unbedingt nötig. Breite des Sockels $= D_1 + 1{,}0$ m.

3. Statische Berechnung des Schornsteins auf Druck (durch Eigengewicht) und Biegung (durch Winddruck) für mehrere Querschnitte durchzuführen (s. S. 358). Ueber die Gröfse des Winddruckes s. S. 278, insbesondere auch die Fufsnote daselbst.

Die Untersuchung erstreckt sich auf die Ermittlung etwaiger Zugspannungen und der gröfsten Kantenpressung (kleiner als die zulässige Druckspannung k des Mauerwerks, s. S. 310), u. zw. auch ohne die Möglichkeit einer Zugübertragung.

Kernlinie für verschiedene Schornsteinquerschnitte s. S. 357. Blofse Untersuchung des Verhaltens gegen Kippen durchaus ungenügend.

Mittlere Belastung des Baugrundes $k' = 0{,}75$ bis 1,5 kg f. d. qcm, dabei gröfste Kantenpressung in Fundamentsohle = 2,5 bis 5 kg f. d. qcm bei gewachsenem Boden.

Bei schlechtem Baugrunde ist eine Betonschicht von 0,75 bis 1,25 m Höhe oder ein Pfahlrost (mit Betondecke; vergl. Abteil. II. S. 286) zu empfehlen.

4. Stehende Blechschornsteine (bei schlechtem Baugrunde, beschränkter Bauzeit oder vorübergehender Anlage) erhalten kegelförmige Schüsse von 3 bis 5 mm oberer, 6 bis 8 mm unterer Dicke je nach Durchmesser und Höhe. Untere Blechdicke $\delta = 0{,}00025\,h + 3$ mm. Der obere Schufs greift über den unteren. Durchmesser des Schornsteins oben und unten gleich. Die Standfähigkeit wird durch Spannketten (Stagen) erzielt. Der gufseiserne Fundamentrahmen ist mit dem Sockel in den Ecken durch Ankerbolzen, mit dem Schornstein selbst durch Winkelring und Schrauben zu verbinden.

5. Lokomobil-Schornsteine erhalten einen Durchmesser = 1 bis 1,5 × Cylinderdurchmesser, eine Höhe = 6 bis 7 × Schornsteindurchmesser.

6. Lokomotiv-Schornsteine s. Lokomotiven, Abteil. II. S. 144.

e. Wasser-, Dampf- und Speiseraum.

1. Wasserraum. Der Wasserraum sei möglichst grofs bei fortwährendem Betriebe, ferner, wenn zuweilen auf kurze Zeit grofse Dampfmengen verlangt werden; er sei möglichst klein, wenn der Betrieb öfter und länger unterbrochen wird, oder wenn möglichst schnell der nötige Druck erzeugt werden mufs.

2. Dampfraum. Er befreit den Dampf von mitgerissenem Wasser, ist daher grofs bei oft und plötzlich gesteigerter Dampfentnahme zu machen.

Auf die Menge des mitgerissenen Wassers ist auch die Gröfse des Wasserspiegels (verdampfende Oberfläche) von Einflufs. Walzenkessel, Flammrohr- und mehrfache Walzenkessel liefern 40 bis 100 kg Dampf stündlich für 1 qm Wasserspiegel; der Dampf enthält 3 bis 6% Wasser bei normaler Beanspruchung eines Kessels.

Höhere Dampferzeugung für 1 qm Wasserspiegel bewirkt zunehmende Dampffeuchtigkeit und erfordert Wasserabscheider oder Ueberhitzer.

Der Dampfdom bezweckt die Entnahme des Dampfes an einem möglichst hoch gelegenen Punkte des Kessels und dient gleichzeitig zur Anbringung der Sicherheitsventile.

Die Dampfentnahme aus dem Kessel erfolgt nicht unmittelbar unter dem Dampfdom, sondern, mit Ausnahme des vorderen Drittels, gleichmäfsig aus dem Dampfraum des ganzen Kessels heraus mit Hülfe eines Dampfentnahmerohres, eines im Scheitel des Kessels befestigten, durchlöcherten oder oben geschlitzten Rohres. Querschnitt des Dampfentnahmerohres, sowie Querschnitt seiner Löcher oder seines Schlitzes = dem doppelten Querschnitt der Dampfentnahme-Ventile.

3. Uebliche Gröfsenverhältnisse für Wasser- und Dampfräume.

1. Aufsenfeuerungskessel.

(Walzen- und mehrfache Walzenkessel).

Durchmesser =	800	900	1000	1100	1200	1300	mm
Höhe des Dampfraumes . .	270	300	330	360	390	420	mm
Inhalt des Dampfraumquerschnitts	0,15	0,187	0,228	0,272	0,321	0,375	qm
Inhalt des Wasserraumquerschnitts	0,3527	0,45	0,5576	0,678	0,81	0,953	qm
Breite der verdampfenden Oberfläche	755	845	940	1035	1125	1210	mm
Maueranschlufs über Kesselmitte	30	50	70	90	110	130	mm

2. Innenfeuerungskessel (Zweiflammrohrkessel).

Mantel-Durchm.	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	mm
Flammrohr-Durchm.	600	600	650	700	750	750	800	850	mm
Höhe des Dampfr.	420	460	475	505	535	590	620	650	mm
Inh. d. Dampfr.qu.	0,423	0,5	0,54	0,602	0,678	0,799	0,876	0,966	qm
Inh. d. Wasserr.qu.	1,022	1,2	1,34	1,464	1,58	1,781	1,92	2,054	qm
Flrm. u. Kesselm.	80	90	100	115	130	145	160	175	mm
N. W. ü. Flammr.	160	180	200	210	220	230	240	250	mm
Br. d. verd. Oberfl.	1,4	1,5	1,585	1,7	1,76	1,885	2,0	2,075	m

3. **Einflammrohrkessel** (ausschl. Wellrohrkessel).

Mantel-Durchmesser / Flammrohr-Durchmesser =	1400 / 700	1500 / 750	1600 / 800	1700 / 850	1800 / 900	mm / mm
Höhe des Dampfraumes	340	365	390	415	440	mm
Inhalt d. Dampfraumquerschn. .	0,2875	0,335	0,378	0,43	0,482	qm
Inhalt d. Wasserraumquerschn. .	0,867	0,99	1,13	1,272	1,427	qm
Flammrohrmitte unt. Kesselm. .	140	150	160	170	180	mm
Niedr. Wasserst. ü. Flammrohr .	150	160	170	180	190	mm
Breite d. verdampf. Oberfläche .	1,215	1,275	1,385	1,46	1,55	m

4. **Normale Seitrohrkessel mit gewellten Feuerrohren.**

Mantel-Durchmesser / Flammrohr-Durchmesser =	2200 / 1250:1350	2000 / 1100:1200	1800 / 950:1050	1600 / 800:900	mm / mm
Höhe d. Dampfraumes	425	360	330	330	mm
Inhalt d. Dampfraumqu.	0,570	0,440	0,360	0,300	qm
Inhalt d. Wasserraumqu.	1,910	1,660	1,340	1,150	qm
Breite d. verd. Oberfläche	1740	1535	1395	1300	mm
Heizfl. f. d. lfd. m Kessell.	8,500	7,200	6,660	5,720	qm

4. Der **Speiseraum** ist der Raum zwischen dem zulässig höchsten und niedrigsten Wasserstande; er sei grofs bei veränderlichem Dampfverbrauch, überhaupt bei grofsem Wasserraum, um dessen Eigenschaften auszunutzen.

5. Das Gewicht eines Dampfkessels erhält man annähernd richtig, wenn man zu dem aus den reinen Abmessungen ermittelten Gewichte noch 20 bis 25% hinzufügt für Ueberblattungen, Winkeleisen, Laschen, Nietköpfe u. s. w. Tragpratzen und Stutzen bestimme man besonders.

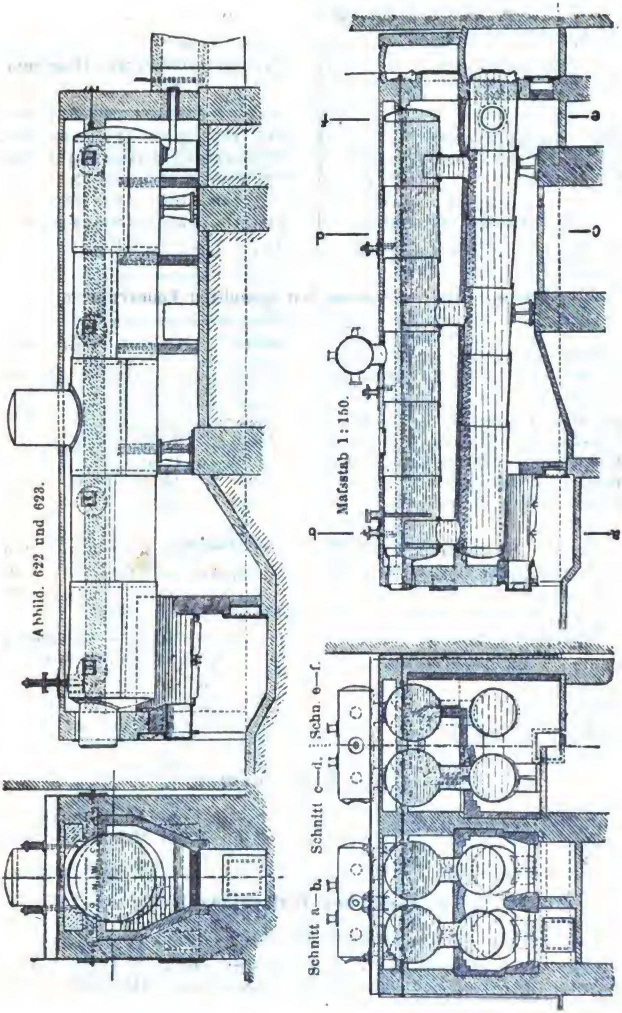
B. Haupt-Kesselsysteme.

F = Raumbeanspruchung (Grundfläche) für 1 qm Heizfläche, in qm,
J_w = Wasserinhalt, J_d = Dampfinhalt für 1 qm Heizfläche, in l,
V = Verdampfende Oberfläche für 1 qm Heizfläche, in qm.

a. Einfacher Walzenkessel.

1. **Liegend** (Abbild. 622).

Gröfster Durchmesser = 1,5 m; gröfste Länge = 10 m. Verhältnis Länge zu Durchmesser = 1 : 6 bis 1 : 8. Heizfläche = 0,6 bis 0,65 der ganzen Kesselmantelfläche.



Abbild. 622 und 623.

$F \sim 1{,}25$ qm, $J_w \sim 400$ bis 450 l, $J_d \sim 150$ bis 200 l, $V \sim 0{,}45$ bis 0,5 qm.

Aufhängung des Kessels besser wie Unterstützung. Lagerung des Kessels mit Neigung nach hinten.

Einmauerung: ein glatt durchgehender Feuerzug; besser Führung der Heizgase in wagerechten einfachen oder doppelten Schlangenlinien (Abbild. 625 und 626). Anordnung eines Unterzuges mit zwei Seitenzügen erfordert grofsen Durchmesser des Kessels.

2. Stehend, vorwiegend hinter Puddel- und Schweifsöfen.

Raumbeanspruchung gering; Heizfläche nicht sehr wirksam, weil erzeugter Dampf im Kesselinneren vorwiegend an der Heizfläche hochsteigt. Bleche leiden aus demselben Grunde. Schutz der letzteren durch Chamottefutter, der Eintrittsöffnung der Gase gegenüber.

Lagerung des Kessels auf dem Mauerwerk mittelst gufseisernen oder schweifseisernen, kreisrunden Tragkranzes.

Einmauerung: ein glatt nach oben gehender Feuerzug mit 200 bis 250 mm Abstand vom Kessel. Mauerwerk mit Bändern gut zusammenhalten und mit vielen Reinigungsöffnungen versehen. Anordnung von Sprossen im Inneren des Kessels zu dessen Befahren und eines weiten Stutzens mit Mannloch und Ablafshahn am unteren Teile des Cylinders.

b. Mehrfacher Walzenkessel.

(Zwei oder mehrere Cylinder übereinander.)

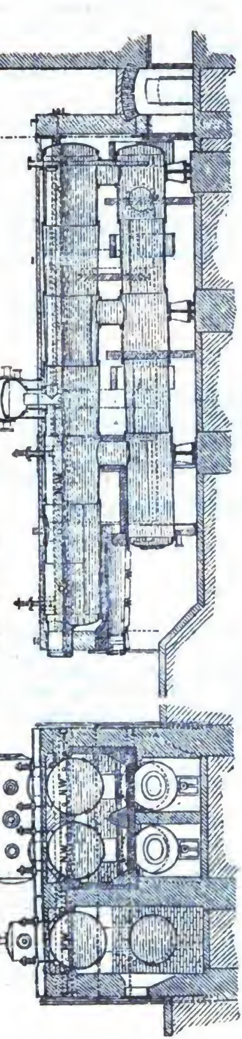
1. Rost unter dem Oberkessel (Abbild. 624).

	Mit einem Unterkessel.	Mit zwei Unterkesseln.	Zwei Ober- und zwei Unterkessel.
$F =$	0,525 bis 0,575	0,5	0,4 bis 0,45 qm
$J_w =$	275 bis 325	275 bis 325	290 bis 325 l
$J_d =$	75 bis 100	65 bis 75	80 bis 100 l
$V =$	0,225 bis 0,25	0,2	0,22 bis 0,23 qm.

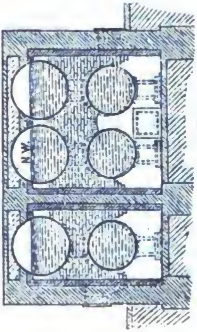
Verbindung der Cylinder unter sich durch schweifseiserne Stutzen von mindestens 350 bis 400 mm Durchmesser.

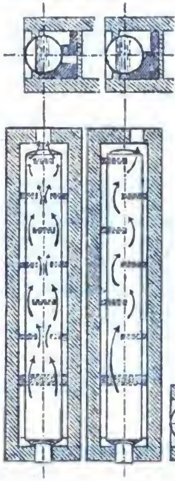
Verbindungsrohre: a) Ein Unterkessel. Ein Verbindungsrohr nur bei ganz kurzen Unterkesseln (bis 3 m Länge) zu empfehlen, besser je nach der Länge des Kessels zwei oder drei, zur Erzielung einer angemessenen Wasserbewegung im Kessel.

b) Zwei Unterkessel. Die Verbindung eines Unterkessels mit dem Oberkessel und beider Unterkessel unter sich durch ein

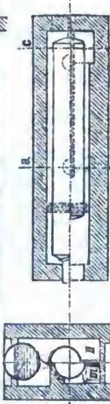


Abbild. 624.
Maſsstab 1 : 150.

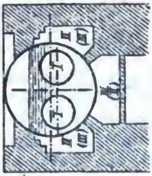


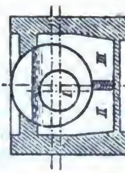


Abbild. 625 und 626.

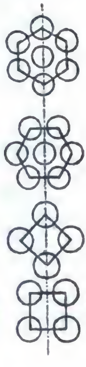


Abbild. 627.





Abbild. 628 und 629.



Abbild.: 630. 631. 632. 633.

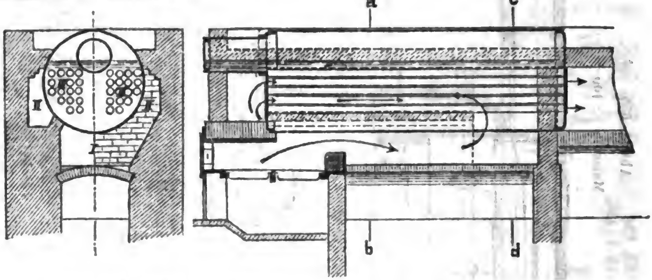
wagerechtes Rohr (Gegenstromkessel) nicht empfehlenswert, besser Verbindung eines jeden Unterkessels mit dem Oberkessel durch zwei oder drei Rohre je nach der Länge des Kessels.

c) Zwei Oberkessel und zwei Unterkessel. Verbindung eines jeden Unterkessels mit dem Oberkessel durch zwei oder drei Rohre, ferner Verbindung der Unterkessel unter sich durch ein weites (350 bis 400 mm) Rohr und Verbindung der Oberkessel unter sich im Dampfraum, am besten durch Anordnung eines Dampfsammlers.

Lagerung der Kessel. Oberkessel mit Fall nach hinten, Unterkessel mit gleicher Neigung gegen Oberkessel (auf 1 m 15 bis 20 mm) oder bei Durchführung der Gegenströmung mit entgegengesetzter Neigung.

Abbild. 634.

Schnitt a—b. Schnitt c—d.

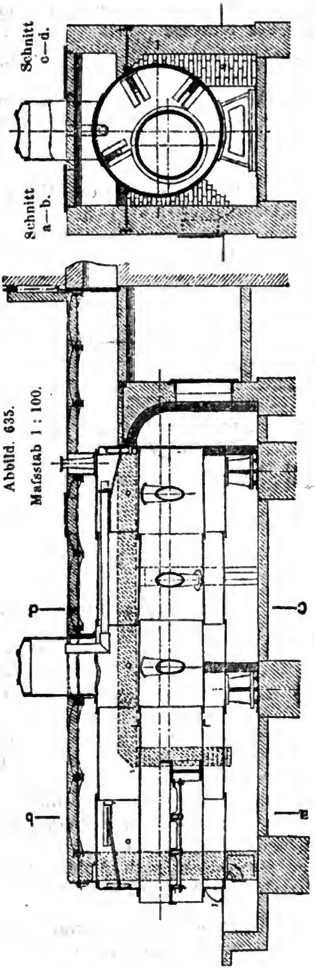


Lage der Verbindungsrohre. Der höchst gelegene Punkt eines jeden Unterkessels mufs Verbindung mit dem Oberkessel bezw. beim Gegenstromkessel mit demjenigen Unterkessel haben, der an seinem höchsten Punkt mit dem Oberkessel verbunden ist. Kommen zwei Verbindungsrohre auf einen Ring des Oberkessels, so ist für hinreichendes Material zwischen den Ausschnitten am Oberkessel zu sorgen durch nahezu lotrechte Anordnung der Verbindungsrohre. Die Verbindungsrohre sollen auf den Aufsenringen der Ober- und Unterkessel sitzen.

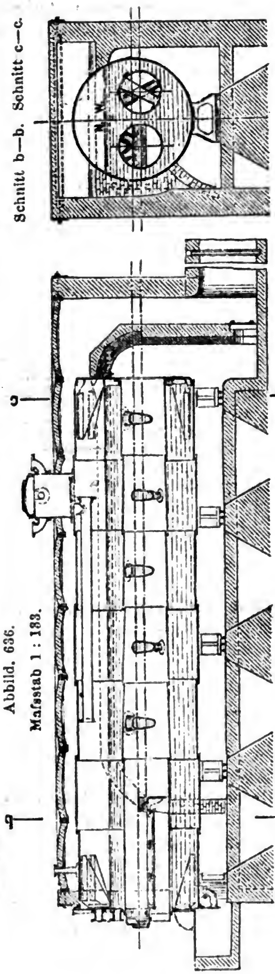
Unterstützung der Kessel. Stühle unter den Verbindungsrohren, mit elastischer Aufhängung des Vorderteils des bezw. der Oberkessel.

Einmauerung. 1) in drei Langzügen (Abbild. 627). 2) in zwei Langzügen mit Kulissen; Ober- und Unterkessel nach Abbild. 625 oder 626. 3) nach dem Kammersystem Abbild. 624. (Fall des Unterkessels: auf 1 m 20 bis 25 mm).

Gröfster **Durchmesser** des bezw. der Oberkessel: 1500 mm. Kleinster Durchmesser des bezw. der Unterkessel: 600 mm. Speisung erfolgt im Unterkessel.



Abbild. 635.
Maſsstab 1 : 100.



Abbild. 636.
Maſsstab 1 : 133.

2. Rost unter dem bezw. den Unterkesseln (Abbild. 623, a. S. 733).

F, J_w, J_d und V wie unter 1.

Mindestens zwei **Verbindungsrohre** zwischen Oberkessel (Fall nach hinten) und Unterkessel (Fall nach hinten: auf 1 m Unterkessel 25 bis 30 mm). Anzahl und Durchmesser der Verbindungsrohre sind so zu bestimmen, dafs der Querschnitt sämtlicher Verbindungsrohre mit Ausnahme des am Ende des Oberkessels sitzenden $= \frac{1}{60}$ bis $\frac{1}{80}$ der Heizfläche des zugehörigen Unterkessels ist.

Einmauerung allgemein in drei Langzügen. **Unterstützung:** am besten nur am Ende des bezw. der Unterkessel; im übrigen Aufhängung des Kessels mit Anordnung von Sicherheitsstühlen. Speisung erfolgt im Oberkessel.

c. Flammrohrkessel.

(Zwei oder mehrere weite Cylinder ineinander.)

1. Rost im Flammrohr.

	Ein Flammrohr.	Zwei Flammrohre.
$F =$	0,5 bis 0,6	0,45 bis 0,5 qm
$J_w =$	190 bis 225	180 bis 220 l
$J_d =$	75 bis 90	80 bis 100 l
$V =$	0,25 bis 0,26	0,22 qm

Einmauerung der Ein- und Zweiflammrohrkessel (Abbild. 628 und 629; Abbild. 635 und 636). Einmauerung nach Abbild. 628 nicht zu empfehlen, weil Kesselmantel unten zu kalt bleibt; besser schon, wenn Unterzug III als zweiter Zug und die beiden Seitenzüge als dritter Zug genommen werden. Einmauerung nach Abbild 629 und 635 mit und ohne Kulissen in den Seitenzügen bezw. im Unterzug die gebräuchlichere und bessere.

Lagerung der Kessel mit Fall nach vorn (auf 1 m 10 bis 15 mm) auf Kesselstühlen ohne Aufhängung.

Ist $D =$ **Durchmesser** des Mantels, $d =$ Durchmesser des bezw. der Flammrohre an der weitesten Stelle, so ist:

bei Einflammrohrkesseln $d = 0{,}5\,D$, bei Wellrohren etwas gröfser,
bei Zweiflammrohrkesseln $d = 0{,}5\,D - 250$ bis $0{,}5\,D - 300$ mm.

Gröfster Durchmesser der glatten Flammrohre $= 900$ mm, der Wellrohre 1300 bis 1400; kleinster Durchmesser der glatten Flammrohre $= 600$ mm, der Wellrohre 750 bis 800. Gröfster Mantel-

durchmesser des gewöhnlichen Einflammrohrkessels = 1800 mm, des Wellseitrohrkessels = 2400 mm. Seitliche Lagerung des Flammrohres bei Einflammrohrkesseln vorteilhaft. Gröfster Manteldurchmesser der Zweiflammrohrkessel = 2400 mm, kleinster = 1800 mm. Verkleinerung des Flammrohrdurchmessers von der Feuerstelle nach hinten von d auf $d - 100$ mm empfehlenswert, namentlich bei Zweiflammrohrkesseln. Kleinster Abstand der Flammrohrmittel an der Feuerstelle $= d + 150$ bis 200 mm. Der niedrigste Wasserstand liegt bei Einflammrohrkesseln mindestens 150 mm, bei Zweiflammrohrkesseln mindestens 175 mm über den Flammrohren, an der Feuerstelle gemessen.

2. Rost unter Kesselmantel (Rauchrohrkessel).

F, J_w, J_d und V wie unter **1.**

Innenrohre (Rauchrohre) können im Durchmesser kleiner gehalten werden wie Flammrohre unter **1.** Kleinster Abstand des Rauchrohres vom Kesselmantel nicht unter 250 mm.

d. Heizrohrkessel.

$F = 0{,}3$ qm, $J_w = 70-80$ l. $J_d = 40-50$ l, $V = 0{,}075-0{,}1$ qm.

Verteilung der Heizrohre: Anordnung in zwei Bündeln zum Befahren und Reinigen der Kessel. Die gegenseitige Lage der Rohre zu einander mufs ein leichtes Aufsteigen des gebildeten Dampfes gestatten.

1. Die Rohrmitten bilden die Eckpunkte eines Quadrates.

a) Die Seiten des Quadrats liegen wagerecht bezw. lotrecht (Abbild. 630).
b) „ Diagonalen des „ „ „ „ „ (Abbild. 631).

2. Die Rohrmitten bilden die Eckpunkte und den Mittelpunkt eines regelmäfsigen Sechsecks.

a) zwei gegenüberstehende Seiten des Sechsecks liegen lotrecht (Abbild. 632).
b) zwei gegenüberstehende Seiten des Sechsecks liegen wagerecht (Abbild. 633).

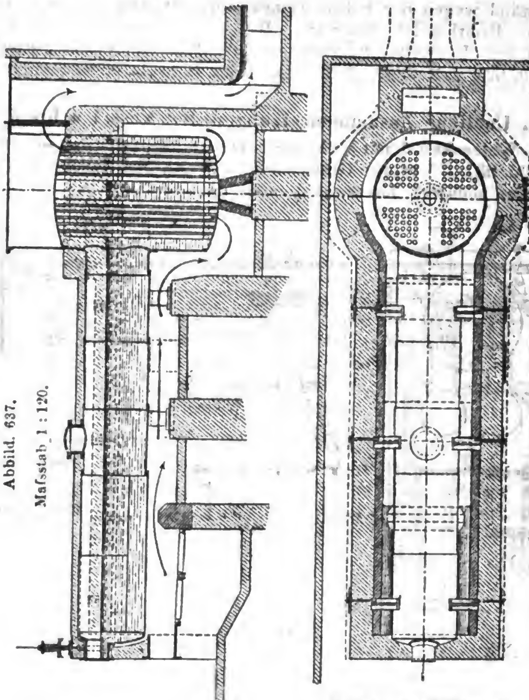
Für das Aufsteigen der Dampfblasen und möglichst grofse Rohrzahl am vorteilhaftesten die Verteilung nach 2a.

Gesamt-Rohrquerschnitt $= \frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{8}$ der gesamten Rostfläche.

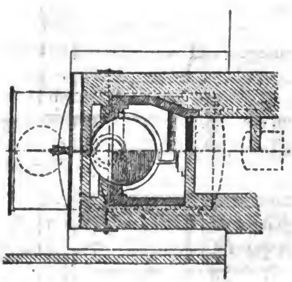
Verhältnis des inneren **Rohrdurchmessers** zur Länge des Rohres = 1 : 20 bis 1 : 40. Weite Rohre sind engen vorzuziehen im Interesse gesunder Zugverhältnisse. Nach Schinz führen enge Rohre von gleicher Fläche mehr Wärme über wie weite bei gleichen Temperaturunterschieden.

Wird die Leistungsfähigkeit eines Rohres von 50 mm Durchmesser = 100 f. d. Flächeneinheit gesetzt, so ist die eines Rohres von

75	100	125	150	225	300 mm Durchmesser
= 87	80	76	72	68	66 f. d. Flächeneinheit.



Abbild. 637.
Mafsstab 1 : 120.



Entfernung der Rohrmitten voneinander, wenn *d* der äufsere Durchmesser der Rohre ist. = 1,25 bis 1,5 *d*.

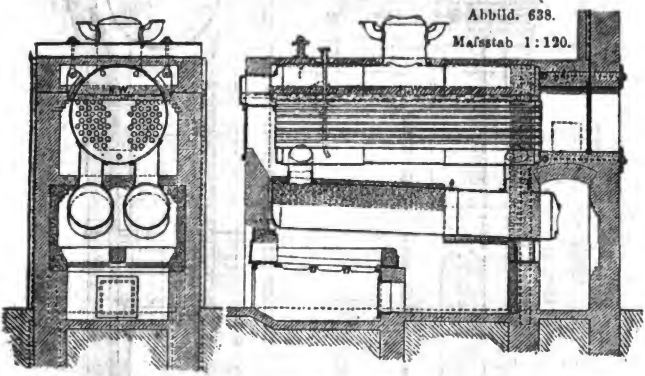
Uebliche **Einmauerung:** Ein Unterzug als erster Feuerzug, das Rohrbündel als zweiter Zug und zwei Seitenzüge als dritter Feuerzug. Diese Anordnung führt leicht zu Undichtigkeiten der Rohre in der hinteren

Rohrwand wegen der hohen Temperatur, mit welcher die Heizgase in das Rohrbündel eintreten. Besser: Anordnung der beiden Seitenzüge als zweiter Feuerzug und der Rohrbündel als dritter wie Abbild. 634, a. S. 736. Aufhängung des Kessels sehr zu empfehlen.

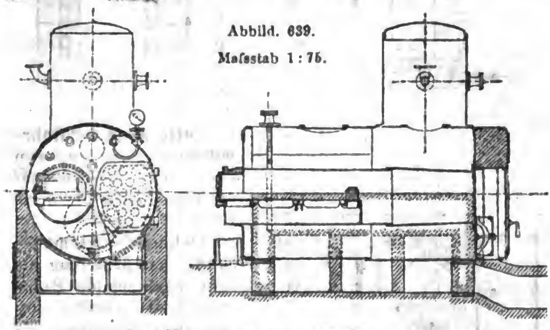
e. Uebliche Zusammensetzungen der Kessel a bis d.

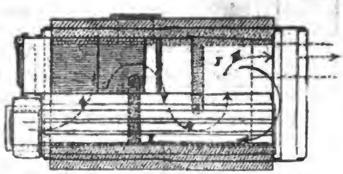
1. Walzenkessel mit stehendem Heizrohrkessel, System Dupuis (Abbild. 637). Vorzug: Grofse verdampfende Oberfläche und Trocknung des Dampfes durch den oberen Teil der Heizrohre.

Abbild. 638.
Maſsstab 1 : 120.



Abbild. 639.
Maſsstab 1 : 75.





2. Walzenkessel mit liegendem Heizrohrkessel (Abbild. 638).

a) Feuerung unter Heizrohrkessel. Führung der Heizgase: Unterzug, Seitenzüge, Rohrbündel, Walzenkessel.

b) Feuerung unter Walzenkessel. Führung der Heizgase: Walzenkessel, Mantel des Heizrohrkessels, Rohrbündel.

3. Flammrohrkessel mit Heizrohren,

a) mit vorgehenden Heizrohren Abbild. 640 und 642,

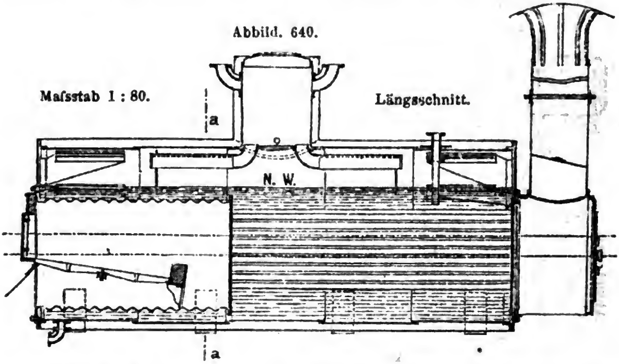
b) mit rückkehrenden Heizrohren Abbild. 639 und 641.

4. Flammrohrkessel mit Heizrohrkessel, übereinanderliegend,

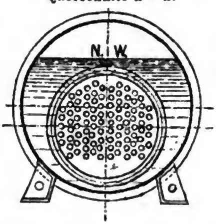
a) mit Dampfraum nur im Oberkessel (Abbild. 643),

b) mit Dampfraum im Ober- und Unterkessel (Abbild. 644).

Abbild. 640.



Querschnitt a — a.



5. Flammrohrkessel mit Flammrohrkessel, übereinanderliegend,

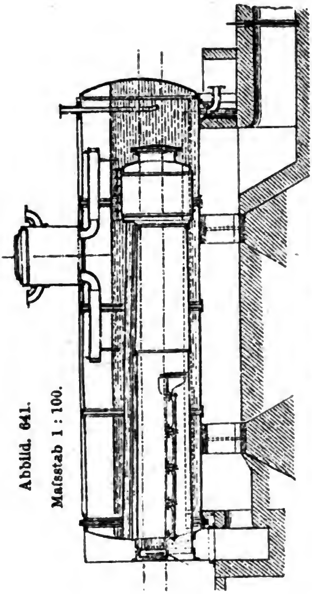
a) mit Dampfraum nur im Oberkessel (Abbild. 645),

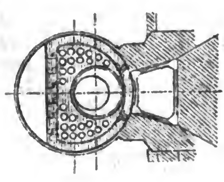
b) mit Dampfraum im Ober- und Unterkessel.

Uebliche Führung der Heizgase bei **4.** und **5.**: Flammrohre des Unterkessels, Heizrohre bezw. Flammrohre des Oberkessels, Mantel des Oberkessels, Mantel des Unterkessels. Diese Anordnung führt leicht zu Undichtigkeiten der Mantelrundnähte des Unterkessels.

Vorteilhaftere Führung der Heizgase: Flammrohre des Unterkessels, Mantel des letzteren, Mantel des Oberkessels, Heizrohre bezw. Flammrohre des Oberkessels (Abbild. 645).

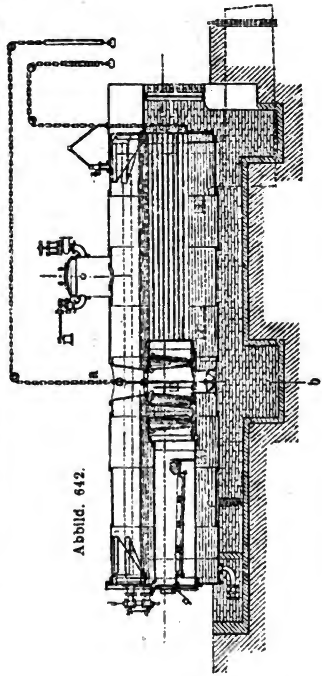
	1.	2 a und b.	3 a und b.	4 a.	4 b.	5 a.	5 b.
$F =$	0,25—0,3	0,2—0,25	0,2—0,25	0,125	0,15	0,25	0,225 qm
$J_w =$	100—120	100	100—120	120—125	100—110	220—225	170—180 l
$J_d =$	50—60	40—50	50—60	20—25	30—35	40—50	80—100 l
$V =$	0,125	0,075—0,1	0,125—0,15	0,04—0,05	0,075—0,1	0,1	0,2 qm



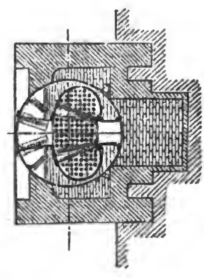


Abbild. 641.

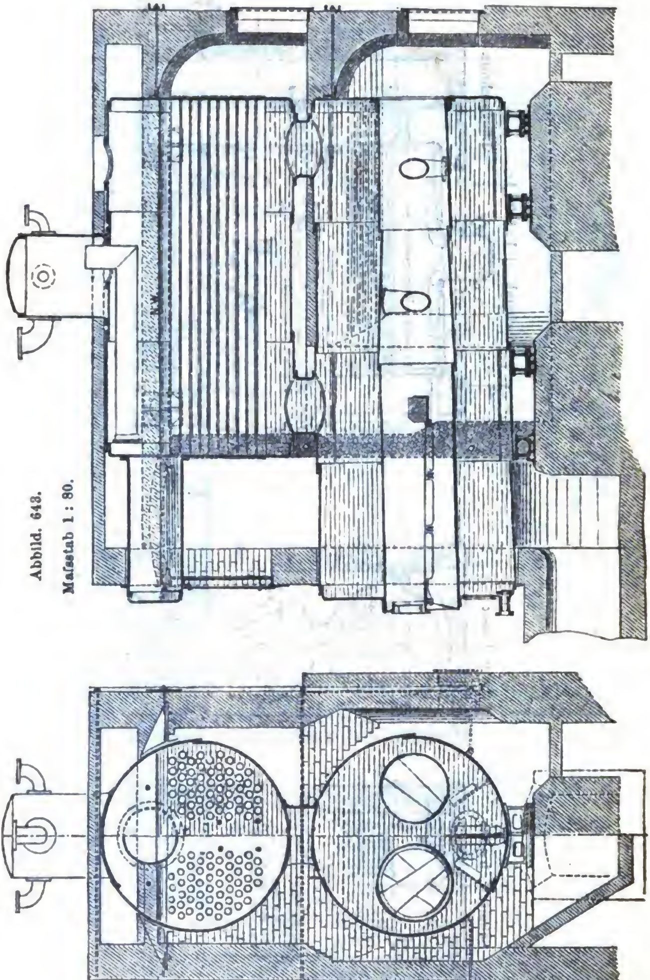
Maßstab 1 : 100.



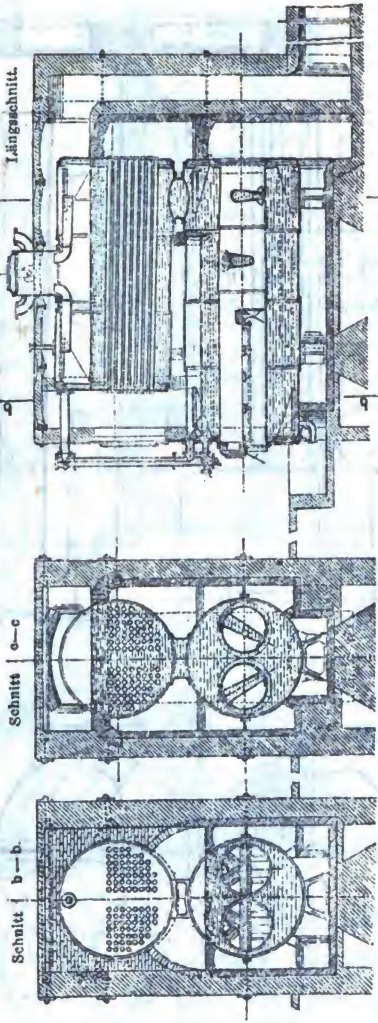
Abbild. 642.



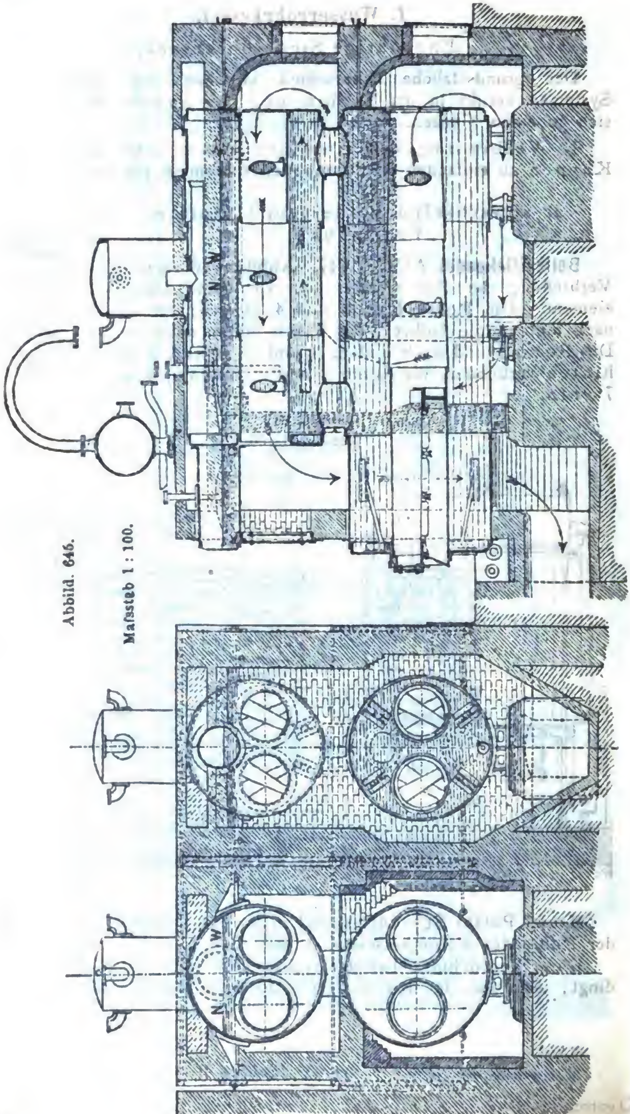
Schnitt a—b.



Abbild. 643.
Maßstab 1 : 80.



Abbild. 644. Maßstab 1 : 120.



Abbild. 645.

Maßstab 1 : 100.

f. Wasserrohrkessel.

(Engrohrige Siederohrkessel).

Der grundsätzliche Unterschied zwischen den verschiedenen Systemen beruht in der Verbindung der einzelnen Rohre unter sich zu einem Ganzen.

1. Verbindung der einzelnen Rohre unter sich durch Kappen zu einfachen oder doppelten stehenden Elementen.

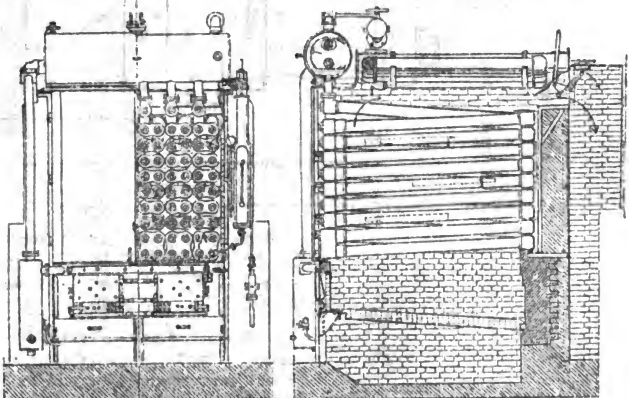
a) abwechselnd vordere und hintere Verbindung.

Abbild. 646.

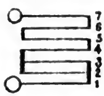


Bellevillekessel Abbild. 647. Abbild. 646 zeigt die Verbindung der Rohre unter sich zu einem Doppelelement. Die Rohre 1, 2, 3 und 4 steigen von vorn nach hinten, die Rohre 5 bis 8 von hinten nach vorn. Die Rohre 1 und 5, 2 und 6, 3 und 7, 4 und 8 sind hinten verbunden, die Rohre 2 und 5, 3 und 6, 4 und 7 vorn.

Abbild. 647.
Mafsstab 1 : 80.



Abbild. 648.



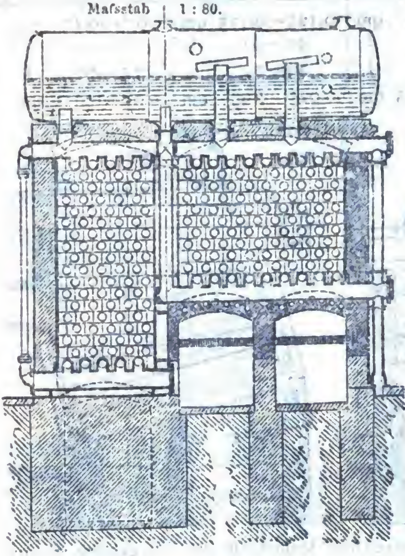
Kessel **Patent Schmidt** Abbild. 649. Verbindung der Rohre des Vorderkessels s. Abbild. 648.

Diese Verbindung (1a) der Rohre unter sich bedingt, dafs das in den untersten Rohren erzeugte

Gemisch von Dampf und Wasser durch sämtliche darüberliegende Rohre desselben stehenden Elements hochsteigen mufs.

Abbild. 649.

Mafsstab 1 : 80.



Bellevillekessel.

$F = 0{,}07$ qm;
$J_w = 20-25$ l;
$J_d = 22-28$ l;
$V = 0{,}006$ qm.

Kessel Patent Schmidt.

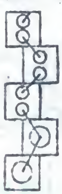
$F = 0{,}08$ qm;
$J_w = 30$ l;
$J_d = 7{,}5$ l;
$V = 0{,}02$ qm.

b) gleichzeitige vordere und hintere Verbindung.

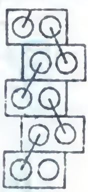
Abbild. 650.



Abbild. 651.



Abbild. 652.



Rootkessel, gebaut von Walther & Co. (Abbild. 650 und 653), Büttner & Co. (Abbild. 651), de Naeyer & Co. (Abbild. 652).

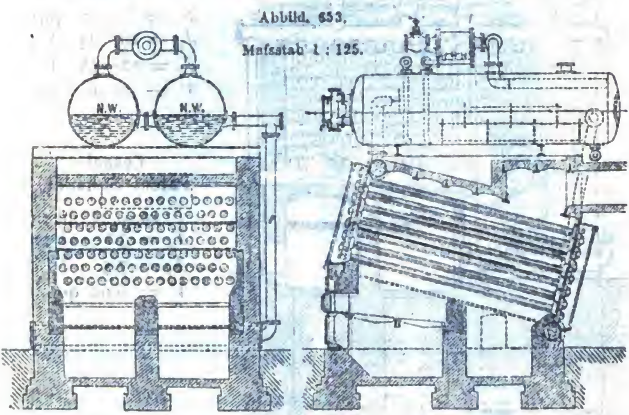
Diese Verbindung (1 b) gestattet dem in den einzelnen Rohren erzeugten Gemisch von Dampf und Wasser unmittelbaren Abzug durch die Köpfe und Kappen nach oben bezw. dem am hinteren Ende der Rohre zufliefsenden Wasser unmittelbaren Eintritt in die einzelnen Rohre.

Rostkessel.

	Ohne Oberkessel.	Mit einem Oberkessel.	Mit zwei Oberkesseln.
$F=$	0,075—0,15 qm	0,125—0,175 qm	0,1—0,125 qm
$J_w=$	30—35 l	40—50 l	60—70 l
$J_d=$	15—20 l	20—25 l	25—40 l
$V=$	0,02—0,025 qm	0,025—0,05 qm	0,05—0,075 qm

Abbild. 653.

Mafsstab 1 : 125.

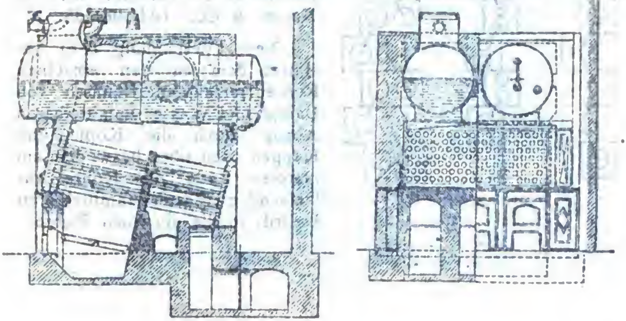


2. Verbindung einzelner stehenden oder liegenden Rohrreihen unter sich durch Kammern.

a) Verbindung nur an einem Ende der Rohre: der Howardkessel (selten ausgeführt).

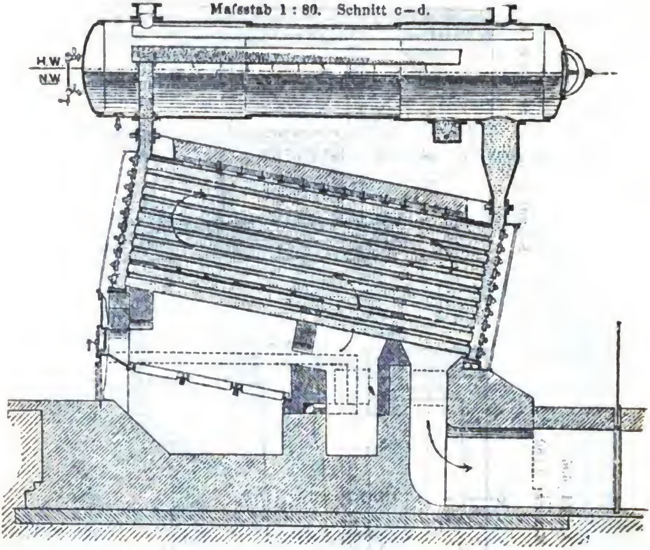
Abbild. 654.

Mafsstab 1 : 150.

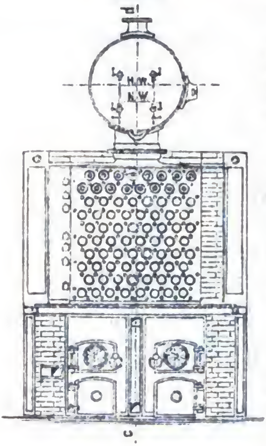


Abbild. 655.

Maſsstab 1 : 80. Schnitt c–d.



Ansicht.



b) Verbindung an beiden Enden: der Sinclair- und der alte Steinmüllerkessel, der Kessel von Petry-Walther und der Hosekessel. Letztere beiden neuere Systeme, erstere selten mehr anzutreffen.

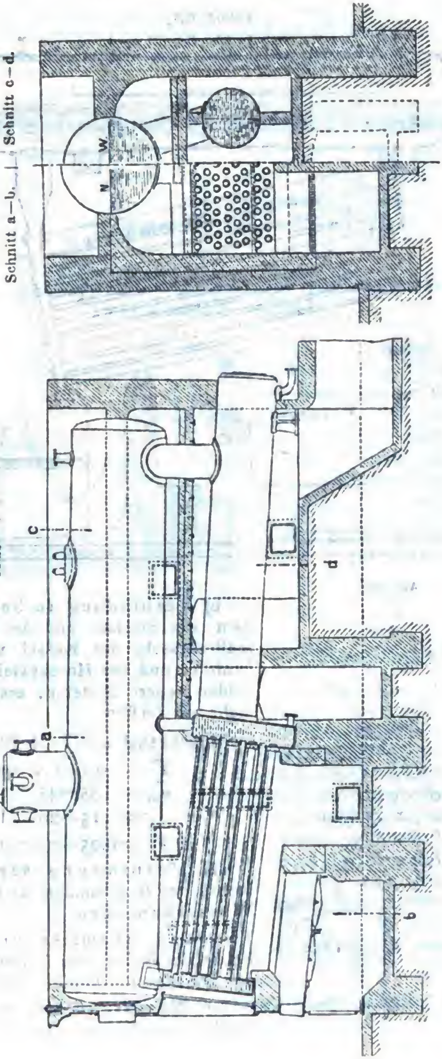
Hosekessel mit 1–4 Oberkesseln:

$$F = 0{,}1-0{,}2 \text{ qm};$$
$$J_w = 35-45 \text{ l};$$
$$J_d = 15-20 \text{ l};$$
$$V = 0{,}05-0{,}07 \text{ qm}.$$

3. Verbindung sämtlicher Rohre des Rohrbündels durch sogen. Wasserkammern.

a) Wasserkammer nur an einem Ende der Rohre: der Willmannkessel, der Dürrkessel (Abbild. 654).

b) Wasserkammer an beiden Enden der Rohre: Büttner-, Heine-,



Abbild. 656.
Maßstab 1 : 80.

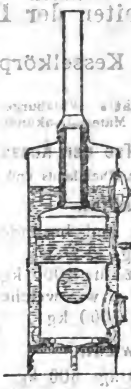
Humboldt-, Breda- und Steinmüller-Kessel (Abbild. 655). Dieses System der engrohrigen Siederohrkessel wird in letzter Zeit am meisten verwandt. Ausführung mit einem oder mehreren Oberkesseln.

	3a.		3b.		
	1 Oberkessel.	2 Oberkessel.	1 Oberkessel.	2 Oberkessel.	
F =	0,2—0,25	0,1—0,15	0,125—0,15	0,075—0,25	qm
J_w =	75—125	75—100	50—75	75—150	l
J_d =	45—90	40—70	25—40	50—75	l
V =	0,075—0,125	0,075—0,175	0,075—0,1	0,1—0,175	qm.

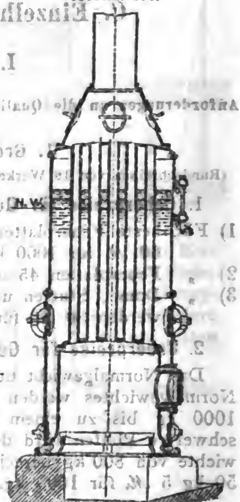
g. Zusammensetzung engrohriger Siederohrkessel mit mehrfachem Walzenkessel.

Die bekannteste Konstruktion ist die von Mac-Nicol Abbild. 656, auch geeignet zum Umbau vorhandener Kessel behufs Vergröfserung der Heizfläche ohne Mehrbeanspruchung von Grundfläche.

Abbild. 657.



Abbild. 658.



F = 0,15—0,375 qm;
J_w = 115—175 l;
J_d = 45—75 l;
V = 0,1—0,175 qm.

h. Zwergkessel.*)

Zu den Zwergkesseln rechnet man (als den Uebergang zu ihnen bildend) auch die stehenden Feuerbüchsenkessel, welche als Heizrohr- oder Quersiederkessel (Lachapellekessel) in gröfseren Abmessungen gleichfalls Verwendung finden.

Die Aufstellung dieser letzteren soll nie unmittelbar auf das Mauerwerk erfolgen, sondern auf einen gufseisernen Rahmen oder am besten auf gufseiserne Untersätze zur besseren Erhaltung des untersten Kesselteiles, welcher anderenfalls infolge undichten Verschlusses der Schlammlöcher leicht verrostet.

---

*) Ausführliche Angaben s. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1887, S. 192 u. f.

Lachapellekessel (Abbild. 657):

$F = 0{,}125$ qm; $J_w = 50-100$ l; $J_d = 35-90$ l; $V = 0{,}12$ qm.

Heizrohrkessel (Abbild. 658):

$F = 0{,}065-0{,}1$ qm;	$J_d = 20-25$ l;
$J_w = 55-90$ l;	$V = 0{,}05-0{,}1$ qm.

Zu den eigentlichen Zwergkesseln gehören die Kessel: 1. des Hoffmeister-Motors, 2. des Lilienthalschen Motors, 3. des Simplex-Motors, 4. des Viktoria-Motors, 5. des Friedrich-Motors.

	1:	2:	3:	4:	5:
$J_w =$	30—35	zusammen	7	25—30	25—30
$J_d =$	10—15	3,8	8—13	18—20	8—10.

C. Einzelheiten der Dampfkessel.

I. Kesselkörper.

Anforderungen an die Qualität s. Würzburger Normen, Sechzehnter Abschnitt, Materialienkunde.

1. Gröfse der Kesselbleche.

(Rundschreiben von 16 Werken Rheinlands und Westfalens vom 13. Febr. 1889.)

1. Ueberpreise für Qualität.

1) Für beste Feuerplatten und besonders schwierige Feuerarbeiten 60 *M.* für 1000 kg,
2) „ Feuerplatten 45 *M.* für 1000 kg,
3) „ Dome, Stutzen u. s. w., welche gebördelt oder geschweifst werden 30 *M.* für 1000 kg.

2. Ueberpreise für Gewicht.

Das Normalgewicht beträgt 500 kg. — Bei Ueberschreitung des Normalgewichtes werden für jede angefangenen 50 kg 10 *M.* für 1000 kg bis zu einem Gewichte von 800 kg berechnet. Für schwerere Platten wird der obige Ueberpreis nur bis zu einem Gewichte von 800 kg berechnet, darüber hinaus für jede angefangenen 50 kg 5 *M.* für 1000 kg.

3. Ueberpreise für Abmessungen.

Der Grundpreis gilt für folgende Breiten:

Bei viereckigen Platten von	5,5 bis unter 7 mm	1500 mm	Breite
„ „ „	7,0 mm und darüber	1700 „	„
„ runden „ „	5,5 bis unter 7 mm	1600 „	Durchm.
„ „ „ „	7,0 bis 10 mm . . .	1800 „	„
„ „ „ „	10,0 mm und darüber	1900 „	„

Die normale Fläche wird wie folgt festgestellt:

Für Platten von 5,5 bis unter 7 mm Stärke . . . . . . 4,5 qm.
„ „ „ 7,0 mm Stärke und darüber . . . . . . 6,0 „

Für Ueberschreitungen gelten folgende Ueberpreise für 1000 kg:

Bei Ueberschreitung der normalen Breite bezw. des Durchmessers für jede 25 mm . . . . 2 M.

Bei Ueberschreitung der normalen Fläche für jedes angefangene 0,1 qm . . . . 1 M.

4. Ueberpreise für Form.

a) Runde Bleche: Ueberpreis 10% über den Preis der fertigen Scheibe nach Aufschlag für Qualität, Gewicht und Abmessungen.

b) Geflanschte Böden: Ueberpreis 30 M. für 1000 kg über erforderliche Planscheibe nach Aufschlag für Qualität, Gewicht und Abmessungen.

c) Maschinell umgezogene Böden:

1) Grundpreis einschl. der 10% und 30 M.: für Böden von 151 bis 500 kg und bis zu 1700 mm Durchmesser.

2) Für Böden über 500 kg und 1700 mm Durchmesser: Ueberpreis wie für Bleche.

3) Böden unter 151 kg folgende Ueberpreise:

101 bis	150 kg	10 M.		21 bis	25 kg	100 M.
51 „	100 „	30 „		16 „	20 „	150 „
26 „	50 „	50 „		10 „	15 „	200 „

5. Zulässige Abweichungen.*)

a) Längen- und Breiten-Abweichungen:

Für Bleche bis 18 mm Dicke einschl. in der Länge bis zu + 10 mm, in der Breite bis zu + 6 mm.

Für Bleche über 18 mm Dicke einschl. in der Länge bis zu + 15 mm, in der Breite bis zu + 10 mm.

b) Dicken-Abweichungen.

Bleche.	Unterschied der kleinsten und größten Dicke bei verlangter Blechdicke in mm.		
	5 bis 7 (ausschl.) mm.	7 bis 10 (ausschl.) mm.	10 und darüber mm.
Bis zu 1600 mm Breite . . .	1,2	0,9	0,9
von 1600 bis 1800 mm Breite	1,8	1,7	1,7
„ 1800 „ 2100 „ „	2,0	1,7	1,7
„ 2100 „ 2700 „ „	—	—	2,3
„ 2700 „ 3000 „ „	—	—	2,9

*) Vergl. Vorschriften für Lieferungen von Eisen und Stahl, aufgestellt vom Verein deutscher Eisenhüttenleute, 1889. S. 29.

Bei Breiten über 2100 mm und Dicken bis zu 10 mm, sowie bei Breiten über 3000 mm sind die Bleche so anzunehmen, wie sie fallen, wenn die dünnste gemessene Stelle der Anforderung entspricht.

Das Messen der Dicke hat mittelst Schraubenlehre zu erfolgen und es müssen die Meſspunkte mindestens 40 mm vom Rande und mindestens 100 mm von den Ecken des Bleches liegen.

c) Abweichungen im Gewicht:

$\pm 3\%$ für ganze Lieferung,
$\pm 5\%$ für einzelne Tafeln,
$\pm 8\%$ für Bleche über 2400 mm bis 2700 mm Breite, bei Dicken von 10 mm und mehr.

Bleche von 2100 bis 2700 mm Breite bei Dicken unter 10 mm und solche über 2700 mm bei allen Dicken sind so zu nehmen, wie das Gewicht sich ergiebt.

2. Berechnung der Materialstärken.

Hamburger Normen 1891 (Auszug).

Angenommen von der Delegierten- und Ingenieur-Versammlung des Internationalen Verbandes der Dampfkessel-Ueberwachungs-Vereine am 18. und 19. Juni 1891 zu Danzig.

Zulässige Materialspannung und Vernietung s. S. 387.

Die Festigkeit gut und mittelst Ueberlappung **geschweiſster** Nähte kann bei Schweiſseisen zu 0,7 der Festigkeit des vollen Bleches in Rechnung gesetzt werden.

Schrauben und Verschraubungen.

Es ist zu unterscheiden zwischen Schrauben, welche für bearbeitete, und solchen, welche für unbearbeitete Flächen zur Verwendung kommen.

Bezeichnet:

P den Gesamtdruck auf die gedrückte Fläche in kg,
p „ auf einen Schraubenkern entfallenden Teil des Gesamtdrucks P in kg,
k_z die Beanspruchung des Schraubenkerns in kg f. d. qcm,
d den Durchmesser des Schraubenkerns in cm,

so ist:
$$k_z = 1{,}27 \frac{p}{d^2},$$

und ferner, gleichviel ob die Schrauben aus Schweiſseisen oder aus Fluſseisen hergestellt sind:

1. bei guten Schrauben, guter Bearbeitung der Flächen und weichem Dichtungsmateriale:

$$d = 0{,}045 \sqrt{p} + 0{,}5 \text{ cm};$$

2. wenn den unter 1. genannten Anforderungen weniger vollkommen entsprochen ist:

$$d = 0{,}055 \sqrt{p} + 0{,}5 \text{ cm};$$

Schrauben aus Flufseisen sollen kein scharfes, sondern möglichst abgerundetes Gewinde erhalten.

Bei der Berechnung der Belastung der Schrauben kann man annehmen, dafs, wenn

r den geringsten Abstand der Schrauben vom Schwerpunkte der gedrückten Fläche in cm,

e die Schraubenteilung in cm

bezeichnet, die am stärksten belastete Schraube den Druck

$$p = \frac{Pe}{2\pi r}$$

erhält.

Wenn Biegungsspannungen zu befürchten sind, wie namentlich bei unbearbeiteten Flächen, Durchbiegen der Flanschen, einseitig liegenden Dichtungen u. s. w., ist diesen bei der Bemessung der Schrauben besonders Rechnung zu tragen.

Die Flanschen sind so stark zu machen, dafs sie der Biegungsbeanspruchung, sowie auch dem Durchbiegen sicher widerstehen können.

Schwächere Schrauben als solche von 16 mm äufserem Durchmesser sind thunlichst zu vermeiden; unter 13 mm äufserem Durchmesser sind solche nicht zulässig.

Anker und Stehbolzen. (Vergl. S. 776.)

Die Beanspruchung soll bei

geschweifsten	eisernen	Ankern	und Stehbolzen	350	kg f. d. qcm,
ungeschweifsten	„	„	„	500	„ „
flufseisernen		„	„	600	„ „
kupfernen		„	„	300	„ „

nicht überschreiten.

Anker und Stehbolzen aus Flufseisen dürfen nicht geschweifst werden.

Bei hohem Drucke (10 kg f. d. qcm und höher) empfiehlt es sich, die mit Muttern versehenen Längsanker sowohl als auch die Ankerrohre mit Gewinde in die Stirnplatten, bezw. Rohrplatten einzuschrauben, aufserdem erstere innen und aufsen mit Unterlagscheiben und auch innen mit Muttern zu versehen; die Ankerrohre dagegen sind aufzuwalzen und umzubördeln.

Die Länge der Eckanker soll so grofs als irgend möglich sein.

Es empfiehlt sich, in Flammrohrkesseln die untersten derjenigen Niete, welche die Eckanker mit der Stirnplatte verbinden, mindestens 20 cm vom Flammrohrumfange abstehen zu lassen.

Der Querschnitt der Eckanker soll im Verhältnisse ihrer Neigung zur Kesselachse gröfser werden, als derjenige der Längsanker.

Die zur Befestigung der Eckanker dienenden Bolzen und Nieten sind den wirksamen Kräften entsprechend reichlich zu bemessen.

Erfolgt die Versteifung ebener Stirnwände durch Aufnieten von I-Trägern und dergl., so sollen diese ihre Belastung möglichst unmittelbar auf den Kesselmantel übertragen.

Bügel- oder Decken-Träger für Feuerbüchs-Decken.

a) Freitragende, nicht aufgehängte Träger.

Bezeichnet:

p den gröfsten Betriebs-Ueberdruck in kg f. d. qcm,
w die Weite der Feuerbüchse in cm,
d die Entfernung der Stehbolzen von einander in cm,
e die Entfernung der Träger von einander in cm,
l die Länge des Trägers in cm,
h die Höhe „ „ „
b die Dicke „ „ bezw. Gesamtdicke der Trägerbleche in cm,
$c = 420$, wenn 1 Stehbolzen im Träger,
$c = 630$, wenn 2 oder 3 Stehbolzen im Träger,
$c = 720$, „ mehr als 3 „ „ „

sich befinden, dann ist:

$$b = \frac{p\,(w-d)\,el}{c\,h^2}.$$

b) Werden die Deckenträger aufgehängt, dann sind sie den veränderten Belastungsverhältnissen entsprechend zu berechnen.

Berechnung der Blechdicken cylindrischer Dampfkessel-Wandungen mit innerem Ueberdruck.

Bezeichnet:

s die Blechdicke in cm,
d den inneren Durchmesser in cm,
p den gröfsten Betriebs-Ueberdruck in kg f. d. qcm,
$\mathfrak{S} = 5$ bezw. bis 4,5 den Sicherheitsgrad gegen Zerreifsen,
K_z die Zugfestigkeit des Materiales in kg f. d. qcm,
φ die Festigkeit der Nietnaht im Vergleiche mit der Festigkeit des vollen Bleches,

dann ist:

$$s = d\,\frac{p\,\mathfrak{S}}{2\,K_z\,\varphi}, \text{ oder } p = K_z\,\frac{2\,s\,\varphi}{d\,\mathfrak{S}}.$$

Die Blechdicke darf indessen nie geringer als 7 mm genommen werden.

Es ist zu erwägen, ob je nach den örtlichen Betriebseinflüssen ein Zuschlag zu machen ist; notwendig ist ein solcher, wenn die Rechnung eine Blechdicke unter 1 cm ergiebt.

Berechnung der Blechdicken von Dampfkessel-Flammrohren mit äufserem Ueberdruck.

Bezeichnet:

d den inneren Durchmesser des Flammrohres in cm,

l die Länge des Flammrohres in cm, zutreffenden Falles die gröfste Entfernung der wirksamen Versteifungen von einander, — als wirksame Versteifungen gelten neben den Stirnplatten die Konstruktionen Abbild. 685 bis 690 (a. S. 774), die letztere jedoch nur unter der Voraussetzung, dafs die Abkröpfung nicht weniger als etwa 50 mm beträgt —,

p den gröfsten Betriebs-Ueberdruck in kg f. d. qcm,

dann giebt Tafel a. S. 764 die zweckmäfsige Blechdicke s an, u. zw. beziehen sich die Werte in der mit $\ddot{U}$ überschriebenen Spalte auf Rohre mit überlappt genieteter, in der mit G überschriebenen Spalte auf Rohre mit gelascht genieteter oder geschweifster Längsnaht.

Die Grundlage der vorstehenden Werte bildet die Gleichung von Bach:

$$s = \frac{p\,d}{2000}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{p}\,\frac{l}{l+d}}\right) + c,\text{*)}$$

worin

s die Blechdicke in cm,

p der gröfste Betriebs-Ueberdruck in kg f. d. qcm,

d der innere Flammrohrdurchmesser in cm,

l die Länge des Flammrohres, bezw. gröfste Entfernung der wirksamen Versteifungen von einander in cm,

$a = 100$ für Rohre mit überlappter Längsnaht,

$a = 80$ „ „ „ gelaschter oder geschweifster Längsnaht,

mit dem Zuschlage

$c = 0{,}15$ bezw. 0,1, 0,05, 0 cm, je nachdem p bis 5, gleich 6, 7 oder über 7 kg f. d. qcm beträgt

und mit entsprechenden Abrundungen.

Die Länge l derjenigen Rohrstrecken, welche von Quersiedern durchdrungen werden, kann man nach Bach wie folgt annehmen:

bei der Rohrstrecke a (Abbild. 659):

$l = l_1 + 0{,}5\,l_2$, sofern l_1 die gröfsere Strecke,

bei der Rohrstrecke b (Abbild. 659):

$l = l_1 + l_2$, sofern l_1 gröfser als l_3, andernfalls tritt l_3 an die Stelle von l_1,

bei der Rohrstrecke c (Abbild. 660):

$l = l_1 + l_2$,

---

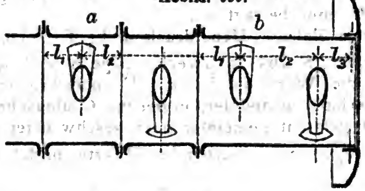
*) Näheres hierüber s. C. Bach, Die Maschinenelemente. 2. Aufl. S. 148 u. f.

bei der Rohrstrecke d (Abbild. 660):

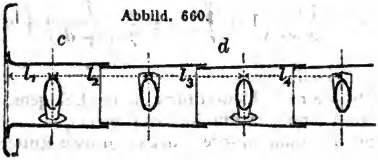
$l = l_2 + l_3$, bezw. $l = l_3 + l_4$.

Sind mit Rücksicht auf die Gröfse, die Befestigungsweise, den Durchdringungsort des Querrohres u. s. w. Zweifel vorhanden, ob das Rohr in ausreichendem Mafse versteifend einwirkt, so ist es rätlich, für l die volle Länge einzusetzen, also von einer rechnungsmäfsigen Berücksichtigung der versteifenden Wirkung der Quersieder abzusehen.

Abbild. 659.



Abbild. 660.



Wellrohre und gerippte Rohre, letztere mit 9 Zoll engl. Rippenentfernung und $1\frac{3}{8}$ Zoll Rippenhöhe, sind nach obiger Gleichung mit $l = 0$, d. i. aus

$$s = \frac{p\,d}{1000} + c$$

zu berechnen, worin c bis 0,3 cm zu nehmen ist.

Die Blechdicke darf nie geringer als 7 mm genommen werden.

Berechnung der Blechdicken ebener Flächen.

Bezeichnet:

s die Blechdicke in cm;

p den gröfsten Betriebs-Ueberdruck in kg f. d. qcm;

e den Abstand der Stehbolzen oder Anker von einander in cm;

K_z die Zugfestigkeit des Materiales in kg f. d. qcm;

c = 1,47, wenn die Stehbolzen oder Anker in die Platten eingeschraubt und vernietet sind;

c = 1,146, wenn sie in die Platten eingeschraubt und aufsen mit einer Mutter versehen sind;

c = 1,085, wenn sie in die Platten eingeschraubt und innen und aufsen mit Muttern und Unterlagscheiben versehen sind, deren

Durchmesser wenigstens 0,4 mal der Entfernung zwischen den Stehbolzen oder Ankerreihen gleich kommt. Die Dicke der Unterlagscheiben muſs dann mindestens $\frac{2}{3}$ der Plattendicke betragen und ist noch zu erhöhen, wenn der Durchmesser der Scheiben mehr als $1\frac{1}{2}$ mal den über die Ecken gemessenen Durchmesser der Muttern beträgt;

c $= 0{,}962$, wenn die Stehbolzen oder Anker zu beiden Seiten der Platte mit Muttern und Unterlagscheiben versehen sind und die äuſsere Unterlagscheibe mit der Platte vernietet ist, ihre Dicke mindestens $\frac{3}{4}$ der Plattendicke und ihr Durchmesser wenigstens 0,6 mal der Entfernung zwischen den Stehbolzen oder Ankerreihen gleichkommt;

d den Durchmesser einer runden Platte in cm, dann ist

1. wenn die Platten an der einen Seite mit den Heizgasen an der anderen Seite mit dem Wasser in Berührung stehen:

$$s = 0{,}15 + e\sqrt{\frac{p\,c}{K_z}} \text{ oder } p = \frac{(s - 0{,}15)^2 K_z}{e^2 c};$$

2. wenn die Platten an der einen Seite mit den Heizgasen, an der anderen Seite mit dem Dampfe in Berührung stehen, ohne daſs die Platten durch Flammenbleche geschützt sind:

$$s = 0{,}3 + e\sqrt{\frac{p\,c}{0{,}9\,K_z}} \text{ oder } p = \frac{(s - 0{,}3)^2\, 0{,}9\, K_z}{e^2 c};$$

3. wenn die Platten von den Heizgasen nicht berührt werden, z. B. Domböden, freiliegende Stirnplatten u. s. w.:

$$s = e\sqrt{\frac{p\,c}{K_z}} \text{ oder } p = \frac{s^2 K_z}{e^2 c};$$

4. für nicht feuerberührte runde Platten, flach aufgenietete oder eingeschweiſste Domböden u. s. w. ist:

$$s = 0{,}7\, d\sqrt{\frac{p}{K_z}} \text{ oder } p = \frac{s^2 K_z}{0{,}49\, d^2};$$

5) für nicht feuerberührte, gekrempte Domböden ist:

$$s = 0{,}6\, d\sqrt{\frac{p}{K_z}} \text{ oder } p = \frac{s^2 K_z}{0{,}36\, d^2}.$$

Berechnung der Blechdicke gewölbter Böden.

Wirkt der Druck im Inneren der Wölbung, und ist

s die Blechdicke in cm;
p der gröſste Betriebs-Ueberdruck in kg f. d. qcm;
r der Halbmesser des Wölbungskreises in cm;
k_z die zulässige Belastung des Materiales in kg f. d. qcm, u. zw.

bis zu 400 kg f. d. qcm für Schweiſs- und Fluſseisen,
„ „ 250 „ „ „ Kupfer,

dann ist:

$$s = \frac{p\,r}{2\,k} \text{ oder } p = \frac{2\,s\,k}{r}.$$

Tafeln über die Blechdicken und Durchmesser der Dampfkessel-Mäntel mit innerem Druck.*)

$$s = \frac{\mathfrak{S}\, d\, p}{2\, K_z\, \varphi}.$$

1. Dampfkessel mit einreihiger Längsnaht (Ueberlappungs-Nietung).

Bemerkung: Folgender Tafel sind die Werte $\mathfrak{S} = 5$, $K_z = 3000$ kg f. d. qcm und $\varphi = 0{,}56$ zu grunde gelegt. Je nach den örtlichen Betriebseinflüssen ist ein Zuschlag zur Blechdicke zu empfehlen; notwendig ist ein solcher, wenn die Rechnung eine Blechdicke unter 10 mm ergiebt.

Blechdicke	Dampfüberdruck in kg f. d. qcm:																												
	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15
mm	Größter zulässiger Durchmesser in mm:																												
7	4704	3136	2352	1882	1568	1344	1176	1045	941	855	784	723	672	627	588	553	522	495	470	448	427	409	392	376	361	348	336	324	313
7,5	5050	3360	2520	2016	1680	1440	1260	1120	1008	916	840	775	720	672	630	592	560	530	504	480	458	438	420	403	387	373	360	347	336
8	—	3584	2688	2150	1792	1536	1344	1194	1075	977	886	827	768	716	672	632	597	565	537	512	488	467	448	430	413	398	384	370	358
8,5	—	3808	2856	2284	1904	1632	1428	1269	1142	1038	952	878	816	761	714	672	634	601	571	544	519	496	476	456	439	423	408	393	380
9	—	4032	3024	2419	2016	1728	1512	1344	1209	1099	1008	930	864	806	756	711	672	636	604	576	549	525	504	483	465	448	432	417	403
9,5	—	4256	3192	2553	2128	1824	1596	1418	1277	1160	1064	982	912	851	798	751	709	672	638	608	580	555	532	510	491	472	456	440	425
10	—	4480	3360	2688	2240	1920	1680	1493	1344	1221	1120	1033	960	896	840	790	746	707	672	640	610	584	560	537	516	497	480	463	448
10,5	—	4704	3528	2822	2352	2016	1764	1567	1411	1282	1176	1085	1008	940	882	830	784	742	705	672	641	613	588	564	542	522	504	486	470
11	—	4928	3696	2956	2464	2112	1848	1642	1478	1344	1232	1137	1056	985	924	869	821	778	739	704	672	642	616	591	568	547	528	509	492
11,5	—	5152	3864	3091	2576	2208	1932	1717	1545	1405	1288	1188	1104	1030	966	909	858	813	772	736	702	672	644	618	594	572	552	532	515
12	—	—	4032	3225	2688	2304	2016	1791	1613	1466	1344	1240	1152	1075	1008	948	896	848	806	768	733	701	672	645	620	597	576	556	537
12,5	—	—	4200	3360	2800	2400	2100	1866	1680	1527	1400	1292	1200	1120	1050	988	933	884	840	800	763	730	700	672	646	622	600	579	560
13	—	—	4368	3494	2912	2496	2184	1941	1747	1588	1456	1344	1248	1164	1092	1027	970	919	873	832	794	759	728	698	672	647	624	602	582

*) Tafeln über die Blechdicken ebener Platten s. Hamburger Normen 1891.

2. Dampfkessel mit doppelreihiger

Bemerkung: Folgender Tafel sind die Werte $\mathfrak{S}=5$, $K_z=3000$ kg
Betriebseinflüssen ist ein Zuschlag zur Blechdicke zu empfehlen;
10 mm

Blech-dicke. mm	Dampf-Ueberdruck													
	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	Gröſster zulässiger Durch-													
7	5880	3920	2940	2352	1960	1680	1470	1306	1176	1069	980	904	840	784
7,5	—	4200	3150	2520	2100	1800	1575	1400	1260	1145	1050	969	900	840
8	—	4480	3360	2688	2240	1920	1680	1493	1344	1221	1120	1033	960	896
8,5	—	4760	3570	2856	2380	2040	1785	1586	1428	1298	1190	1098	1020	952
9	—	5040	3780	3024	2520	2160	1890	1680	1512	1374	1260	1163	1080	1008
9,5	—	—	3990	3192	2660	2280	1995	1773	1590	1450	1330	1227	1140	1064
10	—	—	4200	3360	2800	2400	2100	1866	1680	1527	1400	1292	1200	1120
10,5	—	—	4410	3528	2940	2520	2205	1960	1764	1603	1470	1356	1260	1176
11	—	—	4620	3696	3080	2640	2310	2053	1848	1680	1540	1421	1320	1232
11,5	—	—	4830	3864	3220	2760	2415	2146	1932	1756	1610	1486	1380	1288
12	—	—	5040	4032	3360	2880	2520	2240	2016	1832	1680	1550	1440	1344
12,5	—	—	—	4200	3500	3000	2625	2333	2100	1909	1750	1615	1500	1400
13	—	—	—	4368	3640	3120	2730	2426	2184	1985	1820	1680	1560	1456
13,5	—	—	—	4536	3780	3240	2835	2520	2268	2061	1890	1744	1620	1512
14	—	—	—	4704	3920	3360	2940	2613	2352	2138	1960	1809	1680	1568
14,5	—	—	—	4872	4060	3480	3045	2706	2436	2214	2030	1873	1740	1624
15	—	—	—	5040	4200	3600	3150	2800	2520	2290	2100	1938	1800	1680
15,5	—	—	—	—	4340	3720	3255	2893	2604	2367	2170	2003	1860	1736
16	—	—	—	—	4480	3840	3360	2986	2688	2443	2240	2067	1920	1792
16,5	—	—	—	—	4620	3960	3465	3080	2772	2520	2310	2132	1980	1848
17	—	—	—	—	4760	4080	3570	3173	2856	2596	2380	2196	2040	1904
17,5	—	—	—	—	4900	4200	3675	3266	2940	2672	2450	2261	2100	1960
18	—	—	—	—	5040	4320	3780	3360	3024	2749	2520	2326	2160	2016
18,5	—	—	—	—	—	4440	3885	3453	3108	2825	2590	2390	2220	2072
19	—	—	—	—	—	4560	3990	3546	3192	2901	2660	2455	2280	2128
19,5	—	—	—	—	—	4680	4095	3640	3276	2978	2730	2520	2340	2184
20	—	—	—	—	—	4800	4200	3733	3360	3054	2800	2584	2400	2240
20,5	—	—	—	—	—	4920	4305	3826	3444	3130	2870	2649	2460	2296
21	—	—	—	—	—	5040	4410	3920	3528	3207	2940	2713	2520	2352
21,5	—	—	—	—	—	—	4515	4013	3612	3283	3010	2778	2580	2408
22	—	—	—	—	—	—	4620	4106	3696	3360	3080	2843	2640	2464
22,5	—	—	—	—	—	—	4725	4200	3780	3436	3150	2907	2700	2520
23	—	—	—	—	—	—	4830	4293	3864	3512	3220	2972	2760	2576
23,5	—	—	—	—	—	—	4935	4386	3948	3589	3290	3036	2820	2632
24	—	—	—	—	—	—	5040	4480	4032	3665	3360	3101	2880	2688
24,5	—	—	—	—	—	—	—	4573	4116	3741	3430	3166	2940	2744
25	—	—	—	—	—	—	—	4666	4200	3818	3500	3230	3000	2800
25,5	—	—	—	—	—	—	—	4760	4284	3894	3570	3295	3060	2856
26	—	—	—	—	—	—	—	4853	4368	3970	3640	3360	3120	2912
26,5	—	—	—	—	—	—	—	4946	4452	4047	3710	3424	3180	2968
27	—	—	—	—	—	—	—	5040	4536	4123	3780	3489	3240	3024
27,5	—	—	—	—	—	—	—	—	4620	4200	3850	3553	3300	3080
28	—	—	—	—	—	—	—	—	4704	4276	3920	3618	3360	3136
28,5	—	—	—	—	—	—	—	—	4788	4352	3990	3683	3420	3192
29	—	—	—	—	—	—	—	—	4872	4429	4060	3747	3480	3248
29,5	—	—	—	—	—	—	—	—	4956	4505	4130	3812	3540	3304
30	—	—	—	—	—	—	—	—	5040	4581	4200	3876	3600	3360

Längsnaht (Ueberlappungs-Nietung).

f. d. qcm und $\varphi = 0{,}70$ zu grunde gelegt. Je nach den örtlichen notwendig ist ein solcher, wenn die Rechnung eine Blechdicke unter ergiebt.

in kg f. d. qcm:															Blechdicke.
8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15	
messer in mm:															mm
735	691	653	618	558	560	534	511	490	470	452	435	420	405	392	7
787	741	700	663	630	600	572	547	525	504	484	466	450	434	420	7,5
840	790	746	707	672	640	610	584	560	537	516	497	480	463	448	8
892	840	793	751	714	680	649	620	595	571	549	528	510	492	476	8,5
945	889	840	795	756	720	687	657	630	604	581	560	540	521	504	9
997	938	886	840	798	760	725	693	665	638	613	591	570	550	532	9,5
1050	988	933	884	840	800	763	730	700	672	646	622	600	579	560	10
1102	1037	980	928	882	840	801	766	735	705	678	653	630	608	588	10.5
1155	1087	1026	972	924	880	840	803	770	739	710	684	660	637	616	11
1207	1136	1073	1016	966	920	878	840	805	772	742	715	690	666	644	11,5
1260	1185	1120	1061	1003	960	916	876	840	806	775	746	720	695	672	12
1312	1235	1166	1105	1050	1000	954	913	875	840	807	777	750	724	700	12,5
1365	1284	1213	1149	1092	1040	992	949	910	873	840	808	780	753	728	13
1417	1334	1260	1193	1134	1080	1030	986	945	907	872	840	810	782	756	13,5
1470	1383	1306	1237	1176	1120	1069	1022	980	940	904	871	840	810	784	14
1522	1432	1353	1282	1218	1160	1107	1059	1015	974	936	902	870	840	812	14,5
1575	1482	1400	1326	1260	1200	1145	1095	1050	1008	969	933	900	868	840	15
1627	1531	1446	1370	1302	1240	1183	1132	1085	1041	1001	964	930	897	868	15.5
1680	1581	1493	1414	1344	1280	1221	1168	1120	1075	1033	995	960	926	896	16
1732	1630	1540	1458	1386	1320	1260	1205	1155	1108	1066	1026	990	955	924	16.5
1785	1680	1586	1503	1428	1360	1298	1241	1190	1142	1098	1057	1020	984	952	17
1837	1729	1633	1547	1470	1400	1336	1278	1225	1176	1130	1088	1050	1013	980	17,5
1890	1778	1680	1591	1512	1440	1374	1314	1260	1209	1163	1120	1080	1042	1008	18
1942	1828	1726	1635	1554	1480	1412	1351	1295	1243	1195	1151	1110	1071	1036	18,5
1995	1877	1773	1680	1596	1520	1450	1387	1330	1276	1227	1182	1140	1100	1064	19
2047	1927	1820	1724	1638	1560	1489	1424	1365	1310	1260	1213	1170	1129	1092	19,5
2100	1976	1866	1768	1680	1600	1527	1460	1400	1344	1292	1244	1200	1158	1120	20
2152	2025	1913	1812	1722	1640	1565	1497	1435	1377	1324	1275	1230	1187	1148	20.5
2205	2075	1960	1856	1764	1680	1603	1533	1470	1411	1356	1306	1260	1216	1176	21
2252	2124	2006	1901	1806	1720	1641	1570	1505	1444	1389	1337	1290	1245	1204	21,5
2310	2174	2053	1945	1848	1760	1680	1606	1540	1478	1421	1368	1320	1274	1232	22
2362	2223	2100	1989	1890	1800	1718	1643	1575	1512	1453	1400	1350	1303	1260	22,5
2415	2272	2146	2033	1932	1840	1756	1680	1610	1545	1486	1431	1380	1332	1288	23
2467	2322	2193	2077	1974	1880	1794	1716	1645	1579	1519	1402	1410	1361	1316	23.5
2520	2371	2240	2122	2016	1920	1832	1753	1680	1612	1551	1493	1440	1390	1344	24
2572	2421	2286	2166	2058	1960	1870	1789	1715	1646	1583	1524	1470	1419	1372	24,5
2625	2470	2333	2210	2100	2000	1909	1826	1750	1680	1615	1555	1500	1448	1400	25
2677	2520	2380	2254	2142	2040	1947	1862	1785	1713	1647	1586	1530	1477	1428	25,5
2730	2569	2426	2298	2184	2080	1985	1899	1820	1747	1680	1617	1560	1506	1456	26
2782	2618	2473	2343	2226	2120	2023	1935	1855	1780	1712	1648	1590	1535	1484	26,5
2835	2668	2520	2387	2268	2160	2061	1972	1890	1814	1744	1680	1620	1564	1512	27
2887	2717	2566	2431	2310	2200	2100	2008	1925	1848	1776	1711	1650	1593	1540	27,5
2940	2767	2613	2475	2352	2240	2138	2045	1960	1881	1809	1742	1680	1622	1568	28
2992	2816	2660	2520	2394	2280	2176	2081	1995	1915	1841	1773	1710	1651	1596	28.5
3045	2865	2706	2564	2436	2320	2214	2118	2030	1948	1873	1804	1740	1680	1624	29
3097	2915	2753	2608	2478	2360	2252	2154	2065	1982	1906	1835	1770	1708	1652	29,5
3150	2964	2800	2652	2520	2400	2290	2191	2100	2016	1938	1866	1800	1737	1680	30

Tafel der Wandstärken von Flammrohren.

(s in mm; über die Länge l s. S. 758.)

Länge l. mm	Durchmesser d. mm	Gröfster Betriebs-Ueberdruck p in kg f. d. qcm.																			
		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12	
		Ü	G	Ü	G	Ü	G	Ü	G	Ü	G	Ü	G	Ü	G	Ü	G	Ü	G	Ü	G
Länge l = 500 mm.	500	7	7	7	7	7	7	7,5	7	7,5	7	7,5	7	8	7,5	9	8,5	9,5	9	10	9,5
	550	7	7	7	7	7,5	7	8	7	8	7,5	8	7,5	8,5	8	9,5	9	10	9,5	11	10
	600	7	7	7	7	7,5	7	8	7,5	8,5	8	8,5	8	9,5	9	10	9,5	11	10	11,5	11
	650	7	7	7	7	8	7,5	8,5	8	9	8,5	9,5	8,5	10	9,5	11	10	11,5	11	12,5	11,5
	700	7	7	7,5	7	8,5	8	9	8,5	9,5	9	10	9	10,5	10	11,5	11	12,5	11,5	13	12,5
	750	7	7	8	7,5	9	8,5	9,5	9	10	9,5	10,5	9,5	11	10,5	12,5	11,5	13	12,5	14	13
	800	7	7	8,5	8	9,5	9	10	9,5	10,5	10	11	10	12	11	13	12	14	13	14,5	14
	850	7,5	7	8,5	8	10	9,5	10,5	10	11	10,5	11,5	11	12,5	12	13,5	12,5	14,5	14	15,5	14,5
	900	7,5	7	9	8,5	10	9,5	11	10	11,5	11	12	11,5	13	12,5	14	13,5	15	14,5	16	15,5
	950	8	7,5	9,5	9	10,5	10	11,5	10,5	12	11	12,5	12	13,5	13	15	14	16	15	17	16
	1000	8	7,5	9,5	9	11	10,5	12	11	12,5	11,5	13	12,5	14	13,5	15,5	15	16,5	16	—	17
	1050	8,5	8	10	9,5	11,5	10,5	12	11,5	13	12	13,5	13	15	14	16	15,5	17,5	16,5	—	—
	1100	8,5	8	10	9,5	11,5	11	12,5	12	13,5	12,5	14	13,5	15,5	14,5	17	16	—	17	—	—
	1150	9	8,5	10,5	10	12	11,5	13	12	14	13	14,5	14	16	15	—	16,5	—	—	—	—
	1200	9	8,5	11	10	12,5	11,5	13,5	12,5	14,5	13,5	15	14,5	16,5	16	—	17	—	—	—	—
	1250	9,5	9	11	10,5	12,5	12	13,5	13	15	14	15,5	15	17	16,5	—	—	—	—	—	—
	1300	10	9	11,5	11	13	12,5	14	13,5	15,5	14,5	16	15,5	—	17	—	—	—	—	—	—
Länge l = 1000 mm	500	7	7	7	7	7,5	7	8	7,5	8	7,5	8,5	7,5	9	8	9,5	9	10	9,5	10,5	10
	550	7	7	7	7	8	7,5	8,5	8	8,5	8	9	8	10	9	10	9,5	11	10	11,5	11
	600	7	7	7,5	7	8,5	8	9	8,5	9	8,5	9,5	9	10,5	9,5	11	10,5	12	11	12,5	12
	650	7	7	8	7,5	9	8,5	9,5	9	10	9	10	9,5	11	10,5	12	11	13	12	13,5	12,5
	700	7,5	7	8,5	8	9,5	9	10	9,5	10,5	10	11	10	12	11	13,5	12,5	13,5	13	14,5	13,5
	750	7,5	7	9	8,5	10	9,5	10,5	10	11	10,5	11,5	11	12,5	11,5	14	13,5	14,5	13,5	15,5	14,5
	800	8	7,5	9	8,5	10,5	9,5	11	10,5	11,5	11	12	11,5	13	12,5	15	14	15	14	16	15
	850	8,5	8	9,5	9	11	10	11,5	11	12	11,5	13	12	14	13	16	15	16	15	17	16
	900	8,5	8	10	9,5	11,5	10,5	12	11,5	13	12	13,5	12,5	14,5	13,5	16,5	15,5	17	16	—	17
	950	9	8,5	10,5	10	12	11	12,5	12	13,5	12,5	14	13	15	14,5	17	16	17,5	16,5	—	—
	1000	9	8,5	11	10	12,5	11,5	13	12,5	14	13	15	14	16	15	—	17	—	17,5	—	—
	1050	9,5	9	11,5	10,5	13	12	13,5	13	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15,5	—	—	—	—	—	—
	1100	10	9	11,5	11	13	12,5	14	13	15	14	16	15	17,5	16,5	—	—	—	—	—	—
	1150	10	9,5	12	11	13,5	13	14,5	13,5	16	14,5	17	15,5	—	17	—	—	—	—	—	—
	1200	10,5	10	12,5	11,5	14	13	15	14	16,5	15	17,5	16	—	—	—	—	—	—	—	—
	1250	10,5	10	13	12	14,5	13,5	13,5	14,5	17	16	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—
	1300	11	10,5	13	12	15	14	16	15	17,5	16	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—
Länge l = 1500 mm.	500	7	7	7	7	7,5	7	8	7,5	8,5	8	8,5	8	9	8,5	10	9	10,5	10	11	10,5
	550	7	7	7,5	7	8,5	8	8,5	8	9	8,5	9	8,5	10	9,5	10,5	10	11,5	10,5	12	11,5
	600	7	7	8	7,5	9	8,5	9	8,5	9,5	9	10	9	11	10	11,5	11	12,5	11,5	13	12,5
	650	7,5	7	8,5	8	9,5	9	10	9	10	9,5	10,5	10	11,5	11	12,5	11,5	13,5	12,5	14	13
	700	7,5	7	9	8,5	10	9,5	10,5	10	11	10	11,5	10,5	12,5	11,5	13,5	12,5	14	13,5	15	14
	750	8	7,5	9,5	8,5	10,5	10	11	10,5	11,5	11	12	11,5	13	12,5	14,5	13,5	15	14	16	15
	800	8,5	8	10	9	11	10,5	11,5	11	12	11,5	13	12	14	13	15	14	16	15	17	16
	850	9	8	10	9,5	11,5	11	12	11,5	13	12	13,5	12,5	14,5	13,5	16	15	17	16	—	17
	900	9,5	8,5	10,5	10	12	11	13	12	13,5	12,5	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15,5	—	16,5	—	—
	950	9,5	9	11	10,5	12,5	11,5	13,5	12,5	14	13,5	15	14	16	15	17,5	16,5	—	17,5	—	—
	1000	10	9	11,5	10,5	13	12	14	13	15	14	15,5	14,5	17	16	—	17	—	—	—	—
	1050	10	9,5	12	11	13,5	12,5	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15	—	16,5	—	—	—	—	—	—
	1100	10,5	10	12,5	11,5	14	13	15	14	16	15	17	16	—	17	—	—	—	—	—	—
	1150	11	10	13	12	14,5	13,5	15,5	14,5	17	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—
	1200	11,5	10,5	13	12,5	15	14	16	15	17,5	16	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—
	1250	11,5	11	13,5	12,5	15,5	14,5	16,5	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1500	12	11	14	13	16	15	17	16	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Tafel der Wandstärken von Flammrohren.

(*s* in mm; über die Länge *l* s. S. 758.)

Länge *l* mm	Durchmesser *d* mm	Größter Betriebs-Ueberdruck *p* in kg f. d. qcm.																			
		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12	
		Ü	*G*	*Ü*	*G*	*Ü*	*G*	*Ü*	*G*	*Ü*	*G*	*Ü*	*G*	*Ü*	*G*	*Ü*	*G*	*Ü*	*G*	*Ü*	*G*
Länge *l* = 2000 mm.	500	7	7	7	7	8	7,5	8,5	8	8,5	8	9	8	9,5	9	10	9,5	10,5	10	11,5	10,5
	550	7	7	7,5	7	8,5	8	9	8,5	9	8,5	9,5	8,5	10	9,5	11	10	11,5	11	12,5	11,5
	600	7	7	8	7,5	9	8,5	9,5	9	10	9	10	9,5	11	10,5	12	11	12,5	12	13,5	12,5
	650	7,5	7	8,5	8	9,5	9	10	9,5	10,5	10	11	10	12	11	13	12	13,5	12,5	14,5	13,5
	700	8	7,5	9	8,5	10	9,5	11	10	11,5	10,5	12	11	12,5	12	13,5	12,5	14,5	13,5	15,5	14,5
	750	8,5	7,5	9,5	9	10,5	10	11,5	10,5	12	11	12,5	11,5	13,5	12,5	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15,5
	800	8,5	8	10	9,5	11	10,5	12	11	12,5	12	13,5	12,5	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15,5	17,5	10,5
	850	9	8,5	10,5	10	12	11	12,5	12	13,5	12,5	14	13	15	14	16,5	15	17,5	16,5	—	17,5
	900	9,5	9	11	10	12,5	11,5	13,5	12,5	14	13	15	13,5	16	15	17	16,5	—	17	—	—
	950	10	9	11,5	10,5	13	12	14	13	14,5	13,5	15,5	14,5	17	15,5	—	17	—	—	—	—
	1000	10	9,5	12	11	13,5	12,5	14,5	13,5	15,5	14,5	16	15	—	16,5	—	—	—	—	—	—
	1050	10,5	10	12,5	11,5	14	13	15	14	16	15	17	16	—	17	—	—	—	—	—	—
	1100	11	10	13	12	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—
	1150	11,5	10,5	13,5	12,5	15	14	16	15	17	16	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—
	1200	11,5	11	13,5	12,5	15,5	14,5	17	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1250	12	11	14	13	16	15	—	16	—	17,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1300	12,5	11,5	14,5	13,5	16,5	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Länge *l* = 2500 mm.	500	7	7	7	7	8	7,5	8,5	8	8,5	8	9	8	9,5	9	10	9,5	11	10	11,5	10,5
	550	7	7	7,5	7	8,5	8	9	8,5	9,5	8,5	9,5	9	10,5	9,5	11	10,5	12	11	12,5	11,5
	600	7	7	8	7,5	9	8,5	9,5	9	10	9,5	10,5	9,5	11	10,5	12	11	13	12	13,5	12,5
	650	7,5	7	8,5	8	10	9	10	9,5	10,5	10	11	10,5	12	11	13	12	14	13	14,5	13,5
	700	8	7,5	9	8,5	10,5	9,5	11	10	11,5	10,5	12	11	13	12	14	13	15	14	15,5	14,5
	750	8,5	8	9,5	9	11	10	11,5	11	12	11,5	13	12	14	13	15	14	16	15	17	15,5
	800	9	8	10	9,5	11,5	10,5	12	11,5	13	12	13,5	12,5	14,5	13,5	16	14,5	17	15,5	—	16,5
	850	9,5	8,5	10,5	10	12	11,5	13	12	13,5	12,5	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15,5	—	16,5	—	17,5
	900	9,5	9	11	10,5	12,5	12	13,5	12,5	14,5	13,5	15	14	16,5	15	17,5	16,5	—	17,5	—	—
	950	10	9,5	11,5	11	13	12,5	14	13	15	14	16	15	17	16	—	17	—	—	—	—
	1000	10,5	9,5	12	11,5	13,5	13	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15,5	—	17	—	—	—	—	—	—
	1050	11	10	12,5	12	14	13,5	15,5	14,5	16,5	15	17,5	16	—	—	—	—	—	—	—	—
	1100	11	10,5	13	12	15	14	16	15	17	16	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—
	1150	11,5	10,5	13,5	12,5	15,5	14,5	16,5	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1200	12	11	14	13	16	15	17	16	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1250	12,5	11,5	14,5	13,5	16,5	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1300	13	12	15	14	17	16	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Länge *l* = 3000 mm und darüber.	500	7	7	7	7	8	7,5	8,5	8	8,5	8	9	8	9,5	9	10	9,5	11	10	11,5	11
	550	7	7	7,5	7	8,5	8	9	8,5	9,5	8,5	9,5	9	10,5	9,5	11	10,5	12	11	12,5	12
	600	7	7	8	7,5	9	8,5	9,5	9	10	9,5	10,5	9,5	11,5	10,5	12	11,5	13	12	13,5	13
	650	7,5	7	9	8	10	9	10,5	9,5	11	10	11,5	10,5	12	11,5	13	12	14	13	15	14
	700	8	7,5	9,5	8,5	10,5	9,5	11	10,5	11,5	10,5	12	11	13	12	14	13	15	14	16	15
	750	8,5	8	10	9	11	10,5	11,5	11	12	11,5	13	12	14	13	15	14	16	15	17	16
	800	9	8	10,5	9,5	11,5	11	12,5	11,5	13	12	13,5	12,5	15	14	16	15	17	16	—	17
	850	9,5	8,5	11	10	12,5	11,5	13	12	13,5	13	14,5	13,5	15,5	14,5	17	15,5	—	17	—	—
	900	10	9	11,5	10,5	13	12	13,5	12,5	14,5	13,5	15,5	14	16,5	15,5	—	16,5	—	—	—	—
	950	10	9,5	12	11	13,5	12,5	14,5	13,5	15	14	16	15	17,5	16,5	—	17	—	—	—	—
	1000	10,5	10	12,5	11,5	14	13	15	14	16	15	17	15,5	—	17	—	—	—	—	—	—
	1050	11	10	13	12	14,5	13,5	15,5	14,5	16,5	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—
	1100	11,5	10,5	13,5	12,5	15	14	16	15	17	16	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—
	1150	12	11	14	13	15,5	14,5	17	15,5	—	16,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1200	12	11,5	14,5	13,5	16	15	—	16,5	—	17,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1250	12,5	11,5	15	13,5	17	15,5	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1300	13	12	15,5	14	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Tafel für die Vernietung

(Anhang zu den

s = Blechdicke, *d* = Nietdurchmesser, *t* = Nietteilung in mm,

Einschnittige Nietung.

s	Schweißeisen-Niete in Schweißeisen-Blech. d	t	φ	Flußeisen-Niete in Flußeisen-Blech. d	t	φ	Schweißeisen-Niete in Flußeisen-Blech. d	t	φ
Einfache Naht.									
7	16	44	0,64	17	44	0,61	17	41	0,59
8	17	45	0,62	18	45	0,60	18	42	0,57
9	18	46	0,61	19	46	0,59	19	43	0,56
10	19	47	0,60	20	47	0,57	20	44	0,55
11	20	49	0,59	21	48	0,56	21	45	0,53
12	21	50	0,58	22	49	0,55	22	46	0,52
13	22	51	0,57	23	50	0,54	23	47	0,51
14	23	52	0,56	24	51	0,53	24	48	0,50
15	24	54	0,55	25	53	0,52	25	49	0,49
16	25	55	0,54	26	54	0,52	26	51	0,48
17	26	57	0,54	27	55	0,51	27	52	0,48
18	27	60	0,53	28	57	0,51	28	53	0,47
Zweifache Naht.									
8	15	59	0,74	16	58	0,72	16	54	0,70
9	16	60	0,73	17	60	0,71	17	55	0,69
10	17	62	0,73	18	61	0,70	18	56	0,68
11	18	64	0,72	19	63	0,69	19	58	0,67
12	19	66	0,71	20	65	0,69	20	59	0,66
13	20	68	0,71	21	66	0,68	21	61	0,66
14	21	70	0,70	22	68	0,68	22	63	0,65
15	22	72	0,70	23	70	0,67	23	65	0,65
16	23	75	0,69	24	72	0,67	24	66	0,64
17	24	77	0,69	25	74	0,67	25	68	0,63
18	25	80	0,69	26	76	0,67	26	70	0,63
19	26	82	0,69	27	78	0,66	27	72	0,63
20	27	84	0,68	28	80	0,66	28	74	0,62
Dreifache Naht.									
12	17	74	0,77	18	72	0,75	18	65	0,73
13	18	77	0,76	19	74	0,74	19	68	0,72
14	19	80	0,76	20	77	0,74	20	70	0,71
15	20	83	0,76	21	80	0,74	21	73	0,71
16	21	85	0,75	22	82	0,74	22	75	0,71

*) Die von F. Prohmann berechneten Tafeln enthalten Werte, welche bewährten sondern sollen nur einen gewissen Anhalt für die Bemessung der Nietungen

von Dampfkesseln.*)

Hamburger Normen.)

φ = Festigkeitsverhältnis der Naht zum vollen Bleche.

Zweischnittige Nietung.

	Schweißeisen-Niete in Schweißeisen-Blech.			Flußeisen-Niete in Flußeisen-Blech.			Schweißeisen-Niete in Flußeisen-Blech.		
s	*d*	*t*	φ	*d*	*t*	φ	*d*	*t*	φ
				Einfache Naht.					
7	14	52	0,75	15	53	0,72	15	48	0,69
8	15	53	0,72	16	54	0,70	16	49	0,68
9	16	55	0,71	17	55	0,69	17	50	0,66
10	17	56	0,70	18	56	0,68	18	51	0,65
11	18	58	0,69	19	58	0,67	19	53	0,64
12	19	60	0,68	20	59	0,66	20	54	0,63
13	20	62	0,68	21	61	0,65	21	55	0,62
14	21	64	0,67	22	63	0,65	22	57	0,61
15	22	66	0,67	23	65	0,65	23	59	0,61
16	23	68	0,66	24	66	0,64	24	61	0,61
17	24	71	0,66	25	68	0,63	25	63	0,60
18	25	73	0,66	26	70	0,63	26	64	0,59
				Zweifache Naht.					
8	13	71	0,82	14	72	0,81	14	65	0,78
9	14	74	0,81	15	74	0,80	15	66	0,77
10	15	77	0,81	16	76	0,79	16	68	0,76
11	16	80	0,80	17	79	0,78	17	71	0,76
12	17	83	0,79	18	82	0,78	18	73	0,75
13	18	86	9,79	19	85	0,77	19	76	0,75
14	19	90	0,79	20	87	0,77	20	78	0,74
15	20	93	0,79	21	90	0,76	21	81	0,74
16	21	96	0,78	22	93	0,76	22	84	0,74
17	22	100	0,78	23	96	0,76	23	86	0,73
18	23	104	0,78	24	99	0,76	24	89	0,73
19	24	107	0,77	25	102	0,75	25	92	0,73
20	25	111	0,77	26	106	0,75	26	95	0,73
				Dreifache Naht.					
12	15	92	0,84	16	92	0,83	16	82	0,81
13	16	97	0,84	17	96	0,82	17	85	0,80
14	17	102	0,83	18	100	0,82	18	89	0,80
15	18	107	0,83	19	104	0,82	19	93	0,80
16	19	112	0,83	20	108	0,81	20	97	0,80

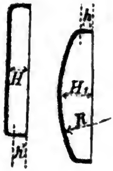
praktischen Ausführungen entsprechen. Sie geben keine bindenden Vorschriften, bieten.

Einschnittige Nietung.

	Schweifseisen-Niete in Schweifseisen-Blech.			Flufseisen-Niete in Flufseisen-Blech.			Schweifseisen-Niete in Flufseisen-Blech.		
s	*d*	*t*	*φ*	*d*	*t*	*φ*	*d*	*t*	*φ*
Dreifache Naht.									
17	22	89	0,75	23	85	0,73	23	78	0,71
18	23	92	0,75	24	88	0,73	24	80	0,70
19	24	95	0,75	25	91	0,73	25	83	0,70
20	25	99	0,75	26	94	0,72	26	86	0,70
21	26	102	0,75	27	97	0,72	27	88	0,69
22	27	105	0,74	28	99	0,72	28	91	0,69
23	28	108	0,74	29	102	0,72	29	94	0,69
24	29	112	0,74	30	105	0,72	30	96	0,69
25	30	115	0,74	31	108	0,71	31	99	0,69
26	31	118	0,74	32	112	0,71	32	101	0,68
27	32	121	0,73	33	114	0,71	33	104	0,68
28	33	124	0,73	34	117	0,71	34	106	0,68
Vierfache Naht.									
15	18	85	0,78	19	83	0,77	19	75	0,75
16	19	89	0,78	20	87	0,77	20	79	0,74
17	20	94	0,78	21	90	0,77	21	82	0,74
18	21	98	0,78	22	93	0,76	22	85	0,74
19	22	102	0,78	23	97	0,76	23	89	0,74
20	23	106	0,78	24	101	0,76	24	92	0,74
21	24	110	0,78	25	105	0,76	25	95	0,74
22	25	114	0,78	26	109	0,76	26	98	0.73
23	26	118	0,78	27	112	0,76	27	102	0,73
24	27	122	0,78	28	115	0,76	28	105	0,73
25	28	127	0,78	29	119	0,76	29	108	0,73
26	29	131	0,78	30	123	0,76	30	112	0,73
27	30	135	0,78	31	126	0,76	31	115	0,73
28	31	139	0,77	32	130	0,75	32	118	0,73
29	32	143	0,77	33	133	0,75	33	121	0,73
30	33	147	0,77	34	137	0,75	34	124	0,73
Fünffache Naht.									
18	19	97	0,80	20	93	0,78	20	85	0,77
19	20	102	0,80	21	98	0,78	21	90	0,77
20	21	107	0,80	22	103	0,78	22	93	0,77
21	22	112	0,80	23	107	0,78	23	97	0,77
22	23	117	0,80	24	111	0,78	24	101	0,77
23	24	122	0,80	25	116	0,78	25	105	0,76
24	25	127	0,80	26	120	0,78	26	109	0,76
25	26	132	0,80	27	124	0,78	27	113	0,76
26	27	137	0,80	28	129	0,78	28	116	0,76
27	28	142	0,80	29	133	0,78	29	121	0,76
28	29	147	0,80	30	138	0,78	30	125	0,76
29	30	152	0,80	31	143	0,78	31	128	0,76
30	31	157	0,80	32	146	0,78	32	132	0,76
31	32	162	0,80	33	150	0,78	33	136	0,76
32	33	167	0,80	34	154	0,78	34	141	0,76
33	34	172	0,80	35	159	0,78	35	145	0,75
34	35	176	0,80	36	163	0,78	36	148	0,75
35	36	181	0,80	37	167	0,78	37	152	0,75
36	37	186	0,80	38	172	0,77	38	156	0,75

Zweischnittige Nietung.

s	Schweißeisen-Niete in Schweißeisen-Blech. *d*	*t*	*φ*	Flußeisen-Niete in Flußeisen-Blech. *d*	*t*	*φ*	Schweißeisen-Niete in Flußeisen-Blech. *d*	*t*	*φ*
Dreifache Naht.									
17	20	117	0,83	21	113	0,81	21	100	0,79
18	21	122	0,83	22	117	0,81	22	104	0,79
19	22	127	0,83	23	121	0,81	23	108	0,79
20	23	132	0,83	24	126	0,81	24	112	0,79
21	24	137	0,82	25	130	0,81	25	116	0,78
22	25	142	0,82	26	134	0,81	26	120	0,78
23	26	147	0,82	27	138	0,80	27	124	0,78
24	27	152	0,82	28	141	0,80	28	128	0,78
25	28	157	0,82	29	145	0,80	29	132	0,78
26	29	162	0,82	30	149	0,80	30	136	0,78
27	30	167	0,82	31	154	0,80	31	140	0,78
28	31	173	0,82	32	158	0,80	32	144	0,78
Vierfache Naht.									
15	16	110	0,86	17	108	0,84	17	96	0,82
16	17	116	0,85	18	113	0,84	18	101	0,82
17	18	123	0,85	19	110	0,84	19	106	0,82
18	19	129	0,85	20	125	0,84	20	111	0,82
19	20	136	0,85	21	130	0,84	21	116	0,82
20	21	142	0,85	22	136	0,84	22	121	0,82
21	22	149	0,85	23	142	0,84	23	126	0,82
22	23	155	0,85	24	148	0,84	24	131	0,82
23	24	162	0,85	25	153	0,84	25	136	0,82
24	25	168	0,85	26	159	0,84	26	141	0,82
25	26	174	0,85	27	165	0,84	27	146	0,82
26	27	181	0,85	28	170	0,84	28	151	0,81
27	28	188	0,85	29	176	0,84	29	156	0,81
28	29	194	0,85	30	181	0,83	30	161	0,81
29	30	200	0,85	31	187	0,83	31	166	0,81
30	31	207	0,85	32	193	0,83	32	171	0,81
Fünffache Naht.									
18	17	127	0,87	18	124	0,86	18	110	0,84
19	18	136	0,87	19	131	0,86	19	116	0,84
20	19	145	0,87	20	138	0,86	20	122	0,84
21	20	151	0,87	21	145	0,86	21	128	0,84
22	21	159	0,87	22	152	0,86	22	134	0,84
23	22	167	0,87	23	159	0,86	23	140	0,84
24	23	175	0,87	24	166	0,86	24	146	0,84
25	24	183	0,87	25	172	0,86	25	153	0,84
26	25	190	0,87	26	179	0,85	26	159	0,84
27	26	199	0,87	27	186	0,85	27	165	0,84
28	27	206	0,87	28	193	0,85	28	171	0,84
29	28	214	0,87	29	200	0,85	29	177	0,84
30	29	222	0,87	30	207	0,85	30	183	0,84
31	30	230	0,87	31	214	0,85	31	189	0,84
32	31	238	0,87	32	220	0,85	32	195	0,84
33	32	245	0,87	33	227	0,85	33	202	0,84
34	33	253	0,87	34	234	0,85	34	208	0,84
35	34	261	0,87	35	241	0,85	35	214	0,84
36	35	268	0,87	36	248	0,85	36	220	0,84



Umgezogene Böden,

flach und gewölbt,

mittelst maschineller Einrichtungen hergestellt.

Aeußerer Durchmesser. mm	Höhe des cylindrischen Teils der Krempe bei 10 mm Stärke und mehr. h mm	Ganze innere Höhe bei 10 mm Stärke und mehr. flach. H mm	Ganze innere Höhe bei 10 mm Stärke und mehr. gewölbt. H_1 mm	Halbmesser der inneren Wölbung. R mm	Blechstärke und annähernde Gewichte in kg. 6,5*	8*	10	11,5	13	16	20	25 mm
400	65	95	105	550	10	13	16	18	21	—	—	—
450	65	100	135	600	13	16	22	25	30	—	—	—
500	65	100	165	650	16	20	26	30	35	43	—	—
550	65	110	150	700	18	23	30	35	40	49	—	—
600	65	110	160	750	21	27	36	41	47	57	—	—
650	65	110	175	800	25	31	40	46	53	65	—	—
700	65	110	175	850	27	34	46	53	60	74	—	—
750	65	110	175	900	31	39	51	59	67	82	—	—
800	68	115	195	950	35	43	58	66	75	93	—	—
850	68	115	185	1000	40	50	65	73	83	102	—	—
900	68	115	205	1100	45	55	72	82	93	114	—	—
950	68	115	200	1200	49	61	78	90	101	125	—	—
1000	70	115	200	1300	51	64	81	94	109	130	—	—
1100	70	120	215	1400	61	77	98	115	130	160	—	—
1150	70	120	215	1450	70	85	107	122	138	170	213	—
1200	70	120	225	1500	75	93	116	134	152	187	233	—
1250	70	120	225	2000	80	100	125	145	165	205	250	—
1300	75	120	230	1600	85	105	135	155	180	220	270	—
1400	75	125	235	1700	98	120	155	178	202	248	310	—
1500	80	125	250	1800	110	138	175	201	228	286	356	—
1600	80	125	245	2000	130	170	200	230	260	355	400	—
1700	80	125	285	2200	—	—	222	255	290	365	445	—
1800	80	125	275	2400	—	—	—	—	343	400	495	—
1900	85	130	280	2600	—	—	—	—	355	435	545	—
2000	90	130	270	2800	—	—	—	—	390	480	600	750
2100	90	130	280	3300	—	—	—	—	—	530	660	830
2200	90	130	300	3300	—	—	—	—	—	580	725	910
2300	90	130	315	3300	—	—	—	—	—	635	795	1000
2400	90	130	370	3300	—	—	—	—	—	695	865	1080
2500	90	130	350	3300	—	—	—	—	—	760	950	1190

*) Bei 6,5 und 8 mm Stärke ist die Krempe 25 mm niedriger, und somit auch die Tiefe 25 mm geringer. Abweichungen der Durchmesser bis zu 2 mm für 1 m.

Gewölbte Stirnböden mit ausgezogener Rohröffnung für Wellrohrkessel.

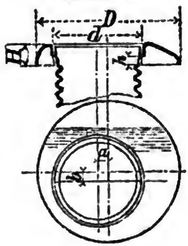
Durch Anwendung dieser Böden wird das Anbringen einer Stirnbodenverankerung überflüssig, weil das elastische Wellrohr ohne Nachteil für die Rundnähte die verschiedenen Ausdehnungen ausgleicht. Die Stemmkanten und Nietflächen für Rohr- und Mantelflansch werden gedreht geliefert.

Die Herstellung der Böden geschieht in einer Stärke, welche bei 2200 und 2000 mm Durchmesser für einen Betriebsdruck bis zu 10 Atm., bei 1800 mm Durchmesser bis zu 12 Atm. genügt.

$D =$	2200	2000	1800	1600 mm
$d =$	1420	1275	1130	980 „
$w =$	$\frac{1250}{1350}$	$\frac{1100}{1200}$	$\frac{950}{1050}$	$\frac{800}{900}$ „
$H =$	300	250	250	250 „
$h =$	160	120	120	120 „
$a =$	180	150	145	125 „
$b =$	140	100	100	125 „
Gewicht $=$	560	450	340	230 kg

(w = Wellrohrdurchmesser.)

Abbild. 661.



Bei anormalen gewölbten Böden mit ausgezogenem Rohrloch liegen die beiden Nietnähte nicht in parallelen Ebenen und werden die Nietflächen nicht gedreht geliefert.

b. Konstruktionen.

1. Verbindungen.

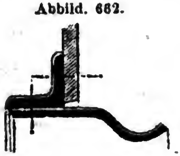
1. **Verbindung einzelner Bleche und Ringe** s. S. 385 u. f.

2. **Verbindung verschiedener Kesselteile.**

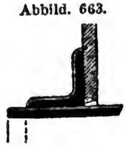
α. Kopfplatten mit Flammrohren.

1) Mit aufsen- oder innenliegenden Winkelringen Abbild. 662, 663 und 664. Letzte Art allgemein für Verbindung mit hinterer

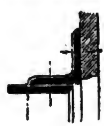
Abbild. 662.



Abbild. 663.



Abbild. 664.



Kopfplatte angewandt, nach Abbild. 662 bei Rohren von grofsem Durchmesser und kleiner Wandstärke (Wellrohre), nach Abbild. 663 bei Rohren von kleinem Durchmesser und grofser Wandstärke.

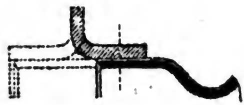
2) Mit nach aufsen oder innen umgebördelter Kopfplatte. Abbild. 665 und 661; letzte Art selten angewandt; s. Wellrohrkessel mit gewölbten Böden, Abbild. 661.

3) Mit umgebördelten Flammrohren Abbild. 666; nur anzuwenden, wenn die übrigen Flammrohrschüsse auch Flanschverbindung haben (Abbild. 687); desgl. bei Wellrohren.

β. Kopfplatten mit Mantel.

1) Mit aufsen- und innenliegenden Winkelringen, Abbild. 667 und 668.

Abbild. 665.



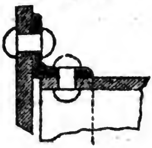
Abbild. 666.



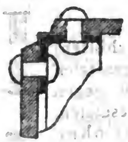
2) Mit nach innen oder aufsen umgebördelten Kopfplatten Abbild. 669; erste Art allgemein zur Verbindung des Mantels mit hinterer Kopfplatte angewandt.

3) Mit nach innen oder aufsen umgebördeltem Mantel, Abbild. 670; selten angewandt, letzte Art nicht zu empfehlen.

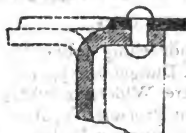
Abbild. 667.



Abbild. 668.



Abbild. 669.

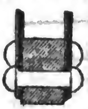


Abbild. 670.

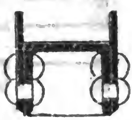


γ. Feuerbüchse mit Mantel.

Abbild. 671.



Abbild. 672.

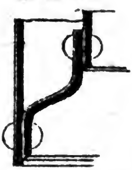


1) Mit schweifseisernem Ring, Abbild. 671.
2) Mit ┌┐-Eisen, Abbild. 672.
(Bei 1 und 2 Vernietung doppelt.)
3) Mit zwei Winkelringen, Abbild. 676.
4) Durch Aushalsen der Feuerbüchse, Abbild. 673.

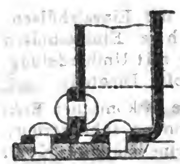
Abbild. 673.



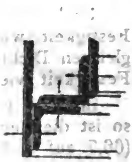
Abbild. 674.



Abbild. 675.



Abbild. 676.



5) Mit doppelt gekröpftem Blechring, Abbild. 674.
6) Mit gemeinsamer Bodenplatte, Abbild. 675.

δ. Neben- oder übereinander liegende Cylinder durch Verbindungsstutzen.

Material der Stutzen: Schweifseisen (Bördelblech) oder Flufseisen (Mantelblech I) (s. Sechzehnter Abschnitt, Materialienkunde). Materialstärke nicht unter 10 bis 12 mm bei 400 bis 500 mm Durchmesser.

Herstellung der Stutzen:

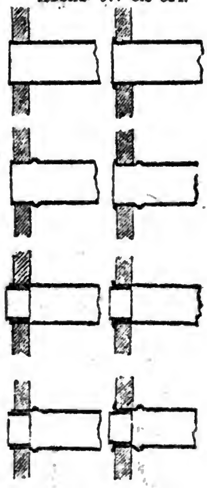
1) Aus einem Stück; am meisten angewandt und zu empfehlen.

2) Aus zwei Teilen durch Zusammenflanschen mit zwischengelegtem Kupferring, wenn die Flansche zusammengeschraubt, oder mit schweifseisernem Ring, wenn sie zusammengenietet sind; letztere Art die bessere.

ε. Rohre mit Rohrwänden Abbild. 677 bis 684.

Allgemein üblich: Einwalzen der Rohre mittelst Rohrdichtapparat entweder mit glatten Rollen (System Dudgeon) oder mit profilierten Segmenten (System Profser) mit oder ohne gleichzeitiger Umbördelung der Rohrenden oder Aufschrauben von Muttern auf diese oder Einsetzen von Hülsen in die Rohre.

Abbild. 677 bis 684.



Versuchsergebnisse über die Festigkeit der verschiedenen Befestigungsarten:*)

1. Messingrohre.

Mit Umbördelung (ohne Einsatzhülsen) haben die mit Dudgeons Apparat eingesetzten Rohre gröfsere Widerstandsfähigkeit gegen Zug als die mit Profsers Apparat eingesetzten, namentlich bei dünnen Rohrwänden; ohne Umbördelung ist Dudgeons Dichtung weniger fest als Profsers.

Einsatzhülsen erhöhen bei beiden Arten die Widerstandsfähigkeit, u. zw. eiserne mehr als messingene. Ohne Einsatzhülsen erhöhen aufgeschraubte Muttern die Widerstandsfähigkeit nicht.

2. Eisenrohre nach Dudgeons Art gedichtet.

Umbördelung mit Einsatzhülsen höhere Festigkeit wie ohne Einsatzhülsen, desgleichen Dichtung mit Umbördelung höhere Festigkeit wie blofse Dichtung.

Sind die Rohre in konischen Bohrungen der Rohrwände befestigt, so ist die Zugspannung sehr gering, wenn die Konizität gering ist, (66,7 auf 68,3); eine stärkere Konizität (66,7 auf 71,5) erhöht die

*) Versuche von W. H. Shock, vergl. Engineering 1877, S. 199 und 335. Zeitschr. des Verbandes der Dampfkessel-Ueberwachungsvereine I. Jahrg. S. 59.

Festigkeit bedeutend (von ∾ 500 auf 1400 kg f. d. qcm Rohrquerschnitt, also fast auf die Festigkeit ungenieteter Rohre in cylindrischen Bohrungen [∾ 1800 kg f. d. qcm]).

2. Verstärkungen.

1. Flammrohr-Versteifungen.

α. Winkeleisenringe, Abbild. 685. Ringe geschweifst aus Winkeleisen 75 · 75 · 12 mm. Abstand des Ringes vom Flammrohr = 25 bis 30 mm. Alle 15 cm mit Flammrohr vernietet unter Benutzung von hohlen Stehbolzen (Rohrabschnitte oder offene Flacheisenringe). Dicke der Stehbolzen höchstens 5 mm.

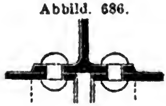
Bei nachträglicher Versteifung: Winkeleisenring zweiteilig und durch Doppellasche am lotrechten Schenkel des Winkeleisens verbunden.

β. Flanschverbindung der einzelnen Flammrohrschüsse, Abbild. 687. Zwischengelegter Flacheisenring, etwa 10 mm dick, reicht bis an die Biegung der Flansche und steht aufsen etwa 10 mm vor.

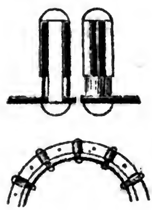
Abbild. 685.



Abbild. 686.



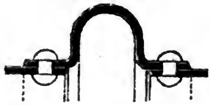
Abbild. 689.



Abbild. 687.



Abbild. 688.



γ. Verbindung der Flammrohrschüsse nach Abbild. 686 und 688. Zweite Form wesentlich elastischer als die erste. Beide haben den Nachteil, dafs die doppelte Blechdicke dem Feuer ausgesetzt ist.

δ. Flacheisenringe; Konstruktion Böcking Abbild. 689. Zwei aufeinandergenietete, etwa 10 mm starke, an den Vernietungsstellen mit dem Flammrohr durchgebogene Flacheisenringe. Die durch das Durchbiegen entstandenen Oeffnungen werden nach dem Zusammennieten der Flacheisenringe auf den Durchmesser des Niets aufgebohrt. Verbindung mit dem Flammrohr wie unter 1. Vorteil: Schmaler Zwischenraum gegenüber Anordnung 1. Nachträgliches Anbringen leicht. Ring zweiteilig mit versetzten Nähten.

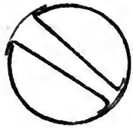
Abbild. 690.



ε. Verbindung der Flammrohrschüsse nach Prégardien, Abbild. 690. Vorteil: Verbindung elastisch, Nietnaht dem Feuer entzogen.

ζ. Anordnung von Gallowayrohren, Abbild. 691: teils lotrecht, teils geneigt. Erste Anordnung hat den Vorteil des leichten Ausbauens, letzte den der besseren Berührung durch die Heizgase.

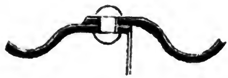
Abbild. 691.



Vorteil der Gallowayrohre: gute Versteifung und lebhafte Wasserbewegung.

Durchmesser der Gallowayrohre nicht zu grofs wählen; mittlerer Durchmesser = 0,225 bis 0,25 des zugehörigen Flammrohrdurchmessers. Abstand der Rohre von einander 1,25 bis 1,5 m, ein Gallowayrohr auf je 2 m der gesamten Flammrohrlänge; dementsprechend Einteilung der Schüsse, so dafs jeder Schufs ein Gallowayrohr erhält.

Abbild. 692.



η. Wellrohre (aus Flufseisen) an Stelle der glatten Flammrohre (System Fox) Abbild. 692.

Abmessungen der Wellrohre.

Angaben der Gewerkschaft Schulz-Knaudt in Essen (Ruhr).

Kleinster innerer Durchmesser = 750 bis 1300 mm, steigend mit 50 mm,
Aeufserer Durchmesser = innerer Durchmesser + 100 mm,
Entfernung von Mitte Welle bis Mitte Welle = 151 mm;

Länge: Rostrohr = 2300 mm ganze Länge,
Normalrohr A = 2300 mm ganze Länge,
„ B = 2110 mm „ „

Pafsstücke von 675 bis 2035 mm ganze Länge. Gröfste zulässige Länge eines Wellrohres = 3000 mm.

Durchmesser	750 / 850	800 / 900	850 / 950	900 / 1000	950 / 1050	1000 / 1100	1050 / 1150	1100 / 1200	1150 / 1250	1200 / 1300	1250 / 1350	1300 / 1400	mm / mm
Gewicht f. d. lfd. m	225	240	255	270	285	300	325	350	365	380	405	425	kg
normale Blechdicke	10	10	10	10	10	10,5	10,5	10,5	10,5	11	11	11,5	mm
Betriebsdruck . . .	13	12	11,5	11	10,5	10,5	10	10	9.5	9	9	9	Atm.

Die Blechstärke der Wellrohre für äufseren Druck wird berechnet wie diejenige glatter Rohre für inneren Druck. Die Wandstärke der Wellrohre für Schiffskessel wird etwas stärker angenommen, weil das Speisewasser besonders bei hohem Druck die inneren Teile der Schiffskessel stark angreift, u. zw. lautet die Formel dafür, wenn p der Dampfdruck in Atm., d der gröfste Durchmesser in cm und s die Blechstärke in cm ist:

$$s = \frac{p\,d}{1100} + 0{,}3 \text{ cm}.$$

Die Festigkeit der Schweifsnaht beträgt nach Versuchen 90 bis 95% derjenigen des gesunden Blechs.

Die Heizfläche des Wellrohrs ist um ⅓ gröfser, als bei glatten Rohren.

2. Verankerung ebener Kopfplatten.

Bestimmungen der Hamburger Normen hierüber s. S. 756.

α. Durchgehende Rundeisenanker. (Verbindung Kopfplatte mit Kopfplatte.) Nur für kurze Kessel anzuwenden. Anzahl und Verteilung der Anker so zu wählen, dafs Reinigung des Kessels nicht erschwert wird. Verbindungen der Anker mit den Kopfplatten:

1) Einschrauben in die Kopfplatten und Umnieten.
2) Befestigung durch Muttern mit Unterlagscheiben.
3) „ mit Bolzen oder Keilen an Winkel- oder T-Eisenrippen, angenietet an die Kopfplatten. Anordnung 3) hat den Vorzug der Verteilung der Wirkung des Ankers auf eine gröfsere Fläche.

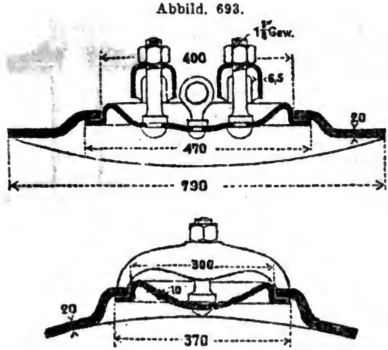
Anwendung mehrerer Bolzen an Stelle eines stärkeren zu empfehlen; alsdann sind an die Ankerenden T-förmige Stücke anzuschweifsen. Bei gabelförmigen Ankerenden sind die Bolzen durch vorgesteckte Keile zu sichern.

β. Blechanker. (Verbindung von Kopfplatte mit Mantel.) Bei Verwendung von einfachen Blechplatten sind überall doppelte Winkeleisen anzuordnen; doppelte Blechplatten sind nicht zu empfehlen. Länge der Blechanker nicht zu kurz, möglichst bis zum zweiten Mantelringe reichend. Abstand der Kopfplatten-Winkeleisen von den Flammrohren mindestens 200 mm. Belastung der Blechanker: etwa 500 kg f. d. qcm.

3. Verstärkung der Kesselausschnitte.

Alle Ausschnitte sind in den möglichst kleinsten Abmessungen zu halten, insbesondere erhält der Ausschnitt im Kesselmantel für den Dampfdom am besten nur die Gröfse eines gewöhnlichen Mannlochs von elliptischer Form (300 bis 350 mm breit, 400 bis 450 mm lang). Mannlöcher bis 280 · 380 mm herab sind nur dann zulässig, wenn das Anbringen gröfserer Löcher schwierig ist. (Hamb. Normen.)

Abbild. 693.



Zur Verstärkung der Ausschnitte (notwendig,

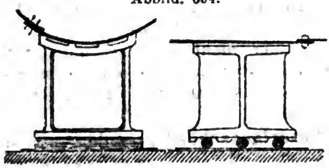
wenn durch das Loch eine unzulässige Schwächung des Bleches eintritt oder ein Durchspannen des Bleches durch das Anziehen der Mannlochbügel u. dergl. zu befürchten steht [Hamb. Normen]), werden schweifseiserne Ringe umgenietet, welche den Blechquerschnitt des Ausschnitts ersetzen sollen. Doppelte Nietung zu empfehlen. Für die gewöhnlichen Mannlöcher werden die Verstärkungsringe 80 bis 100 mm breit und 12 bis 18 mm stark genommen.

Die üblichen Verschlufsdeckel der Mannlöcher sitzen von innen und werden durch zwei Bügel mit zwei etwa 30 mm starken Schrauben befestigt. Für die im Kesselmantel befindlichen Mannlöcher sind der leichteren Dichtung wegen die in Abbild. 693 wiedergegebenen Mannlochaufsätze mit geprefsten schweifseisernen Deckeln und Bügeln zu empfehlen. Gufseisen für Deckel und Rahmen ist zu vermeiden (Hamb. Normen).

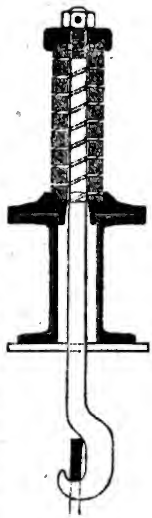
II. Lagerung der Kessel.

Unterstützung. Die Aufsenringe des Kesselmantels müssen tragen, s. Abbild. 694. Belastung des Stuhles bei ganz mit Wasser

Abbild. 694.



Abbild. 695.



gefülltem Kessel nicht über 6 kg f. d. qcm oberer Stuhlfläche. Obere Fläche des Stuhles ist rippenartig zu halten. Der Ausdehnung des Kessels wegen ist es gut, bei Anordnung von zwei und mehreren Kesselstühlen nur einen fest zu legen, die übrigen auf je drei Rollen von 60 mm Durchmesser zu lagern und zwischen Fundamentmauerwerk und Rollen eine Eisenplatte von etwa 10 mm Dicke zu legen (Abbild. 694). Die Kesselstühle sind durch vorgesetztes Mauerwerk dort, wo sie von heifsen Gasen bestrichen werden, zu schützen.

Aufhängung. Belastung der Hängestangen bei ganz mit Wasser gefülltem Kessel nicht über 750 kg f. d. qcm. Befestigung der Hängestangen am Kessel entweder mittelst angenieteter kräftiger Augbolzen oder besser mittelst Laschen, die durch Doppel-Winkeleisen am Kessel befestigt sind. An-

ordnung von Sicherheitsstühlen für etwaigen Bruch der Hängestangen empfehlenswerth.

Vereinigte Unterstützung und Aufhängung. Bei freitragenden Kesselteilen bezw. bei Zwischenfeuerungskesseln für den vorderen Teil des Oberkessels bis zum ersten Verbindungsrohr elastische Aufhängung zur Entlastung der Rundnaht dringend zu empfehlen. Starre Aufhängung oder Unterstützung durch Tragpratzen wirkungslos, weil Kesselteil sich hebt. Spiralfeder, 20 mm Quadratstahl, ist leicht anzuspannen, wenn der Kessel im Betrieb sich gehoben hat. (Abbild. 695).

III. Einmauerung der Kessel.

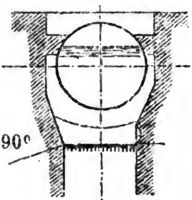
a. Material.

1. Mörtelmaterial am besten Lehm, Kalkmörtel unbedingt verwerflich an den Stellen, wo Mauerwerk in unmittelbare Berührung mit dem Kessel kommt. Für feuerfestes Mauerwerk Chamotte.

2. Steinmaterial. Anschlufs des Mauerwerks an den Kessel unter dem niedrigsten Wasserstand in feuerfesten Steinen, desgl. das Herdmauerwerk mit Feuerbrücke. Bei Aufsenfeuerungen mindestens das Mauerwerk des ersten Längszuges bezw. der ersten drei Schlangenzüge feuerfest zu verblenden, desgl. die hintere Stirnwand des Mauerwerks bei allen Kesseln. Feuerfeste Steine sind angefeuchtet mit möglichst dünnen Fugen glatt zu vermauern. Beim Verblenden erhält jede dritte Lage Binder.

3. Mauerstärke. Allgemein nicht unter 1½ Stein, besser 2 Stein. Bei Aufsenmauern Anordnung einer Luftschicht, etwa 50 mm breit, sehr zu empfehlen; jede dritte Lage erhält dann Binder. Mauerzungen bei Langzügen am Kesselanschlufs nicht über 130 mm stark. Zwischenlage von Blechstreifen zwischen Kessel und Zunge zu empfehlen, bei Bodenfeuchtigkeit notwendig. Scheidewände bei Einmauerung in Schlangenlinien 130 mm stark, nicht dicht an den Kesselteil anschliefsen, sondern den rechteckigen Stein gegen den runden Kesselteil anlegen und den entstehenden Zwickel freilassen, um sogen. tote Ecken zu vermeiden.

Abbild. 696.



b. Ausführung.

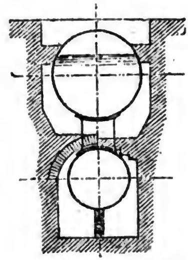
1. Herdmauerwerk bei Aufsenfeuerung. Abbild. 696 rechte Seite. Nachteil: Scharfes Ausbrennen nach der punktierten Linie. Abbild. 696 linke Seite hat diesen Nachteil nicht, Stein bleibt unbehauen, deshalb glatt und hart.

2. Bei Kesselteilen, welche durch das Mauerwerk reichen: Wasserstandsdome, Mäntel der Flammrohrkessel u. s. w. Festes An-

schliefsen des Mauerwerks verwerflich. Ausführung mit 30 bis 50 mm Abstand nach Abbild. 699 zu empfehlen. Zwischenraum lose ausfüllen mit einem lockeren, unverbrennlichen Material, Schlackenwolle u. s. w. Mauerwerk soll zurückspringen bis hinter die Rundnaht.

3. Feuerzüge um Unterkessel sind nicht durch Ueberwölbung der Unterkessel (Abbild. 697 links), sondern durch allmähliches Vorkragen des Mauerwerks herzustellen (Abbild. 697 rechts).

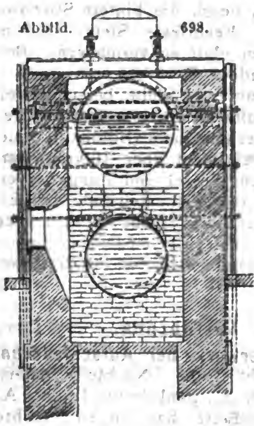
Abbild. 697.



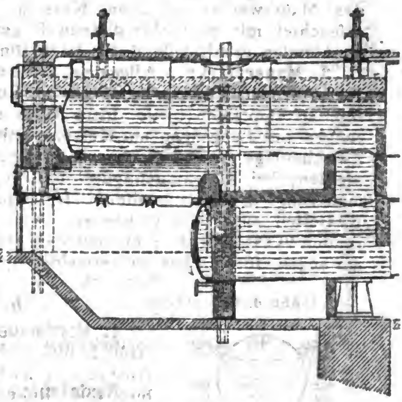
4. Verankerung.

1. Anschlufs der Längsmauern an den Kessel unter dem niedrigsten Wasserstand. Bei Innenfeuerung genügt Verankerung mit in die Tragpratzen oder Augbolzen eingehakten 25 mm starken Ankern mit Muttern und Rosetten von 400 Durchmesser am ersten, dritten, fünften u. s. w. Mantelring. Bei Aufsenfeuerung, namentlich Zwischenfeuerung, kräftigere Verankerung notwendig; zu empfehlen: E-Eisen, der Länge des Kessels nach gelegt, mit vorhin beschriebenen Ankern ohne Rosetten befestigt (Abbild. 698).

Abbild. 698.



Abbild. 699.



2. Anschlufs der hinteren Stirnwände an die Kopfplatten der Kessel. Bei Innenfeuerung: wie vorstehend bei Aufsenfeuerung mit E-Eisen und zwei Ankern mit Muttern, eingehakt in Winkeleisen, dicht an der hinteren Kopfplatte des Kessels befestigt. Bei Aufsenfeuerung Wegfall des L-Eisens, dafür zwei

Augbolzen; wenn Ueberführung der Heizgase über Dampfraum, dann Anordnung des L-Eisens notwendig.

3. Herdmauerwerk. Queranker durch Herdgewölbe und Feuerbrücke mit Rosetten oder besser E-Eisen oder Eisenbahnschienen, unten in die Erde eingelassen und oben dicht über Kessel nochmals verankert (Abbild. 699).

IV. Armatur der Kessel.

a. Grobe Armatur.

1. Roststäbe für Planroste.

Material: Gufs- und Schweifseisen. Ersteres Material in guter Qualität (Hartgufs) im allgemeinen widerstandsfähiger. Roststäbe aus Schweifseisen meistens zu je drei Stück zusammengenietet. Der einfache gerade Roststab mit gerader Luftspalte hat sich gut bewährt. Spielraum für Ausdehnung der Roststäbe = $\frac{1}{50}$ der Länge.

Form und Abmessungen. Bedingungen: Schwerpunkt des Roststabes unterhalb der Sitzfläche, genügende Luftzuführung, gute Luftverteilung, gute Abkühlung des Roststabes und gute Erwärmung der durchströmenden Luft, leichte Reinigung der Spalten von unten; dementsprechend: Länge des Roststabes zur Vermeidung der Verstärkung in der Mitte nicht über 700 mm, besser zwischen 500 und 650 mm. Höhe von vorn bis hinten konstant = $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{6}$ der Länge, Rückenstärke = 10 bis 15 mm, Kopfstärke = 15 bis 20 mm. Spaltenweite richtet sich nach der Backfähigkeit der Kohle, Dünnflüssigkeit der Schlacke, Zugverhältnissen u. s. w.

Nach Meidinger*) schwankt bei den verschiedenen Rostkonstruktionen:

das Gewicht von 1 qm Rostfläche . . .	von	120	bis	470	kg;
die freie Fläche für 1 qm Rostfläche . .	„	0,285	„	0,5	qm;
die ganze senkrechte Fläche für 1 qm Rostfläche	„	4,1	„	17,1	qm;
die Fugenbreite zwischen den Stäben . .	„	3	„	8	mm;
die obere Breite eines Stabes	„	6	„	18	mm;
die Höhe eines Stabes	„	3,5	„	14	cm;
das Gewicht eines Stückes	„	0,6	„	18,8	kg

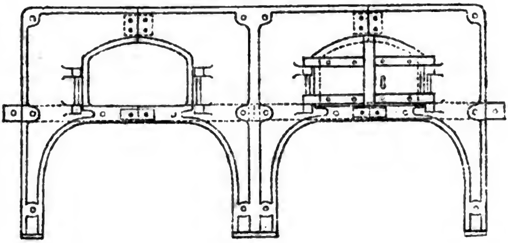
(aus einem Stab bezw. aus mehreren verbundenen Stäben bestehend)

2. Roststabträger.

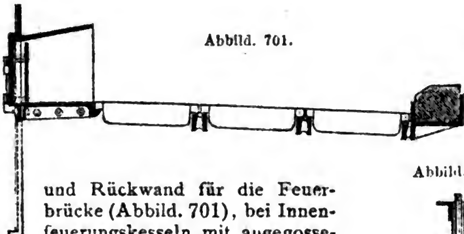
Vorderer Träger meistens gleichzeitig als Vorplatte konstruiert (Abbild. 700). Vorplatte bei Aufsenfeuerung 400 mm breit, bei Innenfeuerung 200 mm. Hinterer Träger gleichzeitig mit Auflage

*) S. Zeitschr. d. V. d. Ing. 1878, S. 214 u. f.: Ueber Feuerungsroste.

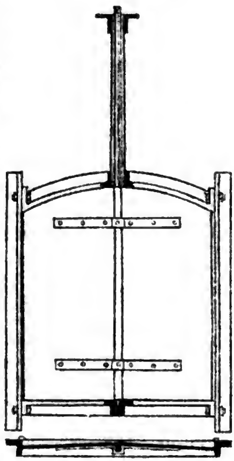
Abbild. 700.



Abbild. 701.



Abbild. 702.



und Rückwand für die Feuerbrücke (Abbild. 701), bei Innenfeuerungskesseln mit angegossener Wand zum Abschlufs der Flammrohre nach unten. Wand kann mit Reinigungsthür versehen werden. Mittlere Träger mit Luftspalte zu versehen (Abbild. 701). Bei Innenfeuerung Verbindung der Roststabträger unter sich durch Distanzschrauben.

3. Feuergeschränke.

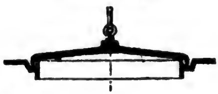
Bei Innenfeuerungen vielfach aus Schweifseisen, bei Aufsenfeuerungen meistens aus Gufseisen (Abbild. 700). Befestigung des Geschränkes bei Flammrohrkesseln entweder durch Verschraubung mit dem vorstehenden Teil des Flammrohres oder Verschraubung mit der Kopfplatte. Erste Anordnung ist vorzuziehen. Bei Aufsenfeuerung kräftige Verankerung mit dem Mauerwerk. Lotrechte Teilung des Feuergeschränkes bei Aufsenfeuerungen in zwei Teile und Verbindung der Teile durch breite kräftige Laschen zur Vermeidung des Springens durch Temperaturspannungen vorteilhaft. Feuerthüren stets mit Schutzplatte zu armieren und mit durch

Rosetten verschliefsbaren Luftöffnungen zu versehen. Abstand der Schutzplatte von Feuerthür etwa 80 bis 100 mm. Bei Innenfeuerungen sind hinter den Feuerthüren Schutzbögen in der Breite der Vorplatte zum Schutz des vorderen Teils der Flammrohre anzuordnen. Einflügelige Thüren 300 bis 375 mm breit, 250 bis 350 mm hoch. Zweiflügelige Thüren 450 bis 550 mm breit, 300 bis 350 mm hoch.

4. Zug-Absperrvorrichtungen.

1. **Zugschieber** meistens aus Gufseisen. Rahmen mit Mauerwerk kräftig verankern. Schieber selbst durch Gegengewicht gut ausbalancieren. Lüftvorrichtung: Kette über kräftige, in Hängegabeln gelagerte Rollen geführt.

Abbild. 703.



2. **Drehschieber** (Abbild. 702).

3. **Rauchglocke.** Rahmen aus Gufseisen, Glocke aus Gufseisen oder besser (weil leichter) aus Schweifseisen; Form der Glocke: viereckig oder rund (Abbild. 703), im ersten Falle Führungsleisten erforderlich.

b. Feine Armatur.

1. Sicherheitsventil.

Brauchbare Querschnitte ergiebt die Formel:

$$f = 15\sqrt{(v : p_1)} \text{ qmm},$$

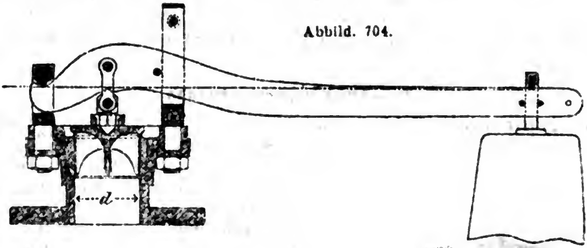
wenn f den für 1 qm Heizfläche erforderlichen Querschnitt der Sicherheitsventile in qmm, p_1 den höchsten zulässigen Dampfüberdruck in Atm., v das spec. Volumen des Wasserdampfes in 1 f. d. kg (der Fliegnerschen Tafel S. 258 entnommen) bedeutet und 20% Verengung des ganzen Querschnitts durch untere Flügelführung angenommen wird. (Vergl. S. 271).

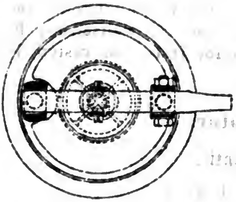
$p_1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$v =$	896	612	467	378	313	276	244	218	198	181	167	154	144	135
$f =$	449	263	188	147	119	102	89	78	71	63	59	54	50	48

Ventile über 100 mm Durchmesser namentlich bei hohem Druck des schweren Belastungsgewichtes wegen zu vermeiden, dafür mehrere kleinere zu wählen. Ventile mit Hebelbelastung sind unmittelbar belasteten vorzuziehen. Bei Ventil Abbild. 704 sind diejenigen Bedingungen erfüllt, die an ein genau und sicher arbeitendes Ventil mit Hebelbelastung zu stellen sind. Das Ventil liegt frei und ist zugänglich, seine richtige Lage, wagerecht nach allen Richtungen, ist bequem zu untersuchen. Der Druckpunkt des Ventils liegt in der Ebene der Sitzfläche. Der Hebel arbeitet auf Schneiden, der Dreh-

punkt und Druckpunkt des Hebels und der Aufhängepunkt des Gewichts liegen in einer Ebene. Das Ventil kann unter Druck gedreht werden. Hebel kräftig und Schneiden breit halten (Abbild. 704).

Abbild. 704.





(Günstige Abmessungen ergeben etwa folgende Verhältnisse: Kleinste Entfernung der Schneiden $= d$, Höhe des Hebels über der mittleren Schneide $= \frac{3}{8} d$, Breite des Hebels $= \frac{1}{5} d$.) Ventilsitz eben oder kegelförmig, in beiden Fällen schmal zu halten, 2 bis 2,5 mm. Ebene Ventilsitze schützen besser gegen Festsetzen, kegelförmige (Sitzwinkel 45°) halten besser dicht. Führung des Ventilkegels möglichst lang, obere oder untere oder beide zugleich. Spindel- oder Flügelführung. Hebel des Ventils mufs in einer Gabel geführt werden, die oben geschlossen, gleichzeitig den Hub begrenzt.

2. Dampfabsperrventil.

Bauch- und Eckventile. Aufsenliegendes Gewinde, Metallspindel, Säulenaufsatz, schweifseiserne mit Messing ausgebüchste Brücke, Spindel mit Bund oder Kegel zum Begrenzen des Ventilhubes und Abdichten der Stopfbüchse, um diese während des Betriebes verpacken zu können. Um dies bei geschlossenem Ventil zu ermöglichen, mufs der Dampf unter, nicht auf den Ventilteller drücken. Durchmesser des Absperrventils gewöhnlich = dem 1,1- bis 1,25-fachen Durchmesser des Sicherheitsventils. Ist die Dampfrohrleitung kurz (20 bis 30 m), so kann der Bestimmung ihrer lichten Weite eine Dampfgeschwindigkeit von 30 m i. d. Sek. zu grunde gelegt werden, bei sehr langen Rohrleitungen eine solche von 10 bis 15 m i. d. Sek. Bestimmung des zweckmäfsigsten Leitungsdurchmessers s. S. 273 u. f.

3. Speiseventil,

selbstthätig schliefsend unter Druck des Kesselwassers, ohne und mit loser Spindel. Letztere Anordnung gestattet Regelung der Speisung. Die Speiseventile sitzen möglichst dicht am Kessel; Zwischenschaltung einer Absperrvorrichtung zwischen Kessel und Speiseventil zu empfehlen (Absperrventil, Hahn, Schieber). Hub des Ventilkegels zwischen 5 und 8 mm, Ventilsitz soll mindestens 25 mm unter Unterkante der Ausflufsöffnung sitzen, kegel- oder kugelförmig und nicht zu schmal sein, etwa 5 bis 6 mm breit. Der Ventilkopf und die Anschlagfläche des Gehäuses erhalten zur Vermeidung des Wasserschlages $\frac{1}{8}$ des Ventilquerschnitts. Durchmesser des Speiseventils nicht zu klein wählen.*) Einschaltung eines Sicherheitsventils in die Druckrohrleitung zu empfehlen. Belastung des Ventils etwa 1 Atm. über Kesseldruck.

4. Ausblasevorrichtung.

Ventil, Hahn oder Schieber. Ventil kein so sicheres Abschlufsorgan wie die beiden anderen; Hahn und auch Schieber schwer unter Druck zu handhaben. Vereinigte Anordnung, Ventil zwischen Hahn oder Schieber und Kessel, vorzuziehen. Abschlufsorgan nicht zu grofs wählen, 30 bis 60 mm Durchmesser je nach Gröfse des Kessels. Leichte Zugänglichkeit der Organe und deren sorgfältiger Schutz gegen Feuchtigkeit, Mauerwerk, Asche u. s. w. vorzusehen.

5. Wasserstands-Apparate.

1. **Wasserstandsgläser** (ein Wasserstandsglas vorgeschrieben, für Dampfschiffskessel zwei). Durchmesser des Glasrohres = 20 mm aufsen, Länge nicht unter 250 mm. Genaues Längenmafs des Rohres notwendig. Das Rohr soll oben und unten in eine 6 bis 8 mm hohe, genau auf seinen äufseren Durchmesser ausgedrehte Brust fassen, um das Einquillen des Dichtungsmittels in die Oeffnungen des Rohres zu vermeiden. Bei fehlender Brust Unterlage von genau um das Glas passenden Bleischeiben unter bezw. über Dichtungsringen zu empfehlen.

2. **Probierhähne und Ventile.** Bohrung 10 mm. Der unterste soll stets Wasser, der oberste Dampf zeigen. Entfernung beider je nach Gröfse des Speiseraums des Kessels 80 bis 120 mm. Anbringung der Wasserstands-Apparate und Probierhähne am Kesselkörper. Unmittelbares Einschrauben oder Anflanschen nicht zu empfehlen; vorzuziehen die Anordnung von schweifseisernen Säulchen

*) Weinlig empfiehlt den Durchmesser nach der Dampferzeugung des Kessels zu bestimmen u. zw. bei einer stündlichen Dampferzeugung von rund

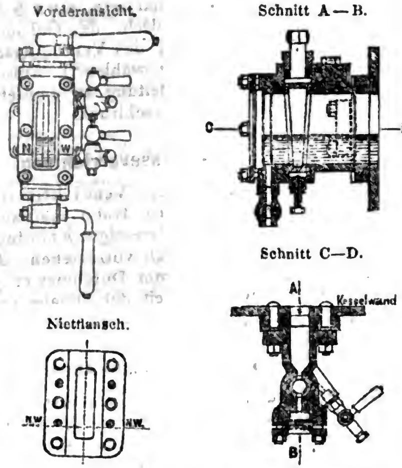
2000 kg = 75 mm	1200 kg = 65 mm	700 kg = 50 mm	300 kg = 40 mm,
1680 „ = 70 „	900 „ = 55 „	500 „ = 45 „	200 „ = 35 „ .

am Kesselkörper und Befestigung der Wasserstandsapparate an diese mittelst Flanschen oder Ueberwurfmuttern, Abbild. 705. Bei Benutzung von längeren Rohren zur Verbindung des Kesselkörpers mit den Apparaten sind die Rohre gegen die Einwirkung der Heizgase gut zu schützen. Die doppelten Wasserstandszeiger werden an gufseisernen oder schweifseisernen Stutzen von der vorgeschriebenen lichten Weite = 60 qcm angeflanscht.

Abbild. 705.



Abbild. 706.



3. **Schwimmer.** Wirken nicht so sicher wie Wasserstandsglas-Apparate, haben aber vor diesen den Vorzug der leichteren Erkennbarkeit des Wasserstandes aus grofser Entfernung, eignen sich mithin gut als zweite Vorrichtung bei Kesseln mit hoch liegendem Wasserstand.

4. **Ochwadtscher Wasserstands-Apparat,** Abbild. 706. Vorzug vor dem unter Nr. 1 genannten Apparat: Keine getrennte Verbindung des Apparates mit dem Dampf- und Wasserraum des Kessels, sondern eine gemeinsame; daher Druckunterschiede, Verstopfungen u. s. w. und daraus folgender unrichtiger Wasserstand im Apparat ausgeschlossen.

6. Manometer.

Quecksilbermanometer und Federmanometer. Erstere, u. zw. offene, die zuverlässigsten aber auch für den praktischen Kessel-

betrieb die unbequemsten. Letztere die jetzt fast allgemein gebräuchlichen [Plattenfeder- und Röhren- (Bourdonsche) Manometer.] Federmanometer sind gegen Erwärmung zu schützen, daher deren Platz nicht zu nahe am Kessel wegen der Ausstrahlung und zur Gewinnung einer möglichst langen Verbindungsrohrleitung mit dem Dampfraum des Kessels behufs Kondensation des Dampfes in der Leitung.

D. Gesetzliche Bestimmungen über Dampfkessel.

I. Deutsche und preufsische Dampfkesselbestimmungen.*)

a. Allgemeine polizeiliche Bestimmungen über die Anlegung von Dampfkesseln.

(Erlafs des Bundesrates gemäfs Bekanntmachung des Reichskanzlers vom 5. August 1890.)

I. Bau der Dampfkessel.

§ 1. Die vom Feuer berührten Wandungen der Dampfkessel, der Feuerröhren und der Siederöhren dürfen nicht aus Gufseisen hergestellt werden, sofern deren lichte Weite bei cylindrischer Gestalt 25 cm, bei Kugelgestalt 30 cm übersteigt.

Die Verwendung von Messingblech ist nur für Feuerröhren, deren lichte Weite 10 cm nicht übersteigt, gestattet.

§ 2. Die um oder durch einen Dampfkessel gehenden Feuerzüge müssen an ihrer höchsten Stelle in einem Abstand von mindestens 10 cm unter dem festgesetzten niedrigsten Wasserspiegel des Kessels liegen. Dieser Minimalabstand mufs für Kessel auf Flufs- und Landseeschiffen bei einem Neigungswinkel der Schiffsbreite gegen die Horizontalebene von 4 Grad, für Kessel auf Seeschiffen bei einem Neigungswinkel von 8 Grad noch gewahrt sein.

Diese Bestimmungen finden keine Anwendung auf Dampfkessel, welche aus Siederöhren von weniger als 10 cm Weite bestehen, sowie auf solche Feuerzüge, in welchen ein Erglühen des mit dem Dampfraum in Berührung stehenden Teiles der Wandungen nicht zu befürchten ist. Die Gefahr des Erglühens ist in der Regel als ausgeschlossen zu betrachten, wenn die vom Wasser bespülte Kesselfläche, welche von dem Feuer vor Erreichung der vom Dampf bespülten Kesselfläche bestrichen wird, bei natürlichem Luftzug mindestens zwanzigmal, bei künstlichem Luftzug mindestens vierzigmal so grofs ist, als die Fläche des Feuerrostes.

II. Ausrüstung der Dampfkessel.

§ 3. An jedem Dampfkessel mufs ein Speiseventil angebracht sein, welches bei Abstellung der Speisevorrichtung durch den Druck des Kesselwassers geschlossen wird.

---

*) Für die deutsche Marine gilt aufserdem das durch den Chef der Admiralität erlassene Regulativ, betr. „die sicherheitspolizeiliche Ueberwachung des Betriebes der den Etablissements der Kaiserlichen Marine zugehörigen und der auf den Schiffen und Fahrzeugen derselben befindlichen Dampfkessel“ vom 7. Februar 1873 mit Abänderungen (s. Mar.-Verordn.-Bl. 1883 S. 83, 1888 S. 156, 1889 S. 53, 1890 S. 56).

„Verhaltungsmafsregeln für Kesselwärter“ (nicht amtlich, jedoch mit Zugrundelegung der bezügl. gesetzlichen Vorschriften) sind bei Fr. Kortkampf, Berlin 1875, erschienen.

§ 4. Jeder Dampfkessel mufs mit zwei zuverlässigen Vorrichtungen zur Speisung versehen sein, welche nicht von derselben Betriebsvorrichtung abhängig sind, und von denen jede für sich im stande ist, dem Kessel die zur Speisung erforderliche Wassermenge zuzuführen. Mehrere zu einem Betriebe vereinigte Dampfkessel werden hierbei als ein Kessel angesehen.

§ 5. Jeder Dampfkessel mufs mit einem Wasserstandsglase und mit einer zweiten geeigneten Vorrichtung zur Erkennung seines Wasserstandes versehen sein. Jede dieser Vorrichtungen mufs eine gesonderte Verbindung mit dem Inneren des Kessels haben, es sei denn, dafs die gemeinschaftliche Verbindung durch ein Rohr von mindestens 60 qcm lichtem Querschnitt hergestellt ist.

§ 6. Werden Probierhähne zur Anwendung gebracht, so ist der unterste derselben in der Ebene des festgesetzten niedrigsten Wasserstandes anzubringen. Alle Probierhähne müssen so eingerichtet sein, dafs man behufs Entfernung von Kesselstein in gerader Richtung hindurchstoßen kann.

§ 7. Der für den Dampfkessel festgesetzte niedrigste Wasserstand ist an dem Wasserstandsglase, sowie an der Kesselwandung oder dem Kesselmauerwerk durch eine in die Augen fallende Marke zu bezeichnen. An der Aufsenwand jedes Dampfschiffskessels ist die Lage der höchsten Feuerzüge nach der Richtung der Schiffsbreite in leicht erkennbarer, dauerhafter Weise kenntlich zu machen; ferner sind an derselben zwei Wasserstandgläser in einer zur Längenrichtung des Schiffes normalen Ebene, in gleicher Höhe, symmetrisch zur Kesselmitte und möglichst weit von ihr nach rechts und links abstehend, anzubringen. Durch das hierdurch bei Dampfschiffskesseln geforderte zweite Wasserstandsglas wird die im § 5 angeordnete zweite Vorrichtung zur Erkennung des Wasserstandes nicht entbehrlich gemacht.

§ 8. Jeder Dampfkessel mufs mit wenigstens einem zuverlässigen Sicherheitsventil versehen sein.

Wenn mehrere Kessel einen gemeinsamen Dampfsammler haben, von welchem sie nicht einzeln abgesperrt werden können, so genügen für dieselben zwei Sicherheitsventile.

Dampfschiffs-, Lokomobil- und Lokomotivkessel müssen immer mindestens zwei Sicherheitsventile haben. Bei Dampfschiffskesseln, mit Ausschlufs derjenigen auf Seeschiffen, ist dem einen Ventil eine solche Stellung zu geben, dafs die vorgeschriebene Belastung vom Verdeck aus mit Leichtigkeit untersucht werden kann.

Die Sicherheitsventile müssen jederzeit gelüftet werden können. Sie sind höchstens so zu belasten, dafs sie bei Eintritt der für den Kessel festgesetzten Dampfspannung den Dampf entweichen lassen.

§ 9. An jedem Dampfkessel mufs ein zuverlässiges Manometer angebracht sein, an welchem die festgesetzte höchste Dampfspannung durch eine in die Augen fallende Marke zu bezeichnen ist.

An Dampfschiffskesseln müssen zwei dergleichen Manometer angebracht werden, von denen sich das eine im Gesichtskreise des Kesselwärters, das andere mit Ausnahme der Seeschiffe auf dem Verdeck an einer für die Beobachtung bequemen Stelle befindet. Sind auf einem Dampfschiffe mehrere Kessel vorhanden, deren Dampfräume mit einander in Verbindung stehen, so genügt es, wenn aufser den an einzelnen Kesseln befindlichen Manometern auf dem Verdeck ein Manometer angebracht ist.

§ 10. An jedem Dampfkessel mufs die festgesetzte höchste Dampfspannung, der Name des Fabrikanten, die laufende Fabriknummer und das Jahr der Anfertigung, bei Dampfschiffskesseln aufserdem die Mafsziffer des festgesetzten niedrigsten Wasserstandes auf eine leicht erkennbare und dauerhafte Weise angegeben sein. Diese Angaben sind auf einem metallenen Schilde (Fabrikschild) anzubringen, welches mit Kupfernieten so am Kessel befestigt ist, dafs es auch nach der Ummantelung oder Einmauerung des letzteren sichtbar bleibt.

III. Prüfung der Dampfkessel.

§ 11. Jeder neu aufzustellende Dampfkessel mufs nach seiner letzten Zusammensetzung vor der Einmauerung oder Ummantelung unter Verschlufs sämtlicher Oeffnungen mit Wasserdruck geprüft werden.

Die Prüfung erfolgt bei Dampfkesseln, welche für eine Dampfspannung von nicht mehr als fünf Atm. Ueberdruck bestimmt sind, mit dem zweifachen Betrage des beabsichtigten Ueberdruckes, bei allen übrigen Dampfkesseln mit einem Drucke,

welcher den beabsichtigten Ueberdruck um fünf Atm. übersteigt. Unter Atmosphärendruck wird ein Druck von 1 kg f. d. qcm verstanden.

Die Kesselwandungen müssen dem Probedruck widerstehen, ohne eine bleibende Veränderung ihrer Form zu zeigen und ohne undicht zu werden. Sie sind für undicht zu erachten, wenn das Wasser bei dem höchsten Druck in anderer Form als der von Nebel oder feinen Perlen durch die Fugen dringt.

Nachdem die Prüfung mit befriedigendem Erfolge stattgefunden hat, sind von dem Beamten oder staatlich ermächtigten Sachverständigen, welcher dieselbe vorgenommen hat, die Niete, mit welchen das Fabrikschild am Kessel befestigt ist (§ 10) mit einem Stempel zu versehen. Dieser ist in der über die Prüfung aufzunehmenden Verhandlung (Prüfungszeugnis) zum Abdruck zu bringen.

§ 12. Wenn Dampfkessel eine Ausbesserung in der Kesselfabrik erfahren haben, oder wenn sie behufs der Ausbesserung an der Betriebsstätte ganz bloſsgelegt worden sind, so müssen sie in gleicher Weise, wie neu aufzustellende Kessel, der Prüfung mittelst Wasserdruckes unterworfen werden.

Wenn bei Kesseln mit innerem Feuerrohr ein solches Rohr und bei den nach Art der Lokomotivkessel gebauten Kesseln die Feuerbüchse behufs Ausbesserung oder Erneuerung herausgenommen, oder wenn bei cylindrischen und Siederkesseln eine oder mehrere Platten neu eingezogen werden, so ist nach der Ausbesserung oder Erneuerung ebenfalls die Prüfung mittelst Wasserdrucks vorzunehmen. Der völligen Bloſslegung des Kessels bedarf es hier nicht.

§ 13. Der bei der Prüfung ausgeübte Druck darf nur durch ein genügend hohes offenes Quecksilbermanometer oder durch das von dem prüfenden Beamten geführte amtliche Manometer festgestellt werden.

An jedem Dampfkessel muſs sich eine Einrichtung befinden, welche dem prüfenden Beamten die Anbringung des amtlichen Manometers gestattet. (Vergl. S. 801.)

IV. Aufstellung der Dampfkessel.

§ 14. Dampfkessel, welche für mehr als sechs Atm. Ueberdruck bestimmt sind, und solche, bei welchen das Produkt aus der feuerberührten Fläche in qm und der Dampfspannung in Atm. Ueberdruck mehr als dreiſsig beträgt, dürfen unter Räumen, in welchen Menschen sich aufzuhalten pflegen, nicht aufgestellt werden. Innerhalb solcher Räume ist ihre Aufstellung unzulässig, wenn dieselben überwölbt oder mit fester Balkendecke versehen sind.

An jedem Dampfkessel, welcher unter Räumen, in welchen Menschen sich aufzuhalten pflegen, aufgestellt wird, muſs die Feuerung so eingerichtet sein, daſs die Einwirkung des Feuers auf den Kessel sofort gehemmt werden kann.

Dampfkessel, welche aus Siederöhren von weniger als 10 cm Weite bestehen, und solche, welche in Bergwerken unterirdisch oder in Schiffen aufgestellt werden, unterliegen diesen Bestimmungen nicht.

§ 15. Zwischen dem Mauerwerk, welches den Feuerraum und die Feuerzüge feststehender Dampfkessel einschlieſst, und den dasselbe umgebenden Wänden muſs ein Zwischenraum von mindestens 8 cm verbleiben, welcher oben abgedeckt und an den Enden verschlossen werden darf.

V. Bewegliche Dampfkessel (Lokomobilen).*)

§ 16. Bei jedem Dampfentwickler, welcher als beweglicher Dampfkessel (Lokomobile) zum Betrieb an wechselnden Betriebsstätten benutzt werden soll, müssen sich befinden:

1. Eine Ausfertigung der Urkunde über seine Genehmigung, welche die Angaben des Fabrikschildes (§ 10) enthält und mit einer Beschreibung und maſsstäblichen Zeichnung, dem Prüfungszeugnis (§ 10 Absatz 4), der im § 24 Absatz 3 der Gewerbeordnung vorgeschriebenen Bescheinigung und einem Vermerk über die zulässige Belastung der Sicherheitsventile verbunden ist.

2. Ein Revisionsbuch, welches die Angaben des Fabrikschildes (§ 10) enthält. Die Bescheinigungen über die Vornahme der im § 12 vorgeschriebenen Prüfungen

*) Laut Erl. d. preuſs. Min. d. öffentl. Arb. vom Okt. 1891 sind die Kessel von Schiebebühnen, fahrbaren Dampfkranen, Heizwagen für Personenzüge, Hülfsdampferzeuger für Wasserstationen (vorübergehend) als bewegliche Dampfkessel anzusehen.

und der periodischen Untersuchungen müssen in das Revisionsbuch eingetragen oder demselben beigefügt sein.

Die Genehmigungsurkunde und das Revisionsbuch sind an der Betriebsstätte des Kessels aufzubewahren und jedem zur Aufsicht zuständigen Beamten oder Sachverständigen auf Verlangen vorzulegen.

§ 17. Als bewegliche Dampfkessel dürfen nur solche Dampfentwickler betrieben werden, zu deren Aufstellung und Inbetriebnahme die Herstellung von Mauerwerk, welches den Kessel umgiebt, nicht erforderlich ist.

§ 18. Die Bestimmungen der §§ 16 und 17 treten außer Anwendung, wenn ein beweglicher Dampfkessel an einem Betriebsorte zu dauernder Benutzung aufgestellt wird.

VI. Dampfschiffskessel.

§ 19. Die Bestimmungen des § 16 finden auf jeden mit einem Schiffe dauernd verbundenen Dampfkessel (Dampfschiffskessel) mit der Mafsgabe Anwendung, dafs die vorgeschriebene mafsstäbliche Zeichnung sich auf den Schiffsteil, an welchem der Kessel eingebaut oder aufgestellt ist, zu erstrecken hat.

VII. Allgemeine Bestimmungen.

§ 20. Wenn Dampfkesselanlagen, die sich zur Zeit bereits im Betriebe befinden, den vorstehenden Bestimmungen aber nicht entsprechen, eine Veränderung der Betriebsstätte erfahren sollen, so kann bei deren Genehmigung eine Abänderung in dem Bau der Kessel nach Mafsgabe der §§ 1 und 2 nicht gefordert werden. Im übrigen finden die vorstehenden Bestimmungen auch für solche Fälle Anwendung, jedoch mit der Mafsgabe, dafs für Lokomobilen und Dampfschiffskessel den Vorschriften in den §§ 10, 11 und 16 bis zum 1. Januar 1892 zu entsprechen ist.

§ 21. Die Centralbehörden der einzelnen Bundesstaaten sind befugt, in einzelnen Fällen von der Beachtung der vorstehenden Bestimmungen zu entbinden.

§ 22. Die vorstehenden Bestimmungen finden keine Anwendung: 1. auf Kochgefäfse, in welchen mitteist Dampfes, der einem anderweitigen Dampfentwickler entnommen ist, gekocht wird; 2. auf Dampfüberhitzer oder Behälter, in welchen Dampf der einem anderweitigen Dampfentwickler entnommen ist, durch Einwirkung von Feuer besonders erhitzt wird; 3. auf Kochkessel, in welchen Dampf aus Wasser durch Einwirkung von Feuer erzeugt wird, wofern dieselben mit der Atmosphäre durch ein unverschliefsbares, in den Wasserraum hinabreichendes Standrohr von nicht über 5 m Höhe und mindestens 8 cm Weite oder durch eine andere von der Centralbehörde des Bundesstaates genehmigte Sicherheitsvorrichtung verbunden sind.

§ 23. In bezug auf die Kessel der Eisenbahn-Lokomotiven bleiben die Bestimmungen des Bahnpolizeireglements für die Eisenbahnen Deutschlands in der Fassung vom 30. November 1885 (vergl. Abteil. II. S. 144) und der Bahnordnung für deutsche Eisenbahnen untergeordneter Bedeutung vom 12. Juni 1878 in Geltung.

b. Bestimmungen über die Genehmigung, Prüfung und Revision der Dampfkessel.

(Nach einer Vereinbarung der verbündeten Regierungen des Reiches in der Bundesratssitzung vom 3. Juli 1890.)

I. Dampfkessel im allgemeinen.

1. Dampfkessel aus dem Auslande müssen der Druckprobe nach den Vorschriften im § 11 der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen vom 5. August 1890 im Inlande unterworfen werden.

Dampfkessel, welche in einem Bundesstaate am Verfertigungsort von einem hiermit beauftragten Beamten oder staatlich ermächtigten Sachverständigen nach den §§ 11 und 13 der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen vom 5. August 1890 oder nach Vornahme einer Ausbesserung in Gemäfsheit des § 12 a. a. O. geprüft und den Vorschriften unter § 11 Absatz 4 a. a. O. entsprechend abgestempelt wo den

sind, unterliegen, sobald sie im ganzen nach ihrem Aufstellungsort transportiert werden, auch wenn dieser in einem anderen Bundesstaate belegen ist, einer weiteren Wasserdruckprobe vor ihrer Einmauerung beziehungsweise vor ihrer Wiederinbetriebsetzung nur dann, wenn sie durch den Transport oder aus anderer Veranlassung Beschädigungen erlitten haben, welche die Wiederholung der Probe geboten erscheinen lassen.

II. Bewegliche Kessel

(Lokomobilen, §§ 16 u. f. der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen vom 5. August 1890).

2. Bewegliche Kessel, deren Inbetriebnahme in einem Bundesstaate auf grund des § 24 der Gewerbeordnung und der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen genehmigt worden ist, können in allen anderen Bundesstaaten ohne nochmalige vorgängige Genehmigung in Betrieb gesetzt werden, sofern seit ihrer letzten Untersuchung (Ziffer 5) nicht mehr als ein Jahr verflossen ist.

Hinsichtlich der örtlichen Aufstellung und des Betriebes kommen die polizeilichen Vorschriften desjenigen Bundesstaates in Anwendung, in welchem der Kessel benutzt wird.

3. Die Genehmigung kann für mehrere bewegliche Kessel von übereinstimmender Bauart, Ausrüstung und Gröfse, welche in einer Fabrik im Laufe eines Kalenderjahres hergestellt werden, gemeinsam im voraus beantragt und durch eine Urkunde erteilt werden.

Für jeden auf grund dieser Genehmigungsurkunde hergestellten beweglichen Kessel ist eine mit der Fabriknummer zu versehende beglaubigte Abschrift der Genehmigungsurkunde und ihrer Zubehörungen anzufertigen. Dieselbe gilt als Genehmigungsurkunde für den Kessel, dessen Fabriknummer sie trägt.

Die Beglaubigung der Abschrift kann durch den Beamten oder staatlich ermächtigten Sachverständigen, welcher die im § 11 der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen vorgesehene Untersuchung vornimmt, geschehen.

4. Bevor ein beweglicher Kessel in dem Bezirke einer Ortspolizeibehörde in Betrieb genommen wird, ist der letzteren von dem Betriebsunternehmer oder dessen Stellvertreter unter Angabe der Stelle, an welcher der Betrieb stattfinden soll, Anzeige zu erstatten.

5. Jeder bewegliche Kessel ist mindestens alljährlich einer äufseren Revision, und alle drei Jahre einer inneren Revision oder Wasserdruckprobe zu unterwerfen. Die innere Revision kann der Revisor nach seinem Ermessen durch eine Wasserdruckprobe ergänzen. Die äufsere Revision kommt jedoch in demjenigen Jahre in Fortfall, in welchem eine innere Revision oder Wasserdruckprobe vorgenommen wird.

Die Wasserdruckprobe erfolgt bei Kesseln, welche für eine Dampfspannung von nicht mehr als 10 Atm. Ueberdruck bestimmt sind, mit dem anderthalbfachen Betrage des genehmigten Ueberdruckes, bei allen übrigen Kesseln mit einem Drucke, welcher den genehmigten Ueberdruck um 5 Atm. übersteigt. Bei der Probe ist, soweit dies von dem Revisor verlangt wird, die Ummantelung des Kessels zu beseitigen.

6. Der Betriebsunternehmer oder dessen Vertreter hat dem zuständigen Revisor zu der Zeit, zu welcher die innere Revision oder Wasserdruckprobe auszuführen ist, davon Anzeige zu erstatten, wann und wo der Kessel zur Untersuchung bereit steht.

7. Die nach Mafsgabe des § 24 Absatz 3 der Gewerbeordnung von einem hierzu ermächtigten Beamten oder Sachverständigen eines Bundesstaates ausgestellten Bescheinigungen, die Bescheinigungen über die in Gemäfsheit des § 12 der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen vom 5. August 1890 vorgenommenen Wasserdruckproben und die Bescheinigung über die Vornahme periodischer Untersuchungen werden in allen anderen Bundesstaaten anerkannt.

III. Dampfschiffskessel

(§ 19 der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen vom 5. August 1890).

8. Die in Gemäfsheit des § 24 der Gewerbeordnung erforderliche Genehmigung zur Anlegung eines Dampfschiffskessels hat die nach den Landesgesetzen zuständige

Behörde desjenigen Bundesstaates zu erteilen, in welchem sich der Heimatshafen des Schiffes, in Ermangelung eines solchen der Wohnsitz des Schiffseigners befindet.

9. Die technische Untersuchung einer Dampfschiffskesselanlage, welche nach Mafsgabe des § 24 Absatz 3 der Gewerbeordnung vor Inbetriebnahme des Kessels auszuführen ist, kann in dem Heimatshafen des Schiffes oder in dem ersten deutschen Anlaufshafen oder auch an dem Orte vorgenommen werden, an welchem der Kessel in das Schiff eingebaut oder mit demselben verbunden worden ist.

Ist dieser Ort in einem anderen Bundesstaate gelegen als der Heimatshafen des Schiffes und erfolgt diese Untersuchung nicht in dem Heimatshafen, so ist bei derselben gleichzeitig festzustellen, ob denjenigen Koncessionsbedingungen, welche nach Mafsgabe der im Staate des Heimatshafens über die Anlegung von Dampfschiffskesseln geltenden besonderen polizeilichen Bestimmungen vorgeschrieben wurden, entsprochen worden ist.

10. Dampfschiffskessel, deren Inbetriebnahme in einem Bundesstaate auf grund des § 24 der Gewerbeordnung und nach den allgemeinen polizeilichen Bestimmungen genehmigt worden ist, können, wenn sie sich auf Schiffen befinden, welche Gewässer verschiedener Bundesstaaten befahren, innerhalb des Gebiets der letzteren ohne nochmalige vorgängige Genehmigung betrieben werden, sofern seit ihrer letzten Untersuchung nicht mehr als ein Jahr verflossen ist.

11. Jeder Dampfschiffskessel ist mindestens alljährlich einer äufseren Revision und alle zwei Jahre einer inneren Revision oder Wasserdruckprobe zu unterwerfen. Die innere Revision kann der Revisor nach seinem Ermessen durch eine Wasserdruckprobe ergänzen.

Diese Wasserdruckprobe erfolgt bei Kesseln, welche für eine Dampfspannung von nicht mehr als 10 Atm. Ueberdruck bestimmt sind, mit dem anderthalbfachen Betrage des genehmigten Ueberdrucks, bei allen übrigen Kesseln mit einem Drucke, welcher den genehmigten Ueberdruck um 5 Atm. übersteigt. Bei der Probe ist, soweit dies vom Revisor verlangt wird, die Ummantelung des Kessels zu beseitigen.

12. Die Bestimmungen der Ziffern 6 und 7 finden auf Dampfschiffskessel gleichmäfsig Anwendung.

c. Preufsisches Gesetz den Betrieb der Dampfkessel betreffend.

(Vom 3. Mai 1872.)

§ 1. Die Besitzer von Dampfkesselanlagen oder die an ihrer Statt zur Leitung des Betriebes bestellten Vertreter, sowie die mit der Bewartung von Dampfkesseln beauftragten Arbeiter sind verpflichtet, dafür Sorge zu tragen, dafs während des Betriebes die bei Genehmigung der Anlage oder allgemein vorgeschriebenen Sicherheitsvorrichtungen bestimmungsmäfsig benutzt, und Kessel, die sich nicht in gefahrlosem Zustande befinden, nicht im Betriebe erhalten werden.

§ 2. Wer den ihm nach § 1 obliegenden Verpflichtungen zuwiderhandelt, verfällt in eine Geldstrafe bis zu 600 *M.* oder in eine Gefängnisstrafe bis zu drei Monaten.

§ 3. Die Besitzer von Dampfkesselanlagen sind verpflichtet, eine amtliche Revision des Betriebes durch Sachverständige zu gestatten, die zur Untersuchung der Kessel benötigten Arbeitskräfte und Vorrichtungen bereit zu stellen und die Kosten der Revision zu tragen.

Die näheren Bestimmungen über die Ausführung dieser Vorschrift hat der Minister für Handel und Gewerbe zu erlassen.

§ 4. Alle mit diesem Gesetz nicht im Einklange stehenden Bestimmungen, insbesondere das Gesetz, den Betrieb der Dampfkessel betreffend, vom 7. Mai 1856, werden aufgehoben.

d. Anweisung, betreffend die Genehmigung und Untersuchung der Dampfkessel.

(Erlafs des Ministers für Handel und Gewerbe vom 16. März 1892.)

I. Allgemeine Bestimmungen.

§ 1. **Begrenzung des Geltungskreises der Anweisung.** Der gegenwärtigen Anweisung unterliegen Dampfkessel aller Art (feststehende, bewegliche Dampfkessel, Dampfschiffskessel), auch wenn sie nicht zum Maschinenbetriebe noch zu gewerbsmäfsiger Verwendung bestimmt sind.

Die im § 22 der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen über die Anlegung von Dampfkesseln (Bekanntmachung des Reichskanzlers vom 5. August 1890) bezeichneten Dampfvorrichtungen gelten nicht als Dampfkessel im Sinne dieser Anweisung.

Die gegenwärtige Anweisung findet auf die Lokomotiven derjenigen Eisenbahnen, welche den Bestimmungen des Gesetzes vom 3. November 1838 unterliegen, keine Anwendung. Für die Genehmigung zur Inbetriebnahme und für die regelmäfsigen Untersuchungen von Lokomotiven dieser Gattung sind ausschliefslich die Bestimmungen des vom Bundesrate erlassenen Bahnpolizeireglements für die Eisenbahnen Deutschlands vom 30. November 1885 und der Bahnordnung für deutsche Eisenbahnen untergeordneter Bedeutung vom 12. Juni 1878 mafsgebend.

Dagegen sind die Lokomotiven, die sich im Besitze von Unternehmern gewerblicher Anlagen befinden, auch wenn diese Anlagen Anschlufs an eine dem öffentlichen Verkehr dienende Eisenbahn haben, ferner die Lokomotiven der Unternehmer von Erdarbeiten, von Dampfstrafsenbahnen, Lokalbahnen, Zahnradbahnen u. s. w. dieser Anweisung unterworfen. Lokomotiven dieser Art werden den beweglichen Dampfkesseln gleichgeachtet.

§ 2. **Prüfung der Kessel durch staatliche Beamte.** Die Ausführung der auf grund der nachstehenden Vorschriften vorzunehmenden Prüfungen, Druckproben und Untersuchungen der Dampfkessel erfolgt:

1. bei Dampfkesseln auf den staatlichen Bergwerken, Aufbereitungsanstalten, Salinen und Hütten durch die Leiter dieser Werke, deren Stellvertreter oder besonders bestellte Prüfungsbeamte, bei den Dampfkesseln auf Privat-Bergwerken, Aufbereitungsanstalten und Salinen, auf welche die Vorschriften des Allgemeinen Berggesetzes vom 24. Juni 1865*) Anwendung finden, sowie bei Dampfkesseln auf den der Aufsicht der Bergbehörden unterstellten, nicht unter das Allgemeine Berggesetz fallenden unterirdischen Betrieben durch die Berg-Revier-Beamten,

2. bei den Kesseln der Staatseisenbahnen durch die zuständigen technischen Beamten der Staats-Eisenbahnverwaltung, bei den Privateisenbahnen durch die von dem königlichen Eisenbahnkommissariat damit beauftragten Sachverständigen,

3. bei den Dampfkesseln der Strombauverwaltung und den im Betriebe der Bauverwaltung benutzten Kesseln derjenigen königlichen Regierungen, bei denen besondere, für das Fach vorgebildete Beamte, Bauinspektoren, Maschineninspektoren oder Obermaschinenmeister — angestellt sind, durch diese Beamten,

4. im übrigen durch die königlichen Gewerbeinspektoren und deren Assistenten.

In denjenigen Regierungsbezirken, in denen Gewerbeinspektionen noch nicht gebildet sind, verbleibt die amtliche Prüfung der Dampfkessel den zur Zeit des Erlasses dieser Anweisung damit beauftragten Kreisbaubeamten oder den dazu berufenen besonderen Sachverständigen bis zur Errichtung von Gewerbeinspektionen.

§ 3. **Dampfkessel-Ueberwachungsvereine.** Vereinen von Dampfkesselbesitzern, welche eine regelmäfsige und sorgfältige Ueberwachung der Kessel vornehmen lassen, kann durch den Minister für Handel und Gewerbe die Vergünstigung erteilt werden, dafs die Kessel der Mitglieder von den amtlichen Prüfungen u. s. w. (§ 2) befreit sind.

Die vorgeschriebenen Prüfungen, Druckproben und Untersuchungen werden alsdann von den Ingenieuren der Kesselüberwachungsvereine nach Mafsgabe der ihnen von dem Minister für Handel und Gewerbe verliehenen Berechtigungen ausgeführt.

Die Erteilung der im Absatz 1 gedachten Vergünstigung an die Vereine und die Verleihung der im Absatz 2 erwähnten Berechtigungen an die Vereinsingenieure ist jeder Zeit widerruflich.

---

*) Eine Abänderung dieses Gesetzes hat 1892 durch Novelle stattgefunden.

Die Erteilung der Vergünstigung an die Vereine und die Entziehung derselben durch Widerruf ist in den Amtsblättern der beteiligten Regierungen öffentlich bekannt zu machen.

§ 4. Die im § 3 bezeichneten Vereine haben den königlichen Regierungspräsidenten — in Berlin dem königlichen Polizeipräsidenten — und den Oberbergämtern, für deren Bezirke sie zugelassen sind, nach Ablauf jedes Jahres einzureichen:

1. ein Verzeichnis der dem Vereine angehörenden Kesselbesitzer unter Angabe der Zahl der von ihnen in dem Bezirke betriebenen Kessel,

2. eine Uebersicht der im Laufe des Jahres in dem Bezirke ausgeführten Prüfungen, Wasserdruckproben und Untersuchungen und ihres Ergebnisses.

Die Vereine haben ferner von jeder Aufnahme und von jedem Ausscheiden eines Kessels dem zur Untersuchung desselben zuständigen staatlichen Beamten unverzüglich Nachricht zu geben.

Endlich haben sie regelmäfsige Jahresberichte an den Minister für Handel und Gewerbe zu erstatten.

§ 5. **Befreiung einzelner Kesselbesitzer von den amtlichen Prüfungen.** Eine gleiche Vergünstigung, wie nach § 3 Abs. 1 den Dampfkessel-Ueberwachungsvereinen, kann ausnahmsweise auch einzelnen Dampfkesselbesitzern, sowie den Privateisenbahnen, welche für eine sachgemäfse Ausführung der Prüfungen und Druckproben und für eine regelmäfsige Ueberwachung ihrer Dampfkessel entsprechende Einrichtungen getroffen haben, zu teil werden.

Dieselben haben alsdann den im § 4 Abs. 1 bezeichneten Behörden nach Ablauf jedes Jahres die Anzahl der von ihnen betriebenen Dampfkessel anzuzeigen und die unter Ziffer 2 daselbst vorgeschriebene Uebersicht einzureichen.

§ 6. **Freizügigkeit der Kessel.** Die durch die zuständige Behörde eines anderen Bundesstaates erteilten gewerbepolizeilichen Genehmigungen für bewegliche Dampfkessel und Dampfschiffskessel, ferner die von einem hierzu ermächtigten Beamten oder Sachverständigen eines anderen Bundesstaates ausgestellten Bescheinigungen über die Bauart und die Abnahmeprüfung von Dampfkesseln, über die auf grund des § 11 und des § 12 Abs. 1 der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen vom 5. August 1890 ausgeführten Druckproben, endlich über die Vornahme regelmäfsiger Untersuchungen werden in Preufsen anerkannt.

II. Anlegung der Dampfkessel.

§ 7. **Fälle der Genehmigung.** Zur Anlegung von Dampfkesseln bedarf es einer gewerbepolizeilichen Genehmigung, welche bei feststehenden Dampfkesseln für eine bestimmte Betriebsstätte, bei Dampfschiffskesseln für ein bestimmtes Schiff, bei beweglichen Dampfkesseln ohne Beziehung zu einer Betriebsstätte erteilt wird.

§ 8. Einer erneuten Genehmigung bedürfen

1. Dampfkessel, welche wesentliche Aenderungen in ihrer Bauart erfahren,

2. Dampfkessel, welche wieder in Betrieb genommen werden sollen, nachdem die früher erteilte Genehmigung wegen unterlassenen Betriebes nach § 49 der Gewerbeordnung erloschen ist,

3. feststehende Dampfkessel, welche wesentlichen Aenderungen in der Lage oder Beschaffenheit der Betriebsstätte unterworfen werden sollen,

4. Dampfschiffskessel, welche aufserhalb des Schiffes, auf das die Genehmigung lautet, — sei es in Verbindung mit einem anderen Schiffe, sei es auf dem Festlande — in Betrieb genommen werden sollen,

5. bewegliche Dampfkessel, welche an einem Betriebsorte zu dauernder Benutzung aufgestellt werden sollen.

Endlich bedarf es einer erneuten Genehmigung des Kessels, wenn eine Erhöhung der in der Genehmigungsurkunde festgesetzten höchsten zulässigen Dampfspannung oder eine Aenderung der in der Genehmigungsurkunde aufgeführten Bedingungen stattfinden soll.

§ 9. **Zuständigkeit.** Ueber die nach §§ 7 und 8 vorgeschriebenen Genehmigungen beschliefst hinsichtlich der zum Betriebe auf Bergwerken, Aufbereitungsanstalten und Salinen bestimmten Dampfkessel das Oberbergamt, im übrigen der Kreisausschufs (in den Hohenzollernschen Landen der Amtsausschufs), in Stadtkreisen der Stadtausschufs, in den einem Landkreise angehörigen Städten mit mehr als 10 000 Einwohnern der Magistrat (kollegialische Gemeindevorstand).

Die örtliche Zuständigkeit bestimmt sich

1. bei den feststehenden Dampfkesseln nach dem Orte der Errichtung,
2. bei beweglichen Dampfkesseln nach dem Wohnsitze des Antragstellers,
3. bei Dampfschiffskesseln nach dem Heimatshafen des Schiffes, in Ermanglung eines solchen nach dem Wohnsitze des Schiffseigners.

§ 10. **Form und Unterlagen des Antrages.** Anträge auf Erteilung der in den §§ 7 und 8 gedachten Genehmigungen sind als schleunige Angelegenheiten zu behandeln.

Der Antrag ist bei dem Vorsitzenden der zur Beschlufsfassung zuständigen Behörde, hinsichtlich der der Beschlufsfassung des Oberbergamtes unterliegenden Kesselanlagen jedoch bei dem zuständigen Revierbeamten anzubringen.

Aus dem Gesuche mufs der vollständige Name, der Stand und der Wohnort des Unternehmers ersichtlich sein. Demselben sind in je zwei Ausfertigungen beizufügen:

1. eine Beschreibung, aus welcher die Angaben des Fabrikschildes (§ 10 der allgemeinen polizeilichen Bestimmungen vom 5. August 1890), die Abmessungen des Kessels, die Stärke und Gattung der Wandungen, die Art der Zusammensetzung, die Abmessungen der Ventile und deren Belastung, die Einrichtung der Speisevorrichtung, des Speiseventils und der Feuerung, endlich, wenn der Kessel zum Betriebe von Dampfmaschinen dient, die Art und Kraft der Maschinen zu entnehmen sind,
2. eine mafsstäbliche Zeichnung, aus welcher die Gröfse der vom Feuer berührten Fläche zu berechnen ist und die Höhe des niedrigsten zulässigen Wasserstandes über den Feuerzügen und die etwa vorhandenen Verankerungen und Versteifungen zu ersehen sind; bei Dampfschiffskesseln hat sich die mafsstäbliche Zeichnung auch auf den Schiffsteil, an welchem der Kessel eingebaut oder aufgestellt ist, zu erstrecken.

Wenn die Anlegung eines feststehenden Kessels beabsichtigt wird, so sind ferner in je zwei Ausfertigungen einzureichen:

3. ein Lageplan, welcher die an den Ort der Aufstellung des Kessels stofsender Grundstücke zu umfassen hat,
4. ein Baurifs, aus dem der Standort der Maschine und des Kessels, der Stand ort und die Höhe des Schornsteins, sowie die Lage der Feuer- und Rauchröhrer gegen die benachbarten Grundstücke deutlich zu erkennen sind.

Für die erforderlichen Zeichnungen ist ein auf ihnen einzutragender Mafsstab zu wählen, welcher eine deutliche Anschauung gewährt.

Beschreibungen und Zeichnungen sind von dem Verfertiger und dem Unternehmer unter Angabe des Datums zu unterschreiben.

§ 11. **Verfahren.** Die Behörden, bei welchen der Antrag eingereicht wird, prüfen, ob gegen die Vollständigkeit der Vorlage etwas zu erinnern ist. Die eine Ausfertigung wird zu diesem Behufe dem zuständigen Kesselprüfer (§§ 2 und 3) vorgelegt, welcher die erfolgte Prüfung auf den Vorlagen zu bescheinigen hat. Erscheint es mit Rücksicht auf die Natur der beabsichtigten Anlage erforderlich, dem Lageplane eine weitere Ausdehnung zu geben, oder finden sich andere Mängel, so ist der Unternehmer auf kürzestem Wege zur Ergänzung zu veranlassen.

In denjenigen Städten, in denen die Baupolizei einer Königlichen Behörde zusteht, ist bei feststehenden Dampfkesseln das für vollständig befundene, von dem Kesselprüfer begutachtete Genehmigungsgesuch vor der Beschlufsfassung dieser Behörde zur Prüfung zu übersenden. Diese Bestimmung findet auf die für Bergwerke, Aufbereitungsanstalten und Salinen bestimmten Kessel keine Anwendung.

§ 12. **Beschlufsfassung.** Die Beschlufsfassung über das Genehmigungsgesuch erfolgt durch das Kollegium der Beschlufsbehörde. Die Zulässigkeit der Anlage ist nach den bestehenden bau-, feuer- und gesundheitspolizeilichen Vorschriften, sowie nach den allgemeinen polizeilichen Bestimmungen des Bundesrats über die Anlegung von Dampfkesseln (Bekanntmachung des Reichskanzlers vom 5. August 1890) zu prüfen.

Wird die Genehmigung nach dem Antrage des Unternehmers ohne Bedingungen oder unter Bedingungen, mit denen er sich ausdrücklich einverstanden erklärt hat, erteilt, so bedarf es eines besonderen Bescheides nicht, sondern die Behörde fertigt alsbald die Genehmigungsurkunde (§ 15) aus. Wird die Genehmigung versagt oder unter Bedingungen erteilt, mit denen sich der Unternehmer nicht ausdrücklich einverstanden erklärt hat, so erläfst die Beschlufsbehörde einen schriftlichen, mit Gründen versehenen Bescheid an denselben.

Der Unternehmer kann innerhalb 14 Tagen nach Zustellung des Bescheides entweder Beschwerde an den Minister für Handel und Gewerbe einlegen oder auf mündliche Verhandlung der Sache durch die Beschlufsbehörde antragen. Der im letzteren Falle ergehende Bescheid kann innerhalb zweier Wochen nach der Zustellung durch Beschwerde an den Minister für Handel und Gewerbe angefochten werden.

§ 13. **Vorbescheid.** In Fällen, welche keinen Aufschub zulassen oder klar liegen, ist der Vorsitzende des Kreis-, (Amts-, Stadt-) Ausschusses befugt, namens dieser Behörde über das Genehmigungsgesuch zu entscheiden. Der § 12 Abs. 2 findet dabei entsprechende Anwendung.

Wird schriftlicher Bescheid erteilt, so ist dem Unternehmer darin zu eröffnen, dafs ihm gegen den Bescheid innerhalb zweier Wochen von der Zustellung an der Antrag auf Beschlufsfassung durch das Kollegium (§ 12) zustehe.

Für die Berechnung der in diesem und dem vorigen Paragraphen vorgeschriebenen Fristen sind die Vorschriften der Civilprozefsordnung mafsgebend.

§ 14. **Beschwerdeverfahren.** Auf die Einlegung der Beschwerde (§ 12 Abs. 3) und das weitere Verfahren findet der § 122 des Gesetzes über die allgemeine Landesverwaltung vom 30. Juli 1883 Anwendung. In besonderen Fällen kann zur Begründung der Beschwerde eine Nachfrist bewilligt werden.

Der auf die Beschwerde ergehende Bescheid wird der Beschlufsbehörde erster Instanz zugefertigt, welche ihn in Ausfertigung dem Unternehmer mitteilt.

§ 15. Bei Erteilung der Genehmigung zur Anlegung eines Dampfkessels kann von der genehmigenden Behörde eine Frist gesetzt werden, binnen welcher die Anlage bei Vermeidung des Erlöschens der Genehmigung in Betrieb gesetzt werden mufs. Ist eine solche Frist nicht bestimmt, so erlischt die erteilte Genehmigung, wenn der Unternehmer nach Empfang der Genehmigungsurkunde (§ 16) ein Jahr verstreichen läfst, ohne den Kessel in Betrieb zu nehmen.

Eine Verlängerung der Frist kann von der Behörde bewilligt werden, wenn erhebliche Gründe nicht entgegenstehen.

§ 16. **Genehmigungsurkunde.** Für die Ausstellung der Genehmigungsurkunde ist der Vordruck A*) zu benutzen.

In denjenigen Fällen, in denen nach §§ 12 und 13 dem Unternehmer schriftlicher Bescheid zu erteilen ist, erfolgt die Ausfertigung der Genehmigungsurkunde durch die Beschlufsbehörde erster Instanz nach Abschlufs des Verfahrens.

In der Urkunde sind alle Bedingungen, unter welchen die Kesselanlage genehmigt worden ist, aufzuführen. Die zugehörigen Beschreibungen, Zeichnungen und Pläne sind mit ihr durch Schnur und Siegel zu verbinden.

Eine Ausfertigung der Genehmigungsurkunde ist dem Unternehmer, eine zweite der zuständigen Ortspolizeibehörde zu übersenden, an deren Stelle bei den den Bergbehörden unterstellten Dampfkesseln der Bergrevierbeamte tritt.

§ 17. **Genehmigung mehrerer Lokomobilen durch eine Urkunde.** Die Genehmigung kann für mehrere bewegliche Kessel von übereinstimmender Bauart, Ausrüstung und Gröfse, welche in einer Fabrik im Laufe eines Kalenderjahres hergestellt werden, gemeinsam im voraus beantragt und durch eine Urkunde erteilt werden.

Für jeden auf grund dieser Genehmigungsurkunde hergestellten beweglichen Kessel ist eine mit der Fabriknummer zu versehende, durch den zuständigen Kesselprüfer zu beglaubigende Abschrift der Genehmigungsurkunde und ihrer Zubehörungen anzufertigen. Dieselbe gilt als Genehmigungsurkunde für den Kessel, dessen Fabriknummer sie trägt.

§ 18. **Genehmigung alter Kessel.** Den Gesuchen um erneute Genehmigung bereits anderweit im Betriebe gewesener alter Kessel (§ 8) ist ein vollständiger Nachweis über den Erbauer des Kessels, über die früheren Betriebsstätten desselben, über die Zeit, während welcher der Kessel überhaupt schon betrieben worden ist, und über die Gründe beizufügen, welche dazu geführt haben, den Kessel aufser Betrieb zu setzen.

Vor der Entscheidung über den Genehmigungsantrag ist eine innere Untersuchung des Kessels mit genauer Ermittlung der Beschaffenheit des verwendeten Baustoffes und der in den einzelnen Kesselteilen vorhandenen Blechstärken (durch

---

*) Dieser und die nachbenannten Vordrucke finden sich in der Ausgabe der „Anweisung u. s. w." von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1892.

Anbohren und dergl.) vorzunehmen. Auf grund dieser Ermittlungen wird, falls darnach die Genehmigung überhaupt erteilt werden kann, die höchste zulässige Dampfspannung festgesetzt.

Bei denjenigen alt angekauften Dampfkesseln, deren frühere Dampfspannung und Herkunft nicht nachgewiesen werden kann, darf die Wiedergenehmigung nur ausnahmsweise auf grund einer nach obiger Anleitung besonders sorgfältig ausgeführten Untersuchung der gesamten Beschaffenheit des Kessels und überdies nur dann erfolgen, wenn der Antragsteller selbst die Aufstellung und Benutzung des Kessels beabsichtigt.

Vorstehende Bestimmungen finden auch auf solche Kessel Anwendung, welche aus Teilen alter Kessel unter Hinzufügung neuen Baustoffes hergestellt sind.

§ 19. **Erlöschen der Genehmigung.** Ist ein Dampfkessel während eines Zeitraumes von drei Jahren aufser Betrieb gesetzt, ohne dafs Fristung nachgesucht und bewilligt worden ist, so erlischt die für denselben erteilte Genehmigung. Das Verfahren für die Fristung ist dasselbe wie für die Genehmigung zur Anlegung von Dampfkesseln.

III. Inbetriebsetzung der Dampfkessel.

§ 20. Dampfkessel sind, bevor sie in Betrieb gesetzt werden dürfen, durch die zuständigen Kesselprüfer (§§ 2 und 3) einer Prüfung der Bauart (Konstruktionsprüfung), einer Wasserdruckprobe und einer Abnahmeprüfung zu unterwerfen.

§ 21. **Prüfung der Bauart.** Die Prüfung der Bauart hat die Untersuchung des Kessels in Beziehung auf Zusammensetzung, Baustoff und Ausführung zum Gegenstande.

§ 22. **Wasserdruckprobe.** Die Wasserdruckprobe bezweckt die Prüfung der Widerstandsfähigkeit und Dichtigkeit des Kessels. Sie erfolgt bei Dampfkesseln, welche für eine Dampfspannung von nicht mehr als 5 Atm. Ueberdruck bestimmt sind, mit dem zweifachen Betrage des beabsichtigten Ueberdruckes, bei allen übrigen Dampfkesseln mit einem Drucke, welcher den beabsichtigten Ueberdruck um 5 Atm. übersteigt.

Unter Atmosphärendruck wird ein Druck von 1 kg f. d. qcm verstanden.

Für die Ausführung der Druckprobe mufs der Kessel vollkommen mit Wasser gefüllt sein; in seinem höchsten Punkte mufs eine Oeffnung angebracht sein, durch welche beim Füllen die atmosphärische Luft entweichen kann. Die Kesselwandungen müssen dem Probedruck widerstehen, ohne eine bleibende Veränderung ihrer Form zu zeigen und ohne das Wasser bei dem höchsten Drucke in anderer Form als der von Nebel oder feinen Perlen durch die Fugen dringen zu lassen.

§ 23. Die Wasserdruckprobe, welche womöglich mit der Prüfung der Bauart zu verbinden ist, erfolgt nach der letzten Zusammensetzung, jedoch vor der Einmauerung oder Ummantlung des Kessels. Sie kann vor der Genehmigung der Kesselanlage (in der Kesselfabrik) ausgeführt werden.

Dampfkessel, welche der Druckprobe am Verfertigungsorte unterworfen und demnächst im ganzen nach ihrem Aufstellungsorte geschafft worden sind, unterliegen einer weiteren Druckprobe vor ihrer Einmauerung oder Ummantlung nur dann, wenn sie durch die Versendung oder aus anderer Veranlassung Beschädigungen erlitten haben, welche die Wiederholung der Druckprobe geboten erscheinen lassen. Dabei macht es keinen Unterschied, ob der Verfertigungsort in Preufsen oder in einem anderen Bundesstaate belegen ist (vergl. § 6).

§ 24. **Nietenstemplung.** Nach Ausführung der Druckprobe hat der Kesselprüfer — vorausgesetzt, dafs dieselbe zur Beanstandung des Kessels keinen Anlafs gegeben hat — die Kupferniete, mit welchen das Fabrikschild (§ 10 der polizeilichen Bestimmungen vom 5. August 1890) an dem Kessel befestigt ist, mit seinem Stempel zu versehen. Dieser ist in dem Prüfungszeugnisse abzudrucken.

§ 25. **Abnahmeprüfung.** Die Abnahmeprüfung hat festzustellen, ob die Ausführung der Kesselanlage den Bestimmungen der erteilten Genehmigung entspricht. Sie ist bei Kesseln, die eingemauert oder ummantelt werden, nach der Einmauerung oder Ummantlung vorzunehmen.

Bei Dampfschiffskesseln erfolgt die Abnahmeprüfung in dem Heimatshafen des Schiffes oder in dem ersten deutschen Anlaufshafen oder an dem Orte, an welchem der Kessel in das Schiff eingebaut oder mit demselben verbunden worden ist. Bei

Schiffskesseln, welche in einem der Bundesstaaten genehmigt worden sind und in Preufsen zur Abnahmeprüfung gestellt werden, hat die Untersuchung sich auch darauf zu erstrecken, ob denjenigen Genehmigungsbedingungen, welche nach Mafsgabe der in jenem Bundesstaate über die Anlegung von Dampfschiffskesseln geltenden besonderen polizeilichen Bestimmungen vorgeschrieben wurden, entsprochen worden ist.

§ 26. **Wirkungen der Abnahmeprüfung.** Auf grund der durch den Kesselprüfer ordnungsmäfsig bescheinigten (§ 27) Abnahmeprüfung darf der Kessel ohne weiteres in Betrieb gesetzt werden.

Bewegliche Kessel, deren Inbetriebnahme in einem Bundesstaate genehmigt worden ist, können — vorbehaltlich der Bestimmungen über die regelmäfsigen Untersuchungen (Abschnitt V) — in jedem anderen Bundesstaate ohne nochmalige vorgängige Genehmigung in Betrieb gesetzt werden. Dasselbe gilt für Dampfschiffskessel, wenn sie sich auf Schiffen befinden, welche Gewässer verschiedener Bundesstaaten befahren.

Bevor ein beweglicher Kessel in dem Bezirke einer Ortspolizeibehörde in Betrieb genommen wird, ist der letzteren von dem Betriebsunternehmer oder dessen Stellvertreter unter Angabe der Stelle, an welcher der Betrieb stattfinden soll, Anzeige zu erstatten. Ist der Kessel für die der Aufsicht der Bergbehörden unterstellten Betriebe bestimmt, so ist die Anzeige den im § 2, 1 bezeichneten Beamten zu erstatten.

§ 27. **Bescheinigungen. Revisionsbuch.** Die Kesselprüfer haben über die von ihnen ausgeführten Prüfungen der Bauart, Druckproben und Abnahmeprüfungen schriftliche Bescheinigungen auszustellen und binnen drei Tagen dem Kesselbesitzer auszuhändigen. Sie haben sich zu diesem Behufe der Vordrucke B, C, F und G zu bedienen, der Vordrucke B und F jedoch nur in dem Falle, dafs die Wasserdruckprobe nicht in Verbindung mit der Prüfung der Bauart bewirkt worden ist. Die Bescheinigungen sind mit der Genehmigungsurkunde (§ 16) zu verbinden.

Abschrift der Bescheinigung über die Abnahmeprüfung ist der Ortspolizeibehörde oder der an ihre Stelle tretenden Bergbehörde mitzuteilen.

Derjenige Kesselprüfer, welcher die Abnahmebescheinigung ausstellt, hat gleichzeitig das Titelblatt für das zu dem Kessel gehörige Revisionsbuch, unter Benutzung des Formulars D, auszufertigen. Als Einlagebogen des Revisionsbuches ist der Vordruck E zu verwenden. Dem neuen Revisionsbuche ist das bisherige Kesselbuch vorzuheften.

Revisionsbücher für bewegliche Dampfkessel und Dampfschiffskessel, welche in einem anderen Bundesstaate ausgefertigt sind, werden in Preufsen zur Weiterbenutzung zugelassen, auch wenn die Einlagebogen dem Vordrucke E nicht entsprechen.

Die Genehmigungsurkunde nebst Anlagen und das Revisionsbuch sind an der Betriebsstätte des Kessels aufzubewahren und jedem zur Aufsicht zuständigen Beamten oder Sachverständigen auf Verlangen vorzulegen.

Für Kessel, welche der Wasserdruckprobe (§ 22) in einem anderen Bundesstaate unterworfen worden sind, ist der Nachweis einer Prüfung der Bauart (§ 21) nicht zu fordern.

IV. Prüfung nach einer Hauptausbesserung.

§ 28. Dampfkessel, welche eine Ausbesserung in der Kesselfabrik erfahren haben oder zur Ausbesserung an der Betriebsstätte ganz blofsgelegt worden sind, müssen vor der Wiederinbetriebsetzung einer Prüfung mittelst Wasserdruckes unterworfen werden.

Einer gleichen Prüfung bedarf es, wenn bei Kesseln mit innerem Feuerrohr ein solches Rohr und bei den nach Art der Lokomotivkessel gebauten Kesseln die Feuerbüchse behufs Ausbesserung oder Erneuerung herausgenommen, oder wenn bei cylindrischen und Siedekesseln eine oder mehrere Platten neu eingezogen werden.

Die Ausführung der Druckprobe erfolgt nach den Vorschriften der §§ 22 und 23 mit der Mafsgabe, dafs in den Fällen des Absatz 2 dieses Paragraphen die völlige Blofslegung des Kessels nicht erforderlich ist.

Ueber die Druckprobe ist unter Benutzung des Vordruckes B eine Bescheinigung auszustellen, die mit der Genehmigungsurkunde des Kessels zu verbinden ist.

In der Bescheinigung ist anzugeben, worin die ausgeführte Ausbesserung bestanden hat und von wem sie bewirkt worden ist.

Eine Stemplung der das Fabrikschild mit dem Kessel verbindenden Niete findet bei Druckproben nach Hauptausbesserungen nicht statt.

V. Regelmäfsige technische Untersuchungen.

§ 29. Jeder zum Betriebe aufgestellte Dampfkessel, er mag unausgesetzt oder nur in bestimmten Zeitabschnitten oder unter gewissen Voraussetzungen (z. B. Reservekessel) betrieben werden, ist von Zeit zu Zeit einer technischen Untersuchung zu unterziehen.

Dieser Vorschrift unterliegen Dampfkessel dann nicht mehr, wenn ihre Genehmigung durch dreijährigen Nichtgebrauch (§ 19) oder durch ausdrücklichen der Polizeibehörde erklärten Verzicht erloschen ist.

Von dem Erlöschen von Kesselgenehmigungen, sowie von der etwaigen Wiedereröffnung des Betriebes ist den Kesselprüfern durch die Ortspolizeibehörden, bei Bergwerken, Aufbereitungsanstalten und Salinen durch den zuständigen Bergrevierbeamten alsbald Kenntnis zu geben.

Eine Entbindung von den wiederkehrenden Untersuchungen kann nur durch Verfügung des Ministers für Handel und Gewerbe erfolgen.

§ 30. Die technische Untersuchung bezweckt die Prüfung

1. der fortdauernden Uebereinstimmung der Kesselanlage mit den bestehenden gesetzlichen und polizeilichen Vorschriften und mit dem Inhalt der Genehmigungsurkunde,

2. ihres betriebsfähigen Zustandes,

3. ihrer sachgemäfsen Wartung, insbesondere der bestimmungsmäfsigen Benutzung der vorgeschriebenen Sicherheitsvorrichtungen.

§ 31. Die Untersuchung erfolgt, soweit nicht der Kesselbesitzer den im § 3 bezeichneten Vereinen angehört, durch den staatlichen Prüfungsbeamten (§ 2), in dessen Amtsbezirke die Kesselanlage sich befindet.

Bewegliche Kessel gehören zu demjenigen Bezirke, in welchem ihr Besitzer oder dessen Vertreter wohnt, Dampfschiffskessel zu demjenigen, in welchem die Schiffe überwintern oder, falls dies aufserhalb Landes geschieht, zu demjenigen, in welchem ihr Hauptanlegeplatz sich befindet. Bewegliche Dampfkessel, welche auf Bergwerken, Aufbereitungsanstalten oder Salinen und anderen zugehörigen Anlagen verwendet werden, unterliegen während der Dauer dieser Verwendung der wiederkehrenden Untersuchung durch den nach § 2, 1 zuständigen Beamten.

§ 32. Die amtliche Untersuchung der Dampfkessel ist eine äufsere oder eine innere oder eine Prüfung durch Wasserdruck.

Die regelmäfsige äufsere Untersuchung findet bei feststehenden Dampfkesseln alle zwei Jahre, bei beweglichen und Schiffsdampfkesseln alle Jahre statt.

Die regelmäfsige innere Untersuchung ist bei feststehenden Kesseln alle vier Jahre, bei beweglichen alle drei Jahre und bei Schiffsdampfkesseln alle zwei Jahre vorzunehmen.

Die regelmäfsige Wasserdruckprobe findet bei feststehenden Kesseln mindestens alle acht Jahre, bei beweglichen und Schiffsdampfkesseln mindestens alle sechs Jahre statt und ist mit der in demselben Jahre fälligen inneren Untersuchung möglichst zu verbinden.

Die innere Untersuchung kann nach Ermessen des Prüfers durch eine Wasserdruckprobe ergänzt werden. Sie ist stets durch eine Wasserdruckprobe zu ergänzen oder zu ersetzen bei Kesselkörpern, welche ihrer Bauart halber nicht genügend besichtigt werden können.

In denjenigen Jahren, in denen eine innere Untersuchung oder eine Wasserdruckprobe vorgenommen wird, kommt die fällige regelmäfsige äufsere Untersuchung in Fortfall.

Alle Prüfungsfristen laufen vom Tage der technisch-polizeilichen Abnahme bezw. der letzten gleichartigen Untersuchung ab. Ihre Ueberschreitung um mehr als zwei Monate ist nur ausnahmsweise und nicht über einen Zeitraum von sechs Monaten zulässig und ist in dem Jahresberichte des Kesselprüfers (§§ 4 und 39) zu begründen.

Wenn ein ganzes Fabrikunternehmen oder eine einzelne selbständige Abteilung eines gröfseren Werkes längere Zeit vollständig aufser Betrieb gesetzt war, so ist die Zeit des Stillstandes bei Berechnung der Prüfungsfristen bis zur Dauer von

zwei Jahren aufser Ansatz zu bringen. Von derartigen Unterbrechungen des Betriebes und von der Wiedereröffnung desselben hat der Betriebsunternehmer dem Kesselprüfer und der Ortspolizeibehörde Anzeige zu erstatten. Für den Bereich der Bergverwaltung ist in denjenigen Fällen, in denen der die Ortspolizei handhabende Revierbeamte gleichzeitig Kesselprüfer ist, eine Anzeige ausreichend. Nach einer Betriebsunterbrechung von mehr als zweijähriger Dauer darf der Betrieb erst nach Vornahme einer inneren, mit Wasserdruckprobe verbundenen amtlichen Untersuchung wieder eröffnet werden.

Bei Bemessung der Fristen werden Untersuchungen, welche in einem anderen Bundesstaate von den daselbst zuständigen Sachverständigen vorgenommen worden sind, den in Preufsen vorgenommenen gleich geachtet.

§ 33. Die äufsere Untersuchung besteht vornehmlich in einer Prüfung der ganzen Betriebsweise des Kessels; eine Unterbrechung des Betriebes darf dabei nur verlangt werden, wenn Anzeichen gefahrbringender Mängel, deren Vorhandensein und Umfang nicht anders festgestellt werden kann, sich ergeben haben.

Die Untersuchung ist zu richten:

auf die Ausführung und den Zustand der Speisevorrichtungen, der Wasserstandsvorrichtungen, der Sicherheitsventile und etwaiger anderer Sicherheitsvorrichtungen, der Feuerungsanlage und der Mittel zur Regelung und Absperrung des Zutrittes der Luft und zur thunlichst schnellen Beseitigung des Feuers,

auf alle ohne Unterbrechung oder Schädigung des Betriebes zugänglichen Kesselteile, namentlich die Feuerplatten,

auf die Anordnung und den Zustand der Abblasevorrichtungen, die Vorkehrungen zur Reinigung des Kesselinneren oder des Speisewassers und der Feuerzüge, sowie

auf alle etwa noch zum Betriebe des Kessels gehörigen Einrichtungen.

Die Betriebseinrichtungen sind in der Regel durch Ingangsetzen zu prüfen.

Ebenso ist bei der äufseren Untersuchung zu prüfen, ob der Kesselwärter die zur Sicherheit des Betriebes erforderlichen Vorrichtungen anzuwenden und die im Augenblicke der Gefahr notwendigen Mafsnahmen zu ergreifen versteht, und ob er mit der sachgemäfsen Behandlung der Feuerung und aller Betriebseinrichtungen vertraut ist.

§ 34. Die innere Untersuchung bezweckt die Prüfung der Beschaffenheit des Kesselkörpers, welcher dabei soweit wie nötig nach innen und aufsen genau zu besichtigen ist.

Zu ihrer Ausführung ist der Betrieb des Kessels einzustellen. Auch ist die Einmauerung oder Ummantlung soweit wie nötig zu entfernen, wenn die Untersuchung sich nicht zur Genüge durch Befahrung der Züge oder auf andere Weise bewirken läfst. Ferner kann in besonderen Fällen gefordert werden, dafs Feuerröhren, die nach der bei Lokomotiven gebräuchlichen Art eingesetzt sind, herausgenommen werden.

Wo zwei oder mehr Dampfkessel mit einer gemeinsamen Dampf- oder Speise-, oder Wasserablafs-Rohrleitung verbunden sind, ist der der inneren Untersuchung zu unterwerfende Dampfkessel zum Schutz der untersuchenden Personen von jeder der gemeinsamen Rohrleitungen in augenfälliger und wirksamer Weise durch geeignete Vorrichtungen zu trennen.

Die innere Untersuchung ist vornehmlich zu richten:

auf die Beschaffenheit der Kesselwandungen, Niete, Anker, Heiz- und Rauchrohre, wobei zu ermitteln ist, ob die Widerstandsfähigkeit dieser Teile durch den Gebrauch gefährdet ist,

auf das Vorhandensein und die Natur des Kesselsteines, seine genügende Beseitigung und die Mittel dazu,

auf den Zustand der Wasserzuleitungsröhren und der Reinigungsöffnungen,

auf den Zustand der Speise- und Dampfventile,

auf den Zustand der Verbindungsröhren zwischen Kessel und Manometer bezw. Wasserstandszeiger, sowie der übrigen Sicherheitsvorrichtungen,

auf den Zustand der ganzen Feuerungseinrichtung sowie der Feuerzüge aufserhalb wie innerhalb des Kessels.

§ 35. Die Wasserdruckprobe bezweckt die Prüfung der Widerstandsfähigkeit und Dichtigkeit des Kessels. Sie erfolgt bei Kesseln, welche für eine Dampfspannung

von nicht mehr als 10 Atm. Ueberdruck bestimmt sind, mit dem anderthalbfachen Betrage des genehmigten Ueberdruckes, im übrigen mit einem Drucke, welcher den genehmigten Ueberdruck um 5 Atm. übersteigt.

Die Bestimmungen in Absatz 2 und 3 des § 22 finden entsprechende Anwendung.

Bei der Probe ist, soweit dies vom Prüfer verlangt wird, die Ummauerung oder Ummantlung des Kessels zu beseitigen. Mit der Wasserdruckprobe ist eine Prüfung der Sicherheitsventile auf die Richtigkeit ihrer Belastung zu verbinden.

§ 36. Werden bei einer Untersuchung erhebliche Unregelmäfsigkeiten in dem Betriebe ermittelt, oder erscheint die Beobachtung eines zur Zeit noch unbedenklichen Schadens geboten, so kann nach dem Ermessen des Kesselprüfers in kürzerer Frist, als im § 32 festgesetzt ist, eine aufserordentliche Untersuchung vorgenommen werden.

Hat eine Untersuchung Mängel ergeben, welche Gefahr herbeiführen können, und wird diesen nicht sofort abgeholfen, so mufs nach Ablauf der zur Herstellung des vorschriftsmäfsigen Zustandes festzusetzenden Frist die Untersuchung von neuem vorgenommen werden.

Ergiebt sich bei der Untersuchung des Kessels ein Zustand, welcher eine unmittelbare Gefahr einschliefst, so ist die Fortsetzung des Betriebes bis zur Beseitigung der Gefahr zu untersagen und der Polizeibehörde des Ortes, an welchem sich der Kessel befindet, unverzüglich Anzeige zu erstatten. Diese hat darüber zu wachen, dafs der Kessel nicht wieder in Betrieb gesetzt wird, bis durch eine nochmalige Untersuchung der vorschriftsmäfsige Zustand der Anlage festgestellt ist.

Bei Dampfkesseln, die einer Königlichen Behörde oder einer solchen Eisenbahnverwaltung gehören, welche den Bestimmungen des Gesetzes vom 3. November 1838 unterliegen, tritt an die Stelle der Ortspolizeibehörde der die Aufsicht über den Kesselbetrieb führende Beamte bezw. die zuständige staatliche Aufsichtsbehörde, bei den den Bergbehörden unterstellten Dampfkesseln der zuständige Bergrevierbeamte. Diese Behörden können, sobald sie nicht am Betriebsorte oder in dessen unmittelbarer Nähe ihren Sitz haben, die Polizeibehörde des Ortes zur Ueberwachung der angeordneten Aufserbetriebsetzung eines Dampfkessels unter Mitteilung des Sachverhaltes hinzuziehen.

§ 37. Die äufsere Untersuchung erfolgt ohne vorherige Benachrichtigung des Kesselbesitzers.

Von einer bevorstehenden inneren Untersuchung oder Wasserdruckprobe ist der Besitzer mindestens vier Wochen vorher zu unterrichten.

Der Zeitpunkt für diese letzteren Untersuchungen ist nach Anhörung des Besitzers so zu wählen, dafs der Betrieb der Anlage so wenig wie möglich beeinträchtigt wird.

Zu dem Ende ist namentlich bei Anlagen, deren Betrieb nur zu gewisser Zeit im Jahre unterbrochen werden kann, diese zu wählen. Bewegliche Dampfkessel sind von den Besitzern oder deren Vertretern nach ergangener Aufforderung durch den Kesselprüfer an einem beliebigen Orte innerhalb dessen Amtsbezirkes für die Untersuchung bereit zu stellen.

Bewegliche Kessel auf Bergwerken, Aufbereitungsanstalten oder Salinen, staatlichen Hütten und unter der Leitung der Bergbehörden betriebenen Steinbrüchen sind von den im § 2, 1 genannten Beamten auf der Betriebsstelle zu untersuchen.

Durch die Untersuchung der Dampfschiffskessel dürfen die Fahrten der Schiffe nicht gestört werden; die innere Untersuchung und Wasserdruckprobe von Dampfschiffskesseln ist vor dem Beginn der Fahrten des betreffenden Jahres zu bewirken.

Falls ein Kesselbesitzer der Anforderung des zur Untersuchung berufenen Beamten, den Kessel für die innere Untersuchung oder Wasserdruckprobe bereitzustellen, nicht entspricht, so ist der Betrieb des Kessels bis auf weiteres polizeilich zu untersagen.

Die zur Ausführung der Untersuchung erforderlichen Arbeitskräfte und Vorrichtungen hat der Besitzer des Kessels dem Beamten unentgeltlich zur Verfügung zu stellen.

§ 38. Der Befund der Untersuchungen ist in das Revisionsbuch einzutragen.

Zur Abstellung der bei den Untersuchungen vorgefundenen Mängel und Unregelmäfsigkeiten kann der untersuchende Beamte unter Mitteilung einer Abschrift des Vermerkes über das Ergebnis der Untersuchung die Unterstützung der Polizeibehörde des Ortes, an welchem sich der Kessel befindet, in Anspruch nehmen.

Der § 36 Absatz 4 findet entsprechende Anwendung.

§ 39. Bis zum 1. März jedes Jahres hat der Prüfungsbeamte dem Regierungspräsidenten des Bezirkes, in Berlin dem Polizeipräsidenten, einen Jahresbericht über die von ihm auf grund dieser Anweisung geübte Thätigkeit zu erstatten. Diesem Berichte sind beizufügen:

1. eine Nachweisung der im Laufe des verflossenen Jahres ausgeführten wiederkehrenden technischen Untersuchungen (Abschnitt V), für welche der Vordruck H zu benutzen ist,

2. eine Uebersicht über die sonst von ihm bewirkten Prüfungen und Druckproben (Abschnitt III und IV, ferner § 18),

3. eine Nachweisung, aus welcher sich ergiebt,

a) inwieweit der Zugang von Dampfkesseln auf Neuanlegung solcher oder auf dem Uebergange von Dampfkesseln aus der Vereinsaufsicht zur staatlichen Aufsicht beruht,

b) inwieweit der Abgang von Dampfkesseln auf Aufserbetriebsetzung und Verlegung nach anderen Bezirken oder auf dem Uebergange aus der staatlichen in die Vereinsaufsicht beruht.

Auf die Dampfkessel der Eisenbahnen sowie der Staatsbauverwaltung und auf die den Bergbehörden unterstellten Dampfkessel findet diese Vorschrift keine Anwendung.

VI. Gebühren.

§ 40. Die Gebühren für die von Beamten des Staates ausgeführten Dampfkessel-Untersuchungen werden auf diejenigen Beträge festgesetzt, welche sich aus Ziffer I—III der Gebührenordnung Vordruck J ergeben. Die Festsetzung und Einziehung der Gebühren und Kosten erfolgt durch die Königlichen Regierungspräsidenten, in Berlin durch den Polizeipräsidenten, bei Kesseluntersuchungen auf Bergwerken, Aufbereitungsanstalten und Salinen durch die Königlichen Oberbergämter.

Die Kesselprüfungsbeamten haben diesen Behörden in regelmäfsigen von denselben zu bestimmenden Zeitabschnitten eine Berechnung der einzuziehenden Gebühren und anderen Kosten einzureichen.

§ 41. In denjenigen Regierungsbezirken, in denen die Kesseluntersuchungen durch die Beamten der Gewerbe-Inspektion bewirkt werden, fliefsen die Gebühren, mit Ausnahme der unter Nr. III Ziffer 3 der Gebührenordnung erwähnten, zur Staatskasse. Diese letzteren Gebühren sowie die nach Nr. IV von den Kesselbesitzern einzuziehenden Reisekosten sind den Prüfungsbeamten zu überweisen.

Das Gleiche gilt für die Beamten der Bergverwaltung, welche Kesseluntersuchungen auszuführen haben (§ 2, 1).

Hinsichtlich der übrigen staatlichen Prüfungsbeamten bewendet es bei den bestehenden Vorschriften darüber, inwieweit sie einen Anspruch auf die von den Kesselbesitzern einzuziehenden Gebühren und Reisekosten haben.

§ 42. In denjenigen Regierungsbezirken, in welchen die Kesseluntersuchungen den Beamten der Gewerbe-Inspektion obliegen, hat der Regierungs- und Gewerberat eine Liste über die in dem Bezirk ausgeführten regelmäfsigen Kesseluntersuchungen nach dem Vordruck K zu führen und durch Eintragungen bei Eingang der Gebührenberechnungen auf dem Laufenden zu erhalten.

§ 43. Diese Anweisung tritt — unter Aufhebung der das Dampfkesselwesen betreffenden Vorschriften der Anweisung zur Ausführung der Gewerbeordnung vom $\frac{\text{4. September 1869}}{\text{19. Juli 1884}}$ und des Regulatives über die Revision der Dampfkessel vom 24. Juni 1872 — am 1. April 1892 in Kraft.

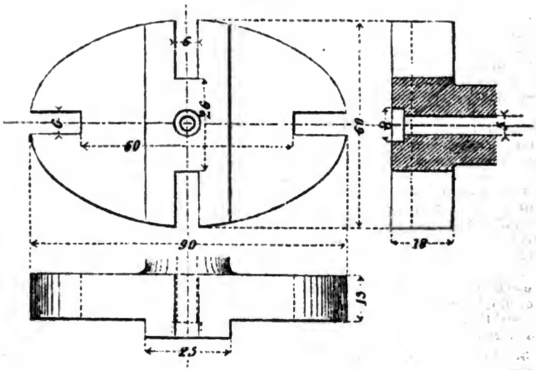
Anmerkung.

Zur Anbringung des amtlichen Manometers (vergl. § 35 d. Anweis. und § 18 d. allgem. pol. Bestimmungen [s. S. 788]) sowie des zu demselben gehörigen Wasserhahns mufs das betreffende Rohrstück in einen ovalen Flansch (Kontrollflansch) von der in Abbild. 707 (s. f. S.) gezeichneten Form endigen. Mafse in mm.

Bayern und Rufsland schreiben einen runden Flansch von 37 mm Durchmesser, Holland, Belgien, Frankreich, Italien, die Schweiz, Dänemark, Schweden und

Norwegen einen solchen von 40 mm Durchmesser vor. Eine Muffe mit inn Whitworth-Gewinde verlangen Sachsen (1/2-zöllig) und Oesterreich-Un (3/4-zöllig).

Abbild. 707.



II. Gesetzliche Vorschriften über Dampfkessel in Oesterreich.*)

§ 1. Als **Dampfkessel** im Sinne der gegenwärtigen Verordnung, werden jene Gefäfse betrachtet, welche dazu dienen, um Flüssigkeiten in Dämpfe von höheren Spannung als jene des atmosphärischen Luftdruckes zu verwandeln.

Ausgenommen hiervon sind jene Gefäfse, welche Dämpfe von weniger al Atm. Ueberdruck zu erzeugen bestimmt sind, wenn sie durch ein in den Wa raum reichendes, oben offenes, gerades und unverschliefsbares Standrohr von höch 5 m Höhe und mindestens 10 cm Weite mit der Atmosphäre verbunden sind.

§ 2. Die Wahl des **Materiales**, dann die Bestimmung der Stärke sowie Art der Konstruktion und Ausführung der Dampfkessel bleibt dem Verfertiger u seiner eigenen Verantwortung überlassen. Nur die Verwendung von Gufseisen Messingblech zu den Wandungen der Dampfkessel, der Feuer- und Siederöhre im allgemeinen untersagt; doch ist es gestattet, sich des Messingbleches zu Fe und Siederöhren bis 10 cm Durchmesser zu bedienen.

Zu den Wandungen sind in obiger Beziehung nicht zu zählen: Dampfdome Siederohrvorköpfe, Mannlochdeckel, Deckel von Reinigungsluken, Rohrstutzen Deckel zu denselben, dann andere Armaturstücke, jedoch nur dann, wenn sie w

*) Die Grundlage dieser Vorschriften bilden die 13 Paragraphen der Verord des Handelsministeriums im Einverständnisse mit dem Ministerium des Inneren 1. Oktober 1875, betreffend die Sicherheitsvorkehrungen gegen Dampfkesselex sionen. Einzelne Paragraphen dieser Verordnung erfuhren Abänderungen durch Ministerialverordnungen vom 20. Juli 1877, 9. März 1882, 4. Mai 1883 und 15. 1891. Aufserdem ergingen verschiedene die Verordnungen erläuternde und er zende Ministerialerlässe an einzelne Länderstellen.

Die Verordnungen, sowie die wichtigsten, bis Oktober 1891 erschienenen Er sind bei dieser Zusammenstellung, so weit dies für den praktischen Gebrauch n schien, berücksichtigt.

vom Kesselmauerwerke umschlossen, noch vom Feuer oder den erhitzten Gasen berührt werden, und wenn ihr Durchmesser nicht mehr als 60 cm beträgt.

Die Decken der Dampfdome dürfen in dem Falle, dafs diese Dampfdome aus Schmiedeisen (Kesselblech) konstruiert sind, bis zu einem Maximum des äufseren Durchmessers von 75 cm aus Gufseisen angefertigt werden.

Die Maximal-Dampfspannung eines Kessels, bei welchem von dieser Erlaubnis Gebrauch gemacht wird, darf 6 Atm. nicht überschreiten.

Rücksichtlich der übrigen unter 2 dieses Paragraphen benannten Armaturstücke bleibt die Beschränkung in der Anwendung des Gufseisens auf 60 cm im Durchmesser aufrecht.

Schliefsbare Bouilleurs von gröfseren Durchmessern müssen, wenn sie mit gufseisernen Böden versehen werden sollen, konisch bis auf 60 cm zulaufende Vorköpfe erhalten.

Bei Vorköpfen von Siederöhren und Vorwärmern, wenn dieselben weder vom Kesselmauerwerk umschlossen, noch vom direkten Feuer oder von erhitzten Gasen berührt werden, oder der strahlenden Wärme ausgesetzt sind, und wenn sie nach innen, nämlich gegen den Druck, entsprechend gewölbt und mit Aufsennietung versehen sind, kann Gufseisen bis zu einem Durchmesser von 80 cm verwendet werden.

Für besondere Kesselkonstruktionen kann die Anwendung des Gufseisens zu anderen, als den vorbenannten Konstruktionsteilen der Wandungen durch das Handelsministerium im Einvernehmen mit dem Ministerium des Inneren von Fall zu Fall bewilligt werden.

Die bezüglichen Eingaben sind stets mit im Mafsstabe ausgeführten oder mit den betreffenden Hauptmafsen beschriebenen Zeichnungen der betreffenden Kessel und der fraglichen Konstruktionsteile zu belegen.

Hinsichtlich der vom Auslande bezogenen Kessel trifft die Verantwortlichkeit auch den Benützer.

§ 3. An jedem Dampfkessel müssen folgende **Armaturstücke** vorhanden sein, für deren guten Zustand der Kesselbenützer verantwortlich ist:

a) Wenigstens ein Sicherheitsventil, und wenn der Dampfkessel mehr als 2,5 qm Heizfläche hat, mindestens zwei Sicherheitsventile. Die Belastung derselben mufs der Dampfspannung, für welche der Kessel erprobt wurde, entsprechen, und sie dürfen bei stationären Dampfkesseln nur mit Gewichten in der Art belastet werden, dafs bei mittelbarer Belastung das Gewicht am äufsersten Angriffspunkte des Hebels wirkt. Bei anderen Dampfkesseln, welche mit Federwagen versehen sind, mufs die Maximalspannung der Feder der Maximalspannung des Dampfes entsprechend begrenzt und bei Lokomobilen wenigstens ein Ventil mit einem Gewichte belastet sein;

b) wenigstens ein richtiges und verläfsliches Manometer, auf dessen Teilung die für den betreffenden Kessel zulässige Maximal-Dampfspannung besonders markiert ist. Zur Anbringung eines Kontroll-Manometers mufs ein Whitworthsches Muttergewinde von $^3/_4$ Zoll engl. vorhanden und die Einrichtung so getroffen sein, dafs jedes der beiden Manometer für sich abgesperrt werden kann;

c) wenigstens eine verläfsliche Speisevorrichtung, welche den Kessel reichlich mit Wasser versorgen kann und an ihrer Einmündung in denselben mit einem selbstthätigen Ventile zur Verhinderung des Wasserabflusses aus dem Kessel versehen ist.

   Für mehrere mit einander verbundene Kessel genügt eine Speisevorrichtung mit einem Speiserohre, jedoch mufs jeder Kessel einen nebst der Absperrvorrichtung auch noch mit einem selbstthätigen Ventile versehenen Speisekopf besitzen;

d) mindestens zwei brauchbare Vorrichtungen zur Erkennung des Wasserstandes im Kessel, deren jede für sich direkt mit dem Kessel verbunden ist. Von diesen Vorrichtungen, deren eine ein Wasserstandsglas sein mufs, hat jede den für den Kessel zulässigen tiefsten Wasserstand deutlich zu markieren. Dieser tiefste Wasserstand mufs bei stationären Kesseln mindestens 10 cm über der Feuerlinie und bei beweglichen Kesseln so hoch liegen, dafs auch mit Rücksicht auf deren Schwankungen die höchste vom Feuer und den Heizgasen berührte Kesselfläche noch hinreichend vom Wasser bedeckt bleibt.

Auf Dampftrocknungs- und Ueberhitzungs-Apparate, sowie auf solche Kesselteile, bei welchen ein Erglühen der mit dem Dampfe in Berührung stehenden

Kesselwände nicht zu befürchten ist, finden diese letzteren Bestimmungen keine Anwendung.

Die Gefahr des Erglühens ist in der Regel als ausgeschlossen zu betrachten, wenn die Heizgase eine vom Wasser bespülte Fläche des Kessels bestrichen haben, die bei gewöhnlichem Essenzuge (stabile Dampfkessel, Lokomobile) wenigstens zwanzigmal und bei künstlich gesteigertem Zuge (Lokomotive, Feuerungen mit Gebläse u. s. w.) vierzigmal so grofs ist, als die Rostfläche.

Dampfkessel von weniger als 80 l Inhalt (Gesamtinhalt, d. i. Wasser und Dampfraum zusammengenommen) sind von den unter b), c) und d) angeführten Sicherheitsvorkehrungen befreit. Dies, sowie die Befreiung von der Druckprobe sind die einzigen Begünstigungen für Kessel von weniger als 80 l Inhalt.

Bei allen alten sehr hohen Dampfkesseln, welche durch die Ueberhitze eines Schweifsofens erwärmt werden, kann von der Anbringung der Wasserstandsgläser abgesehen werden, wenn diese Kessel nur sonst mit zwei vollkommen verläfslichen Vorrichtungen zur Erkennung des Wasserstandes (Schwimmer, Probierhähne, Speiserufer u. dergl.) versehen sind.

§ 4. Kein Dampfkessel, welcher mehr als 80 l Inhalt (Gesamtinhalt, d. i. Wasser und Dampfraum zusammengenommen) hat, er mag im In- oder Auslande verfertigt worden sein, darf unter Verantwortlichkeit des Benützers früher verwendet werden, bis er der in dieser Verordnung vorgeschriebenen Probe unterworfen und bei derselben als tauglich befunden worden ist.

Im Auslande, beziehungsweise in Ungarn erprobte Lokomobilen können zur zeitweisen Verwendung zugelassen werden; jedoch ist der Benützer verpflichtet, in diesem Falle an denjenigen Prüfungskommissär, in dessen Bezirke die Lokomobile arbeiten soll, Anzeige zu erstatten, und letzterer hat eine Revision dieser Dampfkessel vorzunehmen.

Bezüglich der nicht in deutscher Sprache ausgestellten Certifikate müssen deutsche Uebersetzungen derselben, sowie der diesbezüglichen Revisionsklauseln vorhanden sein.

Diese Probe kann nach freier Wahl der Parteien entweder durch einen der amtlich bestellten Prüfungskommissäre, deren Namen und Wohnsitze nebst dem ihnen zugewiesenen Bezirke von der politischen Landesstelle kundgemacht werden, oder — wenn der Benützer des Kessels einer vom Staate autorisierten Gesellschaft zur Ueberwachung des Dampfkesselbetriebes als wirkliches Mitglied angehört — nach den Bestimmungen des Gesetzes vom 7. Juli 1871 von den amtlich hierzu ermächtigten Organen dieser Gesellschaft vorgenommen werden.

Die Probe hat, gleichviel, ob sie von amtlichen oder Privatorganen vorgenommen wird, stets vor der allfälligen Einmauerung oder Verkleidung des Kessels nach den für die amtliche Prüfung bestehenden Vorschriften stattzufinden. Bei Lokomobilen ist die Probe mit der Verkleidung gestattet.

Der bei derselben anzuwendende Probedruck hat bei Dampfkesseln, welche bis zu einer effektiven Dampfspannung von zwei Atmosphären benützt werden sollen, das Doppelte, bei Kesseln, welche für eine höhere Dampfspannung benützt werden sollen, das Ein- und einhalbfache des zulässigen gröfsten Druckes, vermehrt um den Druck von einer Atmosphäre zu betragen.

Der Druck einer Atmosphäre ist mit 1 kg f. d. qcm zu rechnen.

§ 5. Jeder Dampfkessel mufs mit dem Namen des Verfertigers und dem Jahre der Anfertigung bezeichnet sein, und es mufs die für denselben bewilligte höchste effektive Dampfspannung, in Atmosphären oder kg f. d. qcm ausgedrückt, an einer leicht sichtbaren Stelle des Kessels kennbar und dauerhaft ersichtlich gemacht werden.

Die hier erwähnte bewilligte höchste effektive Dampfspannung ist bei Kesseln von weniger als 80 l Inhalt durch die bei der baupolizeilichen Anmeldung der Aufstellung des Dampfkessels anzugebende, beziehungsweise zu bewilligende, zu ersetzen.

§ 6. Ueber jede Kesselprobe wird eine Bestätigung ausgestellt, welche der Kesselbenützer aufzubewahren hat.

§ 7. Die Erprobung eines Dampfkessels ist in folgenden Fällen zu wiederholen:

a) Wenn eine wesentliche Veränderung der Konstruktion des Kessels vorgenommen wird;

b) wenn bei einer Ausbesserung mehr als der zwanzigste Teil der Kesseloberfläche ausgewechselt wurde.

Bei Berechnung der Kesseloberfläche ist stets der Dampfkessel samt allen mit ihm in dauernd offener Verbindung stehenden Teilen (Dome, Vorköpfe, Bouilleurstutzen u. s. w.) als ein einziges Ganze zu betrachten.

Die Auswechselung von Feuerröhren bis zu 10 cm Durchmesser bedingt bei Röhrenkesseln keine neue Erprobung;

c) wenn ein bereits gebrauchter stationärer Kessel in einer anderen gewerblichen Anlage verwendet werden soll.

Ueberdies steht es jedem Kesselbenützer frei, seine Dampfkessel, so oft er es für zweckmäfsig findet, einer wiederholten Kesselprobe unterziehen zu lassen.

Der Anlafs und das befriedigende Ergebnis der wiederholten Kesselprobe ist auf der ursprünglich erfolgten Bestätigung (§ 6) anzumerken.

In anbetracht, dafs die Wasserstationen einer Bahn als Bestandteile eines Unternehmens anzusehen sind, erscheint für die in ihnen aufgestellten freistehenden Dampfkessel, welche keiner Untermauerung bedürfen, auf einer mobilen gufseisernen Platte ruhen und durch keine Fundamentschrauben verankert sind, im Falle ihrer Uebertragung ein gesetzlicher Verpflichtungsgrund für die vorgeschriebene Wiederholung der Erprobung eines Dampfkessels ebensowenig gegeben, als er für den Fall der Uebertragung aus einer Lokalität eines gewerblichen Unternehmens in eine andere besteht.

Wohl aber ist der Besitzer eines derartigen Kessels, da dieser alle Merkmale eines Kessels trägt, bezüglich dessen § 8 unter 2 die Anzeige-Pflicht vorschreibt, zur Beachtung dieser Vorschrift verpflichtet.

§ 8. Jeder Dampfkessel ist jährlich mindestens einmal, mit möglichster Vermeidung von Betriebsstörungen, einer **Revision** zu unterziehen. Auch ist der Dampfkesselbenützer verpflichtet, bei jeder Auswechslung eines Ventiles oder eines Ventilhebels eine Revision zu veranlassen. Die Revisionen werden von dem amtlichen Prüfungskommissär, oder bei jenen Dampfkesselbenützern, welche einer vom Staate autorisierten Gesellschaft zur Ueberwachung des Dampfkesselbetriebes als ordentliche Mitglieder angehören, durch die Organe dieser Gesellschaft vorgenommen.

Kessel von weniger als 80 l Inhalt unterliegen ebenfalls der jährlichen Revision.

Bezüglich der Lokomobilen, welche ihren Standort wechseln, ist der Benützer einer solchen verpflichtet, alljährlich dem amtlichen Prüfungskommissär, oder wenn der Benützer einer vom Staate autorisierten Gesellschaft zur Ueberwachung des Dampfkesselbetriebes angehört, dem Organe dieser Gesellschaft behufs der Revisionsvornahme den Standort und die Zeit, wo und wie lange sich der Lokomobilkessel dort befinden wird, anzuzeigen.

Jeder Kessel ist vom Zeitpunkte der ersten Erprobung an von fünf zu fünf Betriebsjahren bei Gelegenheit der Jahresrevision einer sorgfältigen Untersuchung unter Vornahme einer Druckprobe mit Anwendung eines Kontroll-Manometers zu unterziehen.

Kessel von weniger als 80 l Inhalt sind selbstverständlich von dieser Druckprobe befreit.

Das Ergebnis der Revision ist auf der ursprünglich ausgestellten Bestätigung (§ 6) anzumerken.

Den vom Untersuchenden aus Anlafs der Revision getroffenen Anordnungen ist in jedem Falle unweigerlich Folge zu leisten.

Wenn die Revision durch einen amtlich bestellten Prüfungskommissär vorgenommen wurde, so steht dem Kesselbenützer, insofern er sich durch die getroffenen Anordnungen beschwert findet, die Berufung an die politische Landesbehörde zu.

Diese Berufung hat nur insofern eine aufschiebende Wirkung, als nicht wegen einer zu besorgenden Gefahr die gänzliche Einstellung des Kesselbetriebes angeordnet wurde.

Vorkommende Berufungen sind von den Behörden schleunigst der Erledigung zuzuführen.

Ein Dampfkessel, welcher ein Jahr oder länger aufser Betrieb steht, ist der vorgeschriebenen Jahresrevision dann nicht mehr zu unterziehen, wenn der Benützer die Aufserbetriebsetzung des Kessels noch vor Ablauf des Revisionsjahres bei dem amtlichen Dampfkessel-Prüfungskommissär oder, wenn er einer vom Staate autorisierten Gesellschaft zur Ueberwachung des Dampfkesselbetriebes als ordentliches Mitglied angehört, den Organen dieser Gesellschaft schriftlich zur Anzeige gebracht hat.

Wer einen durch ein Jahr oder länger aufser Betrieb gestandenen Dampfkessel wieder in Betrieb setzen will, hat diese Absicht spätestens acht Tage vor dem Zeit-

punkte, an welchem der Kessel wieder in Betrieb gesetzt werden soll, dem betreffenden amtlichen Prüfungskommissär oder, wenn er einer vom Staate autorisierten Gesellschaft zur Ueberwachung des Dampfkesselbetriebes als ordentliches Mitglied angehört, den Organen dieser Gesellschaft zum Zwecke der vorzunehmenden Revision schriftlich anzuzeigen.

Vor Vornahme der Revision darf ein solcher Kessel nicht wieder in Betrieb gesetzt werden.

Dampfkessel, welche innerhalb eines Jahres nur zeitweilig in Betrieb stehen, sind bezüglich der Revisionspflicht denjenigen Kesseln, welche das ganze Jahr hindurch in Betrieb stehen, gleichzuhalten.

Dampfkessel sind in der Regel nur einmal in einem Jahre zu revidieren, und ersetzt die in einem Jahre vorgenommene verschärfte Revision die regelmäfsige Jahresrevision.

Die Prüfungsorgane sind jedoch berechtigt, solche Kessel, bei deren Betrieb sie eine minder sorgfältige Handhabung wahrnehmen, innerhalb des Revisionsjahres wiederholt der Revision zu unterziehen.

Die von fünf zu fünf Jahren vorzunehmenden verschärften Revisionen können je nach der Instandhaltung des Dampfkessels und den Wahrnehmungen der Prüfungsorgane, insbesondere dann, wenn ein Kessel durch längere Zeit unbenützt gestanden hat, von den Prüfungsorganen auch vor Ablauf von fünf Jahren angeordnet werden.

Die Revisionstaxe ist für jeden Kessel, gleichviel ob eine oder mehrere Revisionen in demselben Jahre vorgenommen wurden, jährlich nur einmal zu entrichten.

Auch für die nach der Erprobung eines Dampfkessels vorgenommene erste Revision ist, unbeschadet der früheren Bestimmung, die Revisionstaxe zu erheben.

§ 9. Bei der Aufstellung oder Einmauerung eines stationären Dampfkessels, dann bei der Verwendung einer Lokomobile innerhalb bewohnter Orte, sowie bei der Versetzung eines Dampfkessels oder wesentlichen Veränderungen an den dazu gehörigen Vorrichtungen sind die Feuersicherheits- und Bauvorschriften zu beobachten.

Jedes Kronland hat eine eigene Bauordnung.

Bauvorschriften für Wien und Niederösterreich.

Grofse Kessel.

Grofse Dampfkessel sollen nach Möglichkeit in versenkten Lokalen und entfernt von Wohnräumen aufgestellt werden.

Von Arbeitsräumen müssen die Lokalitäten für solche Dampfkesselanlagen durch eine (mit Ausnahme der unumgänglich nötigen Verbindungsöffnungen) volle Mauer von mindestens 60 cm Stärke getrennt sein, dieselben dürfen nur leicht überdeckt, nicht überbaut und in keinem Falle gewölbt werden.

Zur Aufstellung von Grofskesseln ist die Genehmigung der Baubehörde erforderlich.

Kleine Kessel.

Für kleine, einzeln verwendete Dampfkessel werden Erleichterungen bezüglich der Aufstellung gewährt

Kleinkessel, das sind solche, deren Durchmesser (bei Kesseln von nicht kreisrunder Querschnittsform die gröfste innere Querschnitts-Abmessung des Kesselkörpers) 1,2 m, deren Rauminhalt bei Vollfüllung bis zur gesetzlichen Wasserstandsmarke 1,0 cbm und deren Dampfdruck 6 Atm. nicht übersteigt, dürfen in bewohnten Häusern und frei in Werkstätten aufgestellt werden, wenn:

1. die unmittelbar darüber befindlichen Räume nicht bewohnt werden; diese Räume dürfen auch nicht zum beständigen Aufenthalte von Arbeitern, also auch nicht zu Werkstätten, sondern lediglich zu Magazinzwecken verwendet werden;

2. der Schornstein, der auch ein gewöhnlicher Rauchschlot sein kann, mindestens die Höhe des Dachfirstes der unmittelbar benachbarten Wohnhäuser überragt;

3. der Kessel mindestens 3 m von jeder Nachbargrenze entfernt bleibt.

Zur Aufstellung von Kleinkesseln ist die baubehördliche Genehmigung erforderlich.

Zwergkessel, das sind solche, deren Durchmesser (bei Kesseln von nicht kreisrunder Querschnittsform die gröfste innere Querschnitts-Abmessung des Kesselkörpers) 0,8 m, deren Wasserinhalt bei Vollfüllung bis zur gesetzlichen Wasserstandsmarke 0,5 cbm und deren Dampfdruck 4 Atm. nicht übersteigt, unterliegen

hinsichtlich ihrer Aufstellung lediglich den für die Anlage von Feuerstellen geltenden Vorschriften.

Sie bedürfen keiner besonderen baubehördlichen Bewilligung, doch hat der Benützer vor Inbetriebnahme solch' eines Kessels dies bei der Baubehörde (Wien), bei dem Gemeindevorstande (Land Nieder-Oesterreich), unter Nachweisung der Zustimmung des Hauseigentümers und beim zuständigen Dampfkesselkommissär anzuzeigen und dabei eine Abschrift des gesetzlichen Druckprobencertifikates zu erlegen, worüber ihm eine Bestätigung der erfolgten Anzeige ausgeliefert wird. Bei Aufstellung von mehreren Zwergkesseln in einem Lokale haben diese Erleichterungen nicht Platz zu greifen.

Schornsteine.

Schornsteine für gröfsere Feuerungen, zu Ventilationszwecken oder Dampfkesseln müssen so gebaut sein, dafs durch ihre Benützung die Nachbarschaft derselben nicht belästigt wird.

Diese Schornsteine sind bei jeder unteren Einmündung mit einem eisernen Schieber oder einer Klappe, und in jenen Höhenstrecken, welche mehr als 50 cm weit sind, mit inneren Steigeisen zu versehen.

Die Höhe solcher Schornsteine hat die Baubehörde nach den Lokalverhältnissen zu bestimmen, und mufs die Anlage stets derartig sein, dafs eine eventuelle künftige Erhöhung auf mindestens 35 m möglich wird.

Bezüglich der Stabilität und Wandstärke solcher hoher freistehender Schornsteine kann von der Baubehörde eine statische Berechnung verlangt werden, welche nachweist:

1. dafs der Druck unter dem Eigengewichte in dem ringförmigen Teile des Mauerwerkes nirgends 8 kg f. d. qcm übersteigt;

2. dafs mindestens eine zweifache Sicherheit gegen das Umstürzen bei einem Winddrucke von 150 kg f. d. qm an jedem Teile des Schornsteins besteht.

Das Material des Schornsteins muls feuersicher sein.

Eiserne Kamine können gestattet werden, solche aus Blech jedoch nur für isolierte Industriebauten oder, wenn sie inmitten von Wohngebäuden liegen, nur für eine vorübergehende Benützung.

Gaskraftmaschinen und Heifsluftmaschinen.

Gaskraftmaschinen, Heifsluftmaschinen und ähnliche, durch Elementarkräfte arbeitende Motoren sind, wenn sie geräuschlos arbeiten, wie die Zwergkessel zu behandeln. Andernfalls bedarf ihre Aufstellung der baubehördlichen Bewilligung.

Für die Ableitung der Verbrennungsprodukte ist jederzeit geeignete Vorsorge zu treffen.

---

§ 10. An Stelle dieses Paragraphen sind Bestimmungen getreten, welche enthalten sind in der **Verordnung des österreich. Handelsministeriums** (im Einvernehmen mit dem Ministerium des Inneren und dem Ministerium für Kultus und Unterricht) vom 15. Juli 1891, betr. den **Nachweis der Befähigung** zur Bedienung und Ueberwachung von Dampfkesseln, sowie zur Bedienung (Führung, Wartung) von Dampfmaschinen, Lokomotiven und Dampfschiffsmaschinen.

§ 11. Jedermann, dem irgend eine Gefahr in Benützung eines Dampfkessels bekannt wird, ist zur **Anzeige** derselben bei den amtlichen Organen berechtigt.

Verpflichtet zu einer solchen Anzeige sind alle jene Personen, welche bei der Bedienung oder Benützung eines Dampfkessels verwendet werden, im Falle ihre dem Benützer desselben oder seinen Bestellten erstattete Mitteilung über die drohende Gefahr nicht unverzüglich zur Herstellung eines gefahrlosen Zustandes führen sollte.

Die genannten Personen haften nach den bestehenden Gesetzen für jeden aus der Unterlassung ihrer Anzeige entstehenden Schaden.

Der amtliche Dampfkessel-Prüfungskommissär hat über jede solche Anzeige sofort eine Untersuchung vorzunehmen und deren Resultat der politischen Landesbehörde, sowie, wenn der Dampfkessel unter Privataufsicht steht, auch gleichzeitig dem betreffenden Vereine, unter Bezeichnung der zu treffenden Vorkehrungen, mitzuteilen. Bei bestehender Gefahr hat der amtliche Kommissär sogleich die erforderlichen Anordnungen zu treffen.

§ 12. Im Falle der **Explosion** eines Dampfkessels ist der Benützer desselben verpflichtet, hierüber unverzüglich Anzeige an die nächste Sicherheitsbehörde zu machen, welche sogleich und ohne Rücksicht, ob der betreffende Kessel unter Staats-

oder Privataufsicht steht, stets den für den betreffenden Bezirk von der Regierung bestellten (amtlichen) Prüfungskommissär, behufs gemeinschaftlichen Vorgehens bei der Untersuchung, von dem Vorfalle in Kenntnis setzt. Der Kommissär hat bei bedeutenderen Unglücksfällen, oder wenn sich der Verdacht einer strafbaren Handlung ergiebt, das Einschreiten der kompetenten politischen oder Gerichtsbehörden zu veranlassen, einstweilen aber alles vorzukehren, was zur Sicherstellung des Beweismateriales notwendig ist.

Vor dem Eintreffen der Untersuchungskommission und ohne deren Zustimmung darf an dem Zustande und der Lage des Kessels, sowie an den durch die Explosion berührten Bauten und Einrichtungen keine Veränderung vorgenommen werden, es wäre denn, dafs selbe zur Rettung von Menschen aus einer Gefahr für Gesundheit oder Leben, zur Verhütung fernerer Unfälle oder Offenhaltung des Verkehres auf einer Eisenbahn oder öffentlichen Strafse unvermeidlich erscheinen.

§ 13. Uebertretungen der obigen Vorschriften werden, sofern nicht das allgemeine Strafgesetz Anwendung findet, nach Mafsgabe der Ministerialverordnung vom 30. September 1857 (R.-G.-Bl. Nr. 198) mit Geldstrafen bis zu 100 fl. ö. W. oder Arrest bis zu 14 Tagen geahndet.

E. Grundsätze und Anleitung für die Untersuchungen an Dampfkesseln und Dampfmaschinen zur Ermittlung ihrer Leistungen.

Zweiter Entwurf der gemeinschaftl. Kommission des Vereins deutscher Ingenieure und des Verbandes der Dampfkessel-Ueberwachungsvereine.

Die folgende Zusammenstellung hat den Zweck, für die Untersuchungen an Dampfkesseln und Dampfmaschinen zur Ermittlung ihrer Leistungen die dabei zu beobachtenden Mafsregeln und Einrichtungen anzugeben, sowie hierfür Grundsätze von allgemeiner Gültigkeit zu schaffen.

Es ist wünschenswert, durch Angabe der wichtigsten Verhältnisse der untersuchten Anlagen und der Umstände, unter welchen die Resultate erzielt werden, den gewonnenen Ergebnissen nicht nur für den einzelnen Fall, sondern auch allgemeinen Wert zu erteilen.

Mit der Ausführung solcher Untersuchungen sind nur Personen zu beauftragen, welche die hierzu erforderliche Sachkenntnis und Uebung besitzen. Dieselben sollen mit Beachtung des jeweiligen Zweckes ein Versuchsprogramm aufstellen, die zur Untersuchung dienenden Apparate auf ihre Brauchbarkeit prüfen und die Ergebnisse der Untersuchung zusammenstellen. Ihren Arbeiten sind die folgenden Vorschriften mit sinngemäfser Anwendung und Auswahl für den einzelnen Fall zu grunde zu legen.*)

a. Allgemeine Bestimmungen.

I. Art der Untersuchungen.

a) Die Leistung einer **Dampfkesselanlage** ist zu untersuchen

1. auf das Mafs der Dampferzeugung f. d. qm Heizfläche und i. d. Std.; aufserdem entweder
2. auf ihren Wirkungsgrad, d. h. auf das Verhältnis der an den Kesselinhalt abgegebenen Wärmemenge zu dem Heizwerte des aufgewandten Brennstoffes

---

*) In vielen Fällen ist es nicht erforderlich, die sämtlichen hier vorgesehenen Untersuchungen auszuführen; so wird man z. B. zur Ermittlung der Verdampfungsziffer bei Anwendung eines genügend bekannten Brennstoffes sich auf mehrmalige Feststellung des Aschen- und Wassergehaltes, auf die Messung der Temperatur der Feuergase, ihre chemische Untersuchung und die Berechnung des Luftüberschusses beschränken können.

unter gleichzeitiger Bestimmung der einzelnen Wärmeverluste,

oder nur (für Versuche geringerer Bedeutung)

3. auf die Verdampfungsziffer, d. h. auf die Zahl der kg Wasser von bestimmter Temperatur, welche durch je 1 kg näher bezeichneten Brennstoffes in Dampf von gewisser Spannung verwandelt werden.

b) Bei der Untersuchung einer **Dampfmaschine** kann es sich handeln um die Ermittlung

1. der Arbeit in indizierten oder effektiven Pferdestärken,
2. des Wirkungsgrades, d. h. des Verhältnisses der durch die Bremse zu ermittelnden Nutzarbeit zu der durch den Indikator zu bestimmenden indizierten Arbeit,
3. des Dampfverbrauches und Vergleichung desselben mit der geleisteten Arbeit.

II. Allgemeine Versuchsbestimmungen, insbesondere Zahl und Zeit der Untersuchungen.

a) Um die zu prüfende Anlage im Betriebe kennen zu lernen, die zur Verwendung kommenden Apparate und Einrichtungen zu prüfen und die Hülfskräfte einzuüben, ist ein Vorversuch anzustellen.

b) Für jede Untersuchung, welche auf allgemeine Glaubwürdigkeit Anspruch machen soll, sind mindestens zwei Versuche hintereinander auszuführen, die nur dann als gültig erachtet werden, wenn sie nicht durch Störungen unterbrochen worden sind, und wenn ihre Ergebnisse nicht um mehr von einander abweichen, als unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden darf. Aus den Versuchen mit annähernd gleichen Ergebnissen wird der Mittelwert als endgültig angenommen.

c) Zu Anfang und zu Ende jedes Versuches sollen überall gleiche Verhältnisse vorhanden sein, Maschinen bezw. Kessel sollen sich im Beharrungszustande befinden.

Bemerkung. Bei einem Betriebe mit Unterbrechungen bedarf die Feststellung des Beharrungszustandes besonderer Sorgfalt.

d) Alle für den Versuch nicht zur Anwendung kommenden Dampf- und Wasserröhren sind mittelst Blindflanschen vom Versuchskessel bezw. von der Versuchsmaschine abzusperren, u. zw. möglichst nahe an denselben.

e) Jeder Versuch, welcher die Ermittlung des Brennstoffverbrauches und der durchschnittlichen Leistung eines Kessels oder des Dampfverbrauches und der durchschnittlichen Kraftleistung zum Zwecke hat, soll, wenn er während des Fabrikbetriebes mit seinen gewöhnlichen Schwankungen und Unterbrechungen ausgeführt wird, a) bei Tagbetrieb je einen Tag lang, und b) bei Tag- und Nachtbetrieb je einen Tag und eine Nacht lang dauern.

Bemerkung. Die Dauer der regelmäfsigen Unterbrechungen (Mahlzeiten) und die Menge des während derselben verheizten Brennstoffes sowie die Art ihrer Verrechnung sind anzugeben.

f) Werden dagegen für die Versuche gleichmäfsige Betriebsverhältnisse herbeigeführt, so hat ein Versuch bei Dampfkesseln mindestens 10, bei Dampfmaschinen mindestens 8 Std. ohne Störung und Unterbrechung zu dauern.

g) Zu Versuchen über die Arbeitsleistung von Dampfmaschinen (a I b 1) genügt, wenn die Belastung eine nahezu gleichmäfsige ist, ein Versuch von entsprechend kürzerer Dauer.

Für die Ermittlung des Verhältnisses der effektiven zur indizierten Leistung (a I b 2) sowie des Leerlaufwiderstandes ist die Dauer, der Versuche ohne Einfluſs, ebenso bei der Entnahme von Diagrammen zur Beurteilung der Dampfverteilung.

h) Bei Versuchen von besonderer Wichtigkeit, z. B. bei Garantieversuchen, von deren Ergebnissen Abnahme, Strafen oder Prämien abhängen, ist die Dauer derselben je nach der Bedeutung des damit verknüpften Interesses zu bemessen und vorher zu vereinbaren.

i) Das Mafs der Abweichung von der versprochenen Leistung, welches zulässig sein soll, ohne die Zusage als verletzt erscheinen zu lassen, ist vor den Versuchen (sei es im Lieferungsvertrage, sei es bei Aufstellung des Programmes) zu vereinbaren.

k) Unmittelbar nach Inbetriebnahme einer Anlage soll kein Garantieversuch ausgeführt werden; dem Lieferanten wird zu eigenen Vorversuchen und zu den etwa

nötigen Verbesserungen eine Frist eingeräumt, deren Dauer bezw. Bedingungen möglichst bei Abfassung des Lieferungsvertrages festzustellen sind.

III. Einheitliche Mafse und Gewichte für die Berechnungen.

a) Alle Wärmemessungen (Wärmeeinheiten, Temperaturgrade) beziehen sich auf das 100-teilige Thermometer (Celsius).

b) Ist ohne nähere Angabe von Dampfdruck die Rede, so ist darunter stets der den Druck der Atmosphäre übersteigende Druck, Dampfüberdruck, zu verstehen.

c) Spannungen unter der atmosphärischen werden durch das Vakuum gemessen. Man versteht darunter den Unterschied zwischen der zu bestimmenden Spannung und der atmosphärischen.

d) Als Mafseinheit für den Ueberdruck sowohl als für das Vakuum dient der Druck von 1 kg f. d. qcm oder die metrische Atmosphäre.

> Bemerkung. Federmanometer, offene Quecksilbermanometer, Indikatorfedern geben direkt den Ueberdruck oder das Vakuum an. Sind die Skalen dieser Instrumente nach anderen Mafsstäben eingeteilt, so hat Umrechnung ihrer Angaben in metrische Atmosphären stattzufinden.

Ist die Kenntnis der absoluten Dampfspannung von Wichtigkeit, so mufs der jeweilige Atmosphärendruck mittelst des Barometers gemessen und nach Umrechnung in metrische Atmosphären zum Ueberdrucke hinzugerechnet, bezw. es mufs das Vakuum davon abgezogen werden.

e) Die Zugstärke von Schornsteinen wird durch eine in mm geteilte Wassersäule gemessen; 1 mm = 0,0001 metrische Atmosphäre.

f) Die Angabe des Dampfdruckes eines Dampfkessels bezieht sich auf den durch die Koncessionsurkunde festgesetzten höchsten Druck, diejenige des Wasserstandes auf den tiefsten Stand.

g) Unter Heizfläche ist bei Dampfkesseln die Gröfse des Flächeninhaltes der einerseits von den Feuergasen, andererseits vom Wasser berührten Wandungen des Kessels zu verstehen und dieselbe auf der Feuerseite zu messen.

> Bemerkung. Zur Heizfläche gehören auch die in den Fuchs eingebauten Vorwärmer (Economizer); doch ist deren Heizfläche stets gesondert aufzuführen. Ueberhaupt empfiehlt es sich, die verschiedenen Teile der Heizfläche gesondert aufzuführen.

h) Die für die Leistung der Dampfmaschine mafsgebende Dampfspannung ist die unmittelbar vor dem Eintritt in die Maschine vorhandene.

i) Für die Leistung einer Dampfmaschine gilt als Mafseinheit die Pferdestärke (PS) = 75 mkg i. d. Sek. Ohne weitere Bezeichnung ist darunter stets die effektive (von der Kurbelwelle abgegebene, durch die Bremse mefsbare) Leistung verstanden. Ist die indizierte Pferdestärke gemeint, so ist dies ausdrücklich auszusprechen.

Die Angabe in nomineller Pferdestärke ist zu vermeiden.

k) Ist eine Garantie des Dampf- bezw. Brennstoffverbrauches nicht gegeben, so ist bei Dampfmaschinen als normale Leistung diejenige anzunehmen, bei welcher die Maschine für 1 PS den geringsten Dampfverbrauch hat.

b. Ausführung der unter a. I bezeichneten Untersuchungen.

I. Untersuchung einer Dampfkesselanlage.

1. Brennstoff.

a) Probenahme. Von jeder Ladung (Karre, Korb u. dergl.) des zugeführten Brennstoffes wird eine Schaufel voll in eine mit einem Deckel versehene Kiste geworfen und aus dieser Masse eine Durchschnittsprobe entnommen.

> Bemerkung. Hierbei kann in folgender Weise verfahren werden: Der Brennstoff wird zerkleinert, gemischt, quadratisch ausgebreitet und durch beide Diagonalen in vier Teile geteilt. Zwei einander gegenüberliegende dieser Teile werden fortgenommen, die beiden anderen wieder zerkleinert, gemischt und geteilt. In dieser Weise wird fortgefahren, bis eine

Probemenge von etwa 5 kg übrig bleibt, welche gut verschlossen zu chemischer Untersuchung zu bringen ist.

b) Die Zusammensetzung des Brennstoffes, d. h. dessen Gehalt an Kohlenstoff, Wasserstoff, Asche und hygroskopischem Wasser bezw. an Schwefel und Stickstoff ist durch chemische Analyse, das Verhalten in der Hitze durch Verkokungsprobe zu ermitteln.

Zur Wasserbestimmung unter möglichstem Luftabschlusse soll während des Versuches eine Anzahl besonderer kleinerer Proben von dem zu verheizenden Brennstoffe in Gläser gefüllt werden, welche sofort luftdicht zu verschliefsen und zur Untersuchung zu bringen sind.

c) Berechnung des Heizwertes. (Vergl. S. 292.)

Enthält 1 kg des Brennstoffes

c kg Kohlenstoff,
h „ Wasserstoff,
s „ Schwefel,
o „ Sauerstoff,
w „ hygroskopisches Wasser,

so kann man den Heizwert nach der Annäherungsformel berechnen:

$$8100\,c + 29000\left(h - \frac{o}{8}\right) + 2500\,s - 600\,w \text{ WE.}$$

Bemerkung. Hierbei ist angenommen, dafs das Wasser der Verbrennungsgase als Dampf von 20° entweicht.

d) Bestimmung der zur Verbrennung erforderlichen Luftmenge.

1 kg Brennstoff erfordert:

$$O = 2{,}667\,c + 8\,h + s - o \text{ kg}$$
$$= \frac{2{,}667\,c + 8\,h + s - o}{1{,}43} \text{ cbm Sauerstoff;}$$

$$L = \frac{(2{,}667\,c + 8\,h + s - o)}{21\,.\,1{,}43}\,100 \text{ cbm Luft von 21 Raum-Proz. Sauerstoffgehalt.}$$

2. Verbrennungsprodukte und Wärmeverluste.

a) Messung der Temperatur.

Die Temperatur der abziehenden Gase bis zu 360° wird durch Quecksilberthermometer mit Stickstofffüllung bestimmt, welche möglichst nahe der Stelle, wo die Gase den Kessel verlassen, aber jedenfalls vor dem Abschlufsorgane, mit sorgfältiger Abdichtung in den Rauchkanal so eingesetzt werden, dafs die Quecksilberkugel sich mitten im Gasstrome befindet. Die Ablesungen erfolgen jedesmal bei Entnahme der Gasproben (s. unten). Temperaturen über 360° werden am besten kalorimetrisch bestimmt.

Die Temperatur der in die Feuerung tretenden Luft wird nahe der Feuerung gemessen, jedoch so, dafs das Thermometer vor der Wärmestrahlung des Rostes geschützt ist.

Aus den erhaltenen Zahlen wird das arithmetische Mittel genommen und der Berechnung zu grunde gelegt.

b) Gasuntersuchung.

Während der Dauer des Heizversuches werden in gleichmäfsigen Zwischenräumen von 10 bis 15 Min. Gasproben durch ein luftdicht neben dem Thermometer eingesetztes Rohr (Glas oder Porzellan), dessen untere Mündung mitten in den Gasstrom reicht, entnommen und der Gehalt an Kohlensäure und Sauerstoff bestimmt. Zur Ermittlung eines Durchschnittes können aufserdem die Gase mittelst gleichmäfsig saugenden Aspirators entnommen werden.

Enthalten die Rauchgase nennenswerte Mengen Kohlenoxyd, so ist die Verbrennung unvollkommen. Soll dieser Fehler ziffernmäfsig ermittelt werden, so sind Gasproben einzuschmelzen und im Laboratorium zu untersuchen.

Ergab die Gasanalyse k Proz. Kohlensäure,
o „ Sauerstoff,
n „ Stickstoff,

52*

so ist das Verhältnis der gebrauchten Luftmenge zu der theoretisch erforderlichen $1 \cdot v$, also

$$v = \frac{n}{n - \frac{79}{21} o} \text{ oder } \frac{21}{21 - 79 \frac{o}{n}}.$$

Die Menge der Verbrennungsprodukte wird auf folgende Weise berechnet:

1 kg Kohle giebt:

$$1{,}854\, c = K \text{ cbm Kohlensäure,}$$
$$K o \frac{1}{k} = O \text{ cbm Sauerstoff,}$$
$$K n \frac{1}{k} = N \text{ cbm Stickstoff,}$$

von 0^0 bei 76 cm Druck.

Die Menge des in den Rauchgasen enthaltenen Wasserdampfes W wird berechnet aus dem Wassergehalte der Kohle w, dem durch Verbrennung des Wasserstoffes gebildeten ($9\,h$) und dem in der Verbrennungsluft enthaltenen Wasser (falls letzteres bestimmt worden ist).

Die Gesamtmenge der Verbrennungsgase von 1 kg Kohle ist somit:

$$3{,}667\, c + 1{,}430\, O + 1{,}257\, N + W \text{ kg} = K + \frac{K(o+n)}{k} + \frac{W}{0{,}805} \text{ cbm}$$

von 0^0 und 76 cm Druck.

Um die Dichtigkeit des Mauerwerkes festzustellen, werden gleichzeitig an mehreren Stellen der Feuerzüge entnommene Proben auf ihren Gehalt an Kohlensäure und Sauerstoff geprüft.

> Bemerkung. Auf einfache Weise kann man starke Undichtigkeiten des Mauerwerkes meist nachweisen, indem man den im Betriebe befindlichen Rost mit stark rauchendem Brennstoffe frisch beschickt und den Zugschieber schliefst, oder auch dadurch, dafs man beobachtet, ob die Flamme eines an dem Kesselmauerwerk entlang bewegten Lichtes angesaugt wird.

c) Bestimmung der Wärmeverluste.

1. Der Wärmeverlust durch die höhere (über der Eintrittstemperatur der Luft) Temperatur der Rauchgase T ist gleich der Summe der durch ihre Bestandteile bewirkten Verluste, berechnet aus den Mengen derselben, multipliziert mit den spezifischen Wärmen und der Temperaturdifferenz gegen die äufsere Luft (t). Zur annähernden Ermittlung des Wärmeverlustes kann man sich der Formel bedienen:

$$\left(0{,}32 \frac{100\, c}{0{,}536\, k} + 0{,}48\, (9\, h + w)\right) (T - t),$$

wobei 0,32 als Mittelwert der Wärmekapazität der Feuergase angenommen wird

2. Der Wärmeverlust infolge unvollständiger Verbrennung, welcher dadurch entsteht, dafs Brennstoffteilchen (unverbrannt) durch den Rost fallen und von den aus dem Verbrennungsraume entfernten Herdrückständen (Schlacke, Asche) eingeschlossen werden, ist in der Weise zu ermitteln, dafs das Gewicht der Verbrennungsrückstände nach jedem Versuche bestimmt und aus ihnen eine Durchschnittsprobe behufs Feststellung des Gehaltes an unverbrannten Bestandteilen entnommen wird.
3. Der Wärmeverlust, welcher dadurch entsteht, dafs Asche und Schlacke in heifsem Zustande aus dem Verbrennungsraume beseitigt werden, ist zu vernachlässigen.

3. Verdampfung.

a) Wenn die Leistung eines Dampfkessels durch einen Verdampfungsversuch festgestellt werden soll, so ist die Art des Versuches nach Mafsgabe des unter a I a und II Bemerkten zu vereinbaren.

b) Die Konstruktions- und Betriebsverhältnisse der Kesselanlage sind möglichst vollständig anzugeben und durch eine Zeichnung zu erläutern; insbesondere sollen diese Angaben enthalten:

1. Benetzte und dampfbespülte Heizfläche des Kessels.
2. Heizfläche etwaiger Speisewasservorwärmer in den Rauchkanälen.
3. Kubikinhalt des Wasser- und Dampfraumes bis zur Wasserstandsmarke sowie etwaiger Speisewasservorwärmer.
4. Verdampfungsoberfläche, gemessen in der Höhe der Wasserstandsmarke.
5. Gesamte und freie Rostfläche; die Gröfse etwaiger Schwelplatten ist besonders anzugeben.
6. Querschnitt der Feuerzüge an den wesentlichen Stellen.
7. Zugquerschnitt in jeder Stellung der betreffenden Absperrvorrichtung.
8. Höhe des Schornsteines (von der Rostfläche aus gemessen), Querschnitt desselben an der Ausmündung bezw. an der engsten Stelle.

c) Vor Beginn der Versuche ist der Kessel zu reinigen, innerlich und äufserlich zu untersuchen und auf seine Dichtigkeit zu prüfen; die Feuerzüge sind zu putzen, die Mauerfugen dicht zu verstreichen.

d) Nach dieser Reinigung mufs der Kessel je nach seiner Beschaffenheit einen oder mehrere Tage im normalen Betriebe gewesen sein, damit er sich im Beharrungszustande befinde.

e) Der Wasserstand und der Dampfdruck werden bei Beginn des Versuches genau vermerkt und sollen während des Versuches möglichst auf gleicher Höhe erhalten werden; der Dampfdruck wird durch Manometer gemessen und viertelstündlich vermerkt.

> Bemerkung. Geringe Abweichungen des Wasserstandes oder des Dampfdruckes am Ende des Versuches sind, falls sie sich nicht ganz vermeiden lassen, nach ihrem Wärmewerte zu ermitteln und bei der Rechnung zu berücksichtigen. Es genügt also nicht, das mehr oder minder im Kessel enthaltene Wasser am Schlusse des Versuches dem Speisewasser ab- oder zuzuziehen, sondern es sind mit Rücksicht auf die Spannungen am Anfang und Ende des Versuches die gesamten im Kessel enthaltenen Wärmeeinheiten zu ermitteln.
>
> Besondere Sorgfalt verlangen in dieser Beziehung die Wasserröhrenkessel und ähnliche Konstruktionen mit stark schwankendem Wasserspiegel, bei denen aufserdem während der Dampfentwicklung die im Wasser enthaltenen Dampfblasen erheblich vergröfsert erscheinen.

f) Das Speisewasser wird entweder gewogen oder in tarierten Gefäfsen, deren Inhalt gebotenen Falles nach der Temperatur des Wassers zu berichtigen ist, gemessen; bei genauen Versuchen ist nur ersteres zulässig.

Die Speisungen müssen regelmäfsig und möglichst ununterbrochen geschehen; kurz vor Beginn und kurz vor Schlufs des Versuches sind Speisungen zu vermeiden. Die Temperatur des Speisewassers wird im Behälter, aus welchem gespeist wird, gemessen, bei genauen Versuchen je nach Umständen auch kurz vor dem Eintritt in den Kessel, und zwar bei jeder Speisung, mindestens halbstündlich. Die Speisung durch Injektoren ist nur zulässig, wenn solche den Dampf aus dem Versuchskessel erhalten.

Findet gleichzeitig mit der Untersuchung der Dampfkesselleistung eine Untersuchung des Dampfverbrauches einer von dem Kessel gespeisten Dampfmaschine statt, so ist die Verwendung von Dampfpumpen zur Speisung unzulässig, welche ihren Betriebsdampf aus dem Versuchskessel entnehmen, oder deren Abdampf mit dem Speisewasser in Berührung kommt. Der Arbeits- bezw. Dampfverbrauch einer von der Versuchsmaschine betriebenen Speisepumpe kann vernachlässigt werden.

Alles Leckwasser an den Kesselgarnituren sowie etwa ausgeblasenes Wasser ist aufzufangen und in Rechnung zu bringen. Das auf diese Weise ermittelte Wassergewicht ist umzurechnen auf Speisewasser von 0° und Dampf von 100°.

g) Bei der Bestimmung des Brennstoffverbrauches ist darauf zu achten, dafs zum Beginne des Versuches das Feuer in einen normalen Zustand der Beschickung und Reinigung gebracht, Asche und Schlacke aus dem Aschenfall entfernt werden; ist die Entleerung des Aschenfalles nicht möglich (Ten-Brink u. s. w.), so sind die Rückstände in demselben vor und nach dem Versuche bis auf eine bestimmte Höhe zu bringen und abzugleichen. In demselben Zustande mufs sich das Feuer am Ende des Versuches befinden. Die Dauer und der Brennstoffverbrauch des Anheizens werden vermerkt, bleiben aber aufser Berechnung.

Der während des Versuches zur Verwendung kommende Brennstoff ist zu wiegen und angemessen zu zerkleinern; die Beschickung des Rostes geschieht möglichst regelmäfsig.

h) Versuche, bei welchen nachweisbar erhebliche Wassermengen durch den Dampf mechanisch mitgerissen werden, sind ungenau; für die quantitative Bestimmung des mitgerissenen Wassers sind genaue und genügend erprobte Methoden z. Z. nicht bekannt.

II. Untersuchung einer Dampfmaschinenanlage.

a) Wenn die Leistung einer Dampfmaschine untersucht werden soll, so ist die Untersuchung nach Mafsgabe des unter a I b und II Gesagten zu vereinbaren.

b) Die durch solche Untersuchungen zu ermittelnden Konstruktions- und Betriebsverhältnisse der Anlage sind nach Anleitung des folgenden Schemas festzustellen:

1. System der Maschine, Beschreibung ihrer Hauptteile; wenn möglich, Zeichnung derselben.
2. Cylinderabmessungen und Gröfse der schädlichen Räume.
3. Kolbenhub und sonstige in betracht kommende Abmessungen.
4. Normale Umdrehungszahl und zulässige Schwankungen derselben.
5. Normale und zulässige Dampfspannung.
6. Normale und höchste zulässige Leistung in indizierten oder effektiven Pferdestärken.
7. Normaler, gröfster und kleinster Füllungsgrad.
8. Dampfverbrauch für je 1 indizierte und effektive Pferdestärke.

Im Sinne des Absatzes 2 der Einleitung liegt es aufserdem, die Länge der Dampfzu- und Ableitungsröhren, die Entwässerungsvorrichtungen, die Weite der Dampfkanäle, die Luftpumpenabmessungen sowie die Betriebsverhältnisse des Kessels zu ermitteln.

c) Wenn nicht anderes bestimmt wird, so sind bei Indikator- und Bremsversuchen, deren Ergebnisse zur Bezifferung des relativen Dampfverbrauches dienen sollen, folgende allgemeine Versuchsbedingungen zu beobachten:

1. Der Versuch soll nicht eher beginnen, als bis in der Maschine und den Mefsinstrumenten vollständiger Beharrungszustand, sowohl bezüglich der Kräfte als der Temperaturen, eingetreten ist.
2. Erstrecken sich solche Versuche bei regelmäfsigem Fabrikbetriebe auf die Dauer eines Arbeitstages, so sind die erste und letzte Stunde des Arbeitstages von der eigentlichen Versuchszeit auszuschliefsen.
3. Dampfspannung und Belastung der Maschine müssen während der Versuchsdauer möglichst gleichmäfsig erhalten werden; erforderlichen Falles ist die Gleichmäfsigkeit der Belastung künstlich herzustellen.
4. Während der Versuchszeit soll die Maschine möglichst ununterbrochen in Betrieb stehen und genau so bedient werden (bezüglich Schmierung u. s. w.), wie beim gewöhnlichen Betriebe.
5. Die Umdrehungszahl der Maschine wird durch fortwährend arbeitende Hubzähler gemessen und stündlich notiert.
6. In regelmäfsigen Zeiträumen (etwa 15 Min.) werden der Wasserstand im Kessel, die Spannungen in demselben, in der Dampfleitung unmittelbar vor der Maschine oder im Schieberkasten, im Zwischenbehälter (Receiver) und im Kondensator abgelesen, aufserdem die Temperatur des abfliefsenden Kondensationswassers vermerkt.

Im übrigen richten sich die allgemeinen Versuchsbedingungen, insbesondere auch Zahl und Zeit der Versuche, nach den unter a II gegebenen Bestimmungen.

d) Soll die effektive Leistung behufs Vergleichung mit dem Dampfverbrauch ermittelt werden, so ist sie, sofern die Art der Maschine solches zuläfst, mittelst der Bremse zu messen. Diese mufs so eingerichtet sein, dafs sie die Belastung der Maschine direkt angiebt.

Bremsapparate, bei denen Nebenwiderstände in Rechnung gezogen werden müssen, sind deshalb unzulässig. Während des Bremsversuches darf ein die Beobachtung vereitelndes heftiges Schwanken des Bremsdynamometers nicht vorkommen.

Bemerkung. Zu diesem Zwecke ist es erforderlich, abgesehen von der guten Regelung der Maschine, den Bremsapparat reichlich grofs zu bemessen, elastische Spannvorrichtungen mit Selbstregelung (Brauersche

Bremse) in bester Ausführung anzuwenden, gleichmäfsige Abkühlung und Schmierung (bei hölzernen Bremsbacken durch reines Wasser, bei eisernen Bandbremsen durch Oel) und sorgfältige Wartung zu sichern.

Die Ermittlung der effektiven Leistung aus der indizierten mit Hülfe von Leerlaufsdiagrammen ist als minder genau nur dann anzuwenden, wenn die Messung durch die Bremse nicht gut möglich ist.

e) Soll die indizierte Leistung behufs Vergleichung mit dem Dampfverbrauch ermittelt werden, so sind aufser den unter b II c erwähnten allgemeinen Versuchsbedingungen noch folgende Regeln zu beobachten:

1. Die Indikatoren sind möglichst unmittelbar am Cylinder ohne lange und scharf gekrümmte Zwischenleitungen anzubringen. Die Verbindung beider Cylinderenden zu dem Zwecke der Verwendung nur eines Instrumentes für beide Kolbenseiten ist bei Dampfverbrauchsversuchen zu vermeiden.
   Bei genauen Versuchen ist an jedem Cylinderende ein Indikator anzubringen.
2. Bei rasch gehenden Maschinen mit kleiner Füllung sind gebotenen Falles Indikatoren mit reduzierten Mafsen anzuwenden.
3. Die zur Verwendung kommenden Indikatoren und ihre Federn müssen vor Beginn des Versuches entweder durch direkte Belastung oder an offenen Quecksilber- bezw. Justiermanometern bei einer der mittleren Dampfspannung des Versuches entsprechenden Temperatur geprüft werden.
   Diese Prüfung ist nach Versuchen von längerer Dauer zu wiederholen; ergeben sich Unterschiede, so ist der Mittelwert mafsgebend; sind tägliche Federprüfungen während der Versuchszeit ausführbar, so sind diese vorzuziehen.
   Die Druckskalen sind durch Druckbelastung, die Vakuumskalen durch Luftleere festzustellen. Die Skalen sehr schwacher Vakuumfedern sind nach dem jeweiligen Barometerstande und in derselben Lage zur Horizontalen zu berichtigen, welche sie während des Versuches innehaben.
4. Die Uebertragung der Kolbenbewegung auf die Papiertrommel mufs möglichst direkt mit Hülfe solcher Vorrichtungen geschehen, welche die Bewegungen genau proportional den Kolbenwegen wiedergeben. Durch die Uebertragung darf kein toter Gang der Papiertrommel entstehen, auch sollen die Schnüre nicht peitschen.
5. Bei Entnahme von Diagrammen ist der Indikator gehörig vorzuwärmen; deshalb soll, bevor man den Stift schreiben läfst, der Kolben einige Spiele machen. Vor dem Ziehen der atmosphärischen Linie ist der Kolben je einmal auf- und einmal abwärts zu drücken und langsam in seine Gleichgewichtsstellung zurückzulassen. Weichen die erhaltenen Linien erheblich voneinander ab, so ist das Instrument zu reinigen. Der Kolben soll dann bei herausgenommener Feder in aufrechter Stellung des Indikators durch sein Gewicht gleichmäfsig niedersinken.
6. Während des Versuches sind je nach der Gleichförmigkeit der Belastung alle 10 bis 20 Min. Diagramme an jedem Cylinderende möglichst gleichzeitig abzunehmen. Die Diagramme sind mit Ordnungsnummern und der Zeit der Entnahme zu versehen.
7. Jedes Diagramm ist mindestens zweimal zu schreiben und sollen sich die erhaltenen Linien nahezu decken. Die Diagramme dürfen aufser leichten Wellenlinien, welche den wirklichen Verlauf der Kurve noch mit Sicherheit erkennen lassen, keine sichtbaren Einflüsse des Instrumentes zeigen.
8. Die Ausrechnung der Diagrammflächen geschieht mit Hülfe eines Polarplanimeters oder in anderer zuverlässiger Weise und ist der Kontrolle wegen zu wiederholen. Durchmesser des Dampfcylinders, Hub des Kolbens sind zu messen, der Querschnitt der Kolbenstange in Rechnung zu nehmen.

f) Soll lediglich der Wirkungsgrad der Maschine bei einer bestimmten Arbeitsleistung festgestellt werden, so genügen gleichzeitige Brems- und Indikatorversuche von kurzer Dauer.

Die solchergestalt ermittelte effektive Leistung kann zur annähernden Bezifferung des Dampfverbrauches der effektiven Pferdestärke benutzt werden, wenn die indizierte Leistung und der Dampfverbrauch der Maschine unter denselben Verhältnissen, bei welchen der Wirkungsgrad bestimmt wurde, durch einen Dauerversuch ermittelt worden sind.

g) Der Dampfverbrauch wird durch das in den Kessel gespeiste Wasser gemessen. (Vergl. b I 3 f.)

Die Berechnung des Dampfverbrauches aus den Diagrammen führt zu ungenauen

Resultaten; dagegen ergiebt sich eine Kontrolle desselben durch Bestimmung der Menge und der Temperatur des Kondensationswasser

Das kondensierte Wasser der Dampfleitung soll vor dem Eintritt in die Maschine bezw. den Ueberhitzer abgefangen und von der Speisewassermenge abgezogen werden.

Das innerhalb der Maschine (Aufnehmer, Mäntel u. s. w.) kondensierte Wasser gehört zum Verbrauche der Maschine und darf deshalb während des Versuches nicht ohne weiteres und ungewogen in den Kessel zurückgeleitet werden.

> Bemerkung. Die Vorrichtungen zum Abfangen des Kondensationswassers (Kühlschlangen u. dergl.) sind derart einzurichten, dafs Verluste durch Dampfbildung aus dem Kondensationswasser vermieden werden; zu dem Ende soll dasselbe auf mindestens 40° abgekühlt werden.

h) Die Dichtigkeit der Kolben, Dampfmäntel und Ventile u. s. w. ist nicht durch Indikatormessungen, sondern durch besondere Versuche an der betriebswarmen Maschine derart zu ermitteln, dafs die eine Seite des Kolbens (bei abgespreiztem Schwungrade), Ventiles u. s. w. mit Dampf belastet wird, während die andere Seite der Besichtigung zugänglich ist. Diese Belastung geschieht bei normalem Dampfdruck, und sind die betreffenden Dichtungsflächen für undicht zu erachten, wenn der Dampf in anderer Form als in der von feinem Nebel oder Wasserperlen zum Vorschein kommt.

Tafel

zur Geschwindigkeitsformel von Kutter.

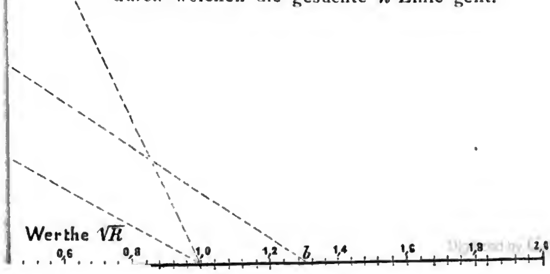
(Zu Abteil. I., S. 242.)



Hyperbel, deren Ordinaten $\frac{0{,}00155}{J}$.

$$v = c\sqrt{RJ} = \left[\frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{J}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{J}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}}\right]\sqrt{RJ}.$$

1. Gegeben R, J, n, gesucht c. Man verbinde den Punkt $\sqrt{R}$ der Abscissenachse mit dem Schnittpunkte der n-Linie und der J-Kurve durch eine Gerade; diese schneidet auf der Ordinatenachse den Wert c ab.
2. Gegeben c, J, n, gesucht R. Man verbinde den Punkt c der Ordinatenachse mit dem Schnittpunkte der n-Linie und der J-Kurve durch eine Gerade; diese schneidet auf der Abscissenachse den Wert $\sqrt{R}$ ab.
3. Gegeben c, R, n, gesucht J. Man verbinde den Punkt $\sqrt{R}$ der Abscissenachse mit dem Punkte c der Ordinatenachse durch eine Gerade; diese schneidet die gegebene n-Linie in einem Punkte, durch welchen die gesuchte J-Kurve geht.
4. Gegeben c, R, J, gesucht n. Man verbinde den Punkt $\sqrt{R}$ der Abscissenachse mit dem Punkte c der Ordinatenachse durch eine Gerade; diese schneidet die gegebene J-Kurve in einem Punkte, durch welchen die gesuchte n-Linie geht.



RECHENTAFEL

NEBST

SAMMLUNG HÄUFIG GEBRAUCHTER ZAHLENWERTHE.

ENTWORFEN UND BERECHNET

VON

DR. H. ZIMMERMANN,

GEH. BAURATH.

---

4. BIS 5. TAUSEND.

---

238 SEITEN 8°. IN LEINENBAND 5 MARK.

Für jede in diesem Buche entdeckte falsche Tafelzahl erhält der erste Finder 10 Mark.

Die Tafel enthält in ihrem oberen (Haupt-) Theile die Producte der Zahlen 1, 2, 3 . . . 999 mal 1, 2, 3 . . . . 100 in sehr übersichtlicher, durch das ganze Buch gleichmässiger Anordnung mit deutlicher Bezeichnung des Seiteninhaltes am Rande. Das Aufschlagen eines beliebigen Productes geht daher sehr schnell und sicher vor sich.

Der untere Theil der Tafel enthält die Quadrat- und Cubikzahlen, die Kreisbogenlängen und Kreisinhalte, die Quadrat- und Cubikwurzeln, die reciproken Werthe und Logarithmen der Zahlen 0,1; 0,2; 0,3 usw. bis 99,9. Diese Zugabe, sowie die Beifügung einer Faktorentafel und einer Zusammenstellung häufig gebrauchter Zahlenwerthe (Constanten) dürfte die Nutzbarkeit des Buches für technische Zwecke wesentlich erhöhen.

In den dem Buche beigegebenen Erläuterungen ist der Gebrauch sowohl der Haupttafel als auch der übrigen Zahlenwerthe ausführlich dargelegt.

In den folgenden Beispielen sind die Zahlen, die nur zur Erläuterung dienen, bei der wirklichen Ausführung

also **nicht** hingeschrieben werden, mit kleineren Ziffern gedruckt.

1. Gesucht: 872 × 48 75 93.

Spalte 872, Zeile 48	41856	Diese Zahlen sind der Rechentafel mit **einmaligem** Aufschlagen entnommen.
75	65400	
93 . . .	81096	
872 × 487593 =	425181096.	

2. Gesucht: 343233919 : 879.

Ausführlich:			Abgekürzt:
Spalte	Zeile	343233919 : 879 = 39 04 82.	343233919 : 879 = 39 04 82.
879	39 .	34281	42. . . .
		4239	723. .
	04 .	3516	Rest = 241.
		72319	
	82 .	72078	
Rest =		241.	

Nach einiger Uebung kann die Division ausgeführt werden, indem lediglich der Quotient hingeschrieben wird.

3. Gesucht: 547816 × 0,493205 auf sechs Stellen.

Das im Buche erläuterte abgekürzte Verfahren giebt die nebenstehenden Zahlen,

26803. . .	Tafelzahl.
1753. .	abgerundete
403. .	Tafelzahl.

aus denen 547816 × 0,493205 = 270186 folgt.

4. Gesucht: $253{,}67^2$.

Genau:	253^2 67^2	Abgekürzt:	253^2 7^2
	64009 | 4489		64009 | 49
2 × 253 × 67	339 02		339 02
$253{,}67^2$ =	64348,4689,	oder rund:	64348,5.

Beim Aufsuchen von 253^2 im unteren Theile der Tafel findet sich das Product 253 × 67 ohne weiteres Blättern im oberen Theile. Die abgekürzte Rechnung erfordert nur **einmaliges** Aufschlagen des Buches.

5. Gesucht: Die kleinsten einfachen Factoren der Zahl 1702. Da dieselbe offenbar durch 2 theilbar, nämlich = 2 × 851, nach Tafel II aber 851 = 23 × 37 ist, so ergiebt sich 1702 = 2 × 23 × 37.

HANDBUCH
ZUM
ABSTECKEN VON CURVEN.
VON
L. WINKEL,
GEOMETER, VORSTEHER EINER GEOMETRISCHEN ABTHEILUNG IM CENTRALBUREAU DER RHEIN. EISENBAHN-GESELLSCHAFT.

12. 1873. GEH. 2 M. 25 PF.

GRUNDZÜGE
DER
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
8. 1882.

NEBST NACHTRAG
DER CONSTANTEN WAHRSCHEINLICHE FEHLER
8. 1884.

VON
DR. G. HAGEN,
KGL. OBER-LANDES-BAUDIREKTOR, WIRKL. GEHEIMER RATH.

DRITTE UMGEARBEITETE AUFLAGE.

GEH. 7 M. 60 PF.

BEITRÄGE ZUR THEORIE
DER
EBENEN ELASTISCHEN TRÄGER.
VON
H. F. B. MÜLLER-BRESLAU,
PROFESSOR AN DER TECHNICHEN HOCHSCHULE IN BERLIN.

MIT 35 ABBILDUNGEN IN HOLZSCHNITT.

GR, 8. 1889. GEH. 2 M.

LEHRBUCH
DER
HOCHBAU-KONSTRUKTIONEN.
VON
RUDOLPH GOTTGETREU,
ARCHITEKT, ORD. PROFESSOR AN DER TECHN. HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN.

I. Theil: **Maurer und Steinmetzarbeiten.**
(Stein-Konstruktionen).

gr. 8. Mit 340 Holzschnitten und einem Atlas von 29 Tafeln in Stich. 1880. gr. Folio 24 Mark.

II. Theil: **Die Arbeiten des Zimmermanns.**
(Holz-Konstruktionen).

gr. 8. Mit 475 Holzschnitten und einem Atlas von 36 Tafeln in Stich. 1882. gr. Folio. 28 Mark.

III. Theil: **Eisen-Konstruktionen.**

gr. 8. Mit 569 Holzschnitten und einem Atlas von 35 Tafeln sowie zwei Texttafeln in Stich. 1885. gr. Folio. 36 Mark.

IV. Theil: **Der innere Ausbau.**

gr. 8. Mit 607 Holzschnitten und einem Atlas von 25 Tafeln in Stich. 1888. gr. Folio. 32 Mark.

V. Theil. **Nachtrag zu den Arbeiten des inneren Ausbaues.**
gr. 8. Mit 228 eingedruckten Holzschnitten. 6 Mark.

Preis des Einbandes für den Textband 3 Mark und 20 Mark für den Atlas von 4 Bänden.

Preis des ganzen Werkes gebunden 161 Mark.

Der Atlas kann auch abgetrennt vom Texte, zum Preise von 80 Mark bezogen werden, jedoch ohne spätere Nachlieferung des Textes. Vollständiges Inhaltsverzeichnifs übersenden wir auf Wunsch unberechnet.

Im Vorwort zum vierten Theile knüpfte der Herr Verfasser die Hoffnung an das nach ernster langjähriger Arbeit vollendete Werk, dafs es ebenso wie die Arbeiten eines Rondelet und eines Gilly, auf lange Zeit hin seinen Werth behalten werde.

Druck von Oskar Bonde in Altenburg.

213d